Дыферэнцыяльныя ўраўненні з частковымі вытворнымі

УДК 517.946

Е. С. Чеб

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Во введении указан объект исследования – смешанная задача для уравнения четвертого порядка в частных производных с постоянными коэффициентами гиперболического типа с кратными производными. Целью исследования является построение классического решения корректно поставленной по Адамару смешанной задачи и доказательство теоремы о существовании и единственности. В основной части построено классическое решение начальной и граничной задач для нестрого гиперболического однородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами и кратными производными. Для построения решения использован метод характеристик. Согласно этому методу, в общем решении исходного уравнения содержится сумма четырех функций, которые на области определения находятся из начальных и граничных условий и зависят от аргументов $x+a_1t$ и $x+a_2t$. Решение построено для случаев наличия или отсутствия производных младших порядков. Получены условия согласования начальных и граничных данных с учетом гладкости заданных функций, вытекающие из требования четырежды непрерывной дифференцируемости решения. Подмечено, что в случае строго гиперболического уравнения требования на гладкость начальных данных на порядок ниже. Доказана теорема о существовании единственного классического решения. Полученные результаты могут быть применены в теории уравнений с частными производными и в вычислительной математике.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с частными производными гиперболического типа четвертого порядка, начальная задача, граничная задача, классическое решение, метод характеристик, условия согласования.

Введение. В [1; 2] для гиперболического уравнения четвертого порядка

$$\Im u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x) = f(t,x)$$

в цилиндрической области рассмотрена смешанная задача, в которой на коэффициенты уравнения налагаются условия вида $a_1^2 \geq a_2^2$.

В настоящей работе рассматривается указанное уравнение более общего вида при тех же граничных условиях. За счет ограничений на коэффициенты уравнение становится нестрого гиперболическим, поскольку имеет кратные характеристики. Для такого уравнения решается смешанная задача методом характеристик. Решение строится по следующей схеме. Сначала с помощью характеристик уравнения находится его общее решение. Из общего решения выделяется то, которое удовлетворяет начальным и граничным условиям. Условия задаются таким образом, чтобы граничная задача была корректно поставленной по Адамару [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим относительно функции $u(t,x)$ в полуполосе $Q=(0,\infty)\times\Omega\subset\Re^2$ переменных (t,x) линейное гиперболическое уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1\frac{\partial}{\partial x} + b_1\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2\frac{\partial}{\partial x} + b_2\right)^2 u(t,x) = 0, \tag{1}$$

где $\overline{\Omega}$ – замыкание области $\Omega=(0,l), l>0, a_1\neq a_2, b_1\geq 0, b_2\geq 0$.

К уравнению (1) присоединим начальные условия

Чеб Елена Сергеевна, канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. компьютерных технологий и систем БГУ (Беларусь).

Адрес для корреспонденции: пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь; e-mail: cheb@bsu.by

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad x \in \Omega, \; j = 0,1,2,3, \tag{2}$$

и граничные условия

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right|_{x=0} = \mu_s(t), \; \left.\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right|_{x=l} = \nu_s(t), \; s = 1,2, \; t \in (0,\infty). \tag{3}$$

Условия (3) выбираются таким образом, чтобы задача (1)–(3) была корректно поставлена. Выбор граничных условий вида (3) зависит от коэффициентов a_1 и a_2 уравнения (1). Будем рассматривать случай, когда эти коэффициенты разных знаков и не совпадают. При таком ограничении на коэффициенты характеристики уравнения (1) являются разнонаправленными. В этом случае граничное условие (3) задается на всей границе. Для определенности считаем, что $a_1 < 0, a_2 > 0, |a_1| < |a_2|$. Требуется найти решение уравнения (1) из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющее начальным условиям вида (2) и граничным условиям (3). Классическое решение поставленной задачи найдем методом характеристик. Предварительно рассмотрим решение для случая, когда в уравнении (1) коэффициенты $b_1 = b_2 = 0$. В общем случае схема решения остается той же, меняется лишь объем вычислений.

