СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. И. Корзюк, И. С. Козловская, В. Ю. Соколович (Минск, Беларусь)

Пусть $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$ — область переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$. Относительно искомой функции $u : \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x})$ рассматривается следующая задача:

$$\left(\partial_{x_0}^2 - a^2 \partial_{x_1}^2\right) u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}),\, \boldsymbol{x} \in \bar{Q}, \tag{1}$$

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0,\infty), \tag{2}$$

$$u(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad x_0 \in [0,\tau], 0 < \tau < +\infty, \tag{3}$$

$$\partial_{x_1} u(x_0, 0) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [\tau,\infty), \tag{4}$$

где $\partial_{x_j}^2$ — вторые частные производные по переменным x_j, $j = 0, 1$, f, φ, ψ, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ — заданные функции, $\bar{Q}$ — замыкание области Q.

Теорема. Пусть φ, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)} \in C^2\left([0,\infty)\right)$, $\psi \in C^1\left([0,\infty)\right)$, $f \in C^1\left(\bar{Q}\right)$. Существует единственное классическое решение задачи (1)–(4) из класса $C^2\left(\bar{Q}\right)$ и представимо в аналитическом виде тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования

$$\varphi(0) = \mu^{(1)}(0),\, \psi(0) = d\mu^{(1)}(0),\, d^2\mu^{(1)}(0) - a^2 d^2 \varphi(0) = f(0,0),$$

$$\mu^{(1)}(\tau) - \varphi(a\tau) - \frac{1}{a}\int\limits_0^{a\tau} \psi(\xi)d\xi - v_p(\tau, 0) = C_1,$$

$$\mu^{(2)}(\tau) + \frac{1}{a} d\mu^{(1)}(\tau) - \frac{1}{a}\partial_{x_0} v_p(x_0 = \tau, x_1 = 0) -$$

$$- d\varphi(a\tau) - \frac{1}{a}\psi(a\tau) - \partial_{x_1} v_p(\tau, 0) = 0,$$

$$d^2\mu^{(2)}(\tau) + \frac{1}{a} d^2\mu^{(1)}(\tau) - a d^2\varphi(a\tau) - d\psi(a\tau) -$$

$$- \partial_{x_0}\partial_{x_1} v_p(x_0 = \tau, x_1 = 0) - \frac{1}{a}\partial_{x_0}^2 v_p(x_0 = \tau, 0) = 0,$$

где v_p — частное решение уравнения (1), d — оператор дифференцирования обыкновенной производной, C_1 — константа из решения u задачи (1)–(4).