2. Решение начальной задачи. Общее решение однородного уравнения при отсутствии производных более низкого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(t,x) = 0 \tag{4}$$

из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций представляется в виде суммы [4; 5]

$$u(t,x) = g_1(x + a_1 t) + (x + a_2 t) g_2(x + a_1 t) + g_3(x + a_2 t) + (x + a_1 t) g_4(x + a_2 t) \tag{5}$$

четырех произвольных функций $g_1, g_2, g_3, g_4 \in C^4(\Re)$ от аргументов $x + a_1 t$ для функций $g_1, g_2 : (-\infty, l] \ni y \to g_i(y) \in \Re$ и аргументов $x + a_2 t$ для функций $g_3, g_4 : [0,\infty) \ni y \to g_{i+2}(y) \in \Re, i = 1,2$.

Удовлетворяя решение (5) начальным условиям (2) на отрезке $[0,l]$, получим систему уравнений для определения функций g_1, g_2, g_3, g_4 вида

$$\begin{gathered} g_1(x) + x g_2(x) + g_3(x) + x g_4(x) = \varphi_0(x), \\ a_2 g_2(x) + a_1 g_4(x) + a_1 g_1'(x) + x a_1 g_2'(x) + a_2 g_3'(x) + x a_2 g_4'(x) = \varphi_1(x), \\ 2a_1 a_2 g_2'(x) + 2a_1 a_2 g_4'(x) + a_1^2 g_1''(x) + x a_1^2 g_2''(x) + a_2^2 g_3''(x) + x a_2^2 g_4''(x) = \varphi_2(x), \\ 3a_1^2 a_2 g_2''(x) + 3a_1 a_2^2 g_4''(x) + a_1^3 g_1^{(3)}(x) + x a_1^3 g_2^{(3)}(x) + a_2^3 g_3^{(3)}(x) + x a_2^3 g_4^{(3)}(x) = \varphi_3(x). \end{gathered} \tag{6}$$

Интегрирование системы (6) проводится стандартными методами. Из решения системы (6) определяются функции g_1, g_2, g_3, g_4, когда их аргумент $x \in [0,l]$. Обозначим их через $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}, g_4^{(0)}$:

$$g_1^{(0)}(x) = \varphi_0(x) - \frac{x}{(a_2 - a_1)^3}\left(-a_1 a_2^2 \varphi_0'(x) + a_2(a_2 + 2a_1)\varphi_1(x) - (a_1 + 2a_2)\int_0^x \varphi_2(\varsigma)d\varsigma + \int_0^x (x-\varsigma)\varphi_3(\varsigma)d\varsigma\right) -$$

$$-\frac{1}{(a_2 - a_1)^3}\left(-\int_0^x (x-\varsigma)^2 \varphi_3(\varsigma)d\varsigma + 3(a_1 + a_2)\int_0^x (x-\varsigma)\varphi_2(\varsigma)d\varsigma - 6a_1 a_2 \int_0^x \varphi_1(\varsigma)d\varsigma + a_1^2(3a_2 - a_1)\varphi_0(x)\right) -$$

$$-C_1 x - C_3,$$

$$g_2^{(0)}(x) = \frac{1}{(a_2 - a_1)^3}\left(\int_0^x (x-\varsigma)\varphi_3(\varsigma)d\varsigma - (a_1 + 2a_2)\int_0^x \varphi_2(\varsigma)d\varsigma + a_2(a_2 + 2a_1)\varphi_1(x) - a_1 a_2^2 \varphi_0'(x)\right) - C_0 x - C_2,$$

$$g_3^{(0)}(x) = \frac{1}{(a_2 - a_1)^3}\left(-\int_0^x (x-\varsigma)^2 \varphi_3(\varsigma)d\varsigma + 3(a_1 + a_2)\int_0^x (x-\varsigma)\varphi_2(\varsigma)d\varsigma -\right.$$

$$-6a_1a_2\int_0^x \varphi_1(\varsigma)d\varsigma + a_1^2(3a_2-a_1)\varphi_0(x)\Bigg)+\frac{x}{(a_2-a_1)^3}\Bigg(\int_0^x (x-\varsigma)\varphi_3(\varsigma)d\varsigma + a_1(a_1+2a_2)\varphi_1(x)-$$

$$-(2a_1+a_2)\int_0^x \varphi_2(\varsigma)d\varsigma - a_1^2a_2\varphi_0'(x)\Bigg)+C_2x+C_3,$$

$$g_4^{(0)}(x)=\frac{-1}{(a_2-a_1)^3}\Bigg(\int_0^x (x-\varsigma)\varphi_3(\varsigma)d\varsigma-(2a_1+a_2)\int_0^x \varphi_2(\varsigma)d\varsigma+ \tag{7}$$

$$+a_1(a_1+2a_2)\varphi_1(x)-a_1^2a_2\varphi_0'(x)\Bigg)+C_0x+C_1,$$

где C_0, C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Заметим, что при решении начальной задачи функции в (7) имеют следующий вид: $g_1^{(0)}(x)=\Phi_1^{(0)}(x)-C_1x-C_3$, $g_2^{(0)}(x)=\Phi_2^{(0)}(x)-C_0x-C_2$, $g_3^{(0)}(x)=\Phi_3^{(0)}(x)+C_2x+C_3$, $g_4^{(0)}(x)= =\Phi_4^{(0)}(x)+C_0x+C_1$, $\Phi_i^{(0)}(x)$, $i=\overline{1,4}$, – функции, зависящие только от начальных данных $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$. По формуле (5) определяется единственное решение начальной задачи (4), (2), которое имеет вид

$$u^{(0)}(t,x)=\Phi_1^{(0)}(x+a_1t)-C_1(x+a_1t)-C_3+(x+a_2t)\left(\Phi_2^{(0)}(x+a_1t)-C_0(x+a_1t)-C_2\right)+\Phi_3^{(0)}(x+a_2t)+$$

$$+C_2(x+a_1t)+C_3+(x+a_1t)\left(\Phi_4^{(0)}(x+a_2t)+C_0(x+a_2t)+C_1\right)=\Phi_1^{(0)}(x+a_1t)+(x+a_2t)\Phi_2^{(0)}(x+a_1t)+$$

$$+\Phi_3^{(0)}(x+a_2t)+(x+a_1t)\Phi_4^{(0)}(x+a_2t).$$

Для определения функций $g_i, i=\overline{1,4}$, на оставшейся области определения воспользуемся граничными условиями (3).

3. Решение граничной задачи. На концах $x=0$ и $x=l$ задаются граничные условия по два на каждом, поэтому значения функций $g_i, i=\overline{1,4}$, определяются поочередно. Покажем схему расчетов. Разобьем временной промежуток $t\in[0,\infty)$ на отрезки. Вид и длина отрезка зависит от того, какие из функций определяются.

Сначала рассмотрим левую границу $x=0$. Подставим в (5) и в его производную по x значение $x=0$. Получим систему вида

$$g_1(a_1t)+a_2tg_2(a_1t)+g_3(a_2t)+a_1tg_4(a_2t)=\mu_1(t),$$

$$g_1'(a_1t)+g_2(a_1t)+a_2t\,g_2'(a_1t)+g_3'(a_2t)+g_4(a_2t)+a_1t\,g_4'(a_2t)=\mu_2(t). \tag{8}$$

Поскольку $t\geq 0$, $a_2>0$, то $a_2t\geq 0$. В системе (8) две функции g_3, g_4 от положительного аргумента. Поэтому на первом шаге их можно взять из решения начальной задачи. Итак, пусть $a_2t\in[0,l]$, тогда $t\in\left[t_1^{(0)},t_1^{(1)}\right]$, $t_1^{(0)}=0, t_1^{(1)}=\frac{l}{a_2}$, следовательно, в (8) функции g_3, g_4 определены как $g_3^{(0)}, g_4^{(0)}$ из решения начальной задачи, а функции g_1, g_2 определяются для аргументов $x\in\left[\frac{a_1}{a_2}l,0\right)$. Обозначим эти функции на указанном промежутке через $g_1^{(1)}, g_2^{(1)}$. Имеем

$$g_1^{(1)}(x)=\mu_1\left(\frac{x}{a_1}\right)+\frac{a_2x}{a_2-a_1}\mu_2\left(\frac{x}{a_1}\right)-\frac{a_2x}{a_1(a_2-a_1)}\mu_1'\left(\frac{x}{a_1}\right)-g_3^{(0)}\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)-xg_4^{(0)}\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)+$$

$$+\frac{a_2x}{a_1}\left(g_3^{(0)}\right)'\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)+\frac{a_2x^2}{a_1}\left(g_4^{(0)}\right)'\left(\frac{a_2}{a_1}x\right), \tag{9}$$

$$g_2^{(1)}(x)=-\frac{a_1}{a_2-a_1}\mu_2\left(\frac{x}{a_1}\right)+\frac{1}{a_2-a_1}\mu_1'\left(\frac{x}{a_1}\right)-\left(g_3^{(0)}\right)'\left(\frac{a_2}{a_1}x\right)-x\left(g_4^{(0)}\right)'\left(\frac{a_2}{a_1}x\right).$$

Заметим, что после подстановки в (9) выражений для $g_3^{(0)}, g_4^{(0)}$ и их производных первого порядка функции $g_1^{(1)}, g_2^{(1)}$ имеют вид

$$g_1^{(1)}(x) = F_1^{(1)}(x) - \left(\Phi_3^{(0)}(x) + C_2\frac{a_2}{a_1}x + C_3\right) - x\left(\Phi_4^{(0)}(x) + C_0\frac{a_2}{a_1}x + C_1\right) +$$

$$+\frac{a_2}{a_1}x\left(\Phi_3^{(0)'}(x) + C_2\right) + \frac{a_2}{a_1}x^2\left(\Phi_4^{(0)'}(x) + C_0\right) = \tilde{F}_1^{(1)}(x) - xC_1 - C_3,$$

$$g_2^{(1)} = F_2^{(1)}(x) - \left(\Phi_3^{(0)'}(x) + C_2\right) - x\left(\Phi_4^{(0)'}(x) + C_0\right) = \tilde{F}_2^{(1)}(x) - xC_0 - C_2,$$

где $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \tilde{F}_1^{(1)}, \tilde{F}_2^{(1)}$ – функции, зависящие от начальных и граничных функций и и производных, C_0, C_1, C_2, C_3 определены выше при решении задачи Коши.

Далее перейдем к рассмотрению граничных условий на правой границе $x = l$. Из эти условий получается система уравнений вида

$$\begin{gathered} g_1(l+a_1t) + (l+a_2t)g_2(l+a_1t) + g_3(l+a_2t) + (l+a_1t)g_4(l+a_2t) = \nu_1(t), \\ g_2(l+a_1t) + g_4(l+a_2t) + g_1'(l+a_1t) + (l+a_2t)g_2'(l+a_1t) + \\ +g_3'(l+a_2t) + (l+a_1t)g_4'(l+a_2t) = \nu_2(t). \end{gathered} \quad (1($$

По условию $a_1 < 0$, поэтому в системе (10) возможен вариант, когда аргумент $l + a_1t \in [0,l]$ т.е. $t \in \left[t_2^{(0)}, t_2^{(1)}\right]$, где $t_2^{(0)} = 0, t_2^{(1)} = -\frac{l}{a_1}$, тогда функции g_1, g_2 определены из начальных услови как $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$, а функции g_3, g_4 подлежат определению. Обозначим их на этом шаге чер $g_3^{(1)}, g_4^{(1)}$, тогда их аргумент x принадлежит промежутку $\left[l, l - \frac{a_2}{a_1}l\right]$.

$$g_3^{(1)}(x) = \nu_1\left(\frac{x-l}{a_2}\right) + \frac{l}{a_2}\nu_1'\left(\frac{x-l}{a_2}\right) + \frac{a_1x}{a_1(a_2-a_1)}\nu_1'\left(\frac{x-l}{a_2}\right) - l\nu_2\left(\frac{x-l}{a_2}\right) - \frac{a_1x}{a_2-a_1}\nu_2\left(\frac{x-l}{a_2}\right) -$$

$$-g_1^{(0)}\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l-x)\right) + \left(l - \frac{a_1}{a_2}(l-x)\right)\left(g_1^{(0)}\right)'\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l-x)\right) - xg_2^{(0)}\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l-x)\right) +$$

$$+x\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l-x)\right)\left(g_2^{(0)}\right)'\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l-x)\right), \quad (1$$

$$g_4^{(1)}(x) = \frac{a_2}{a_2-a_1}\nu_2\left(\frac{x-l}{a_2}\right) - \frac{1}{a_2-a_1}\nu_1'\left(\frac{x-l}{a_2}\right) - \left(g_1^{(0)}\right)'\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l-x)\right) - x\left(g_2^{(0)}\right)'\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l-x)\right).$$

После подстановки в (11) выражений для $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$ и их производных первого поряд функции $g_3^{(1)}, g_4^{(1)}$ имеют вид

$$g_3^{(1)}(x) = F_3^{(1)}(x) - \left(\Phi_1^{(0)}(x) - C_1\left(l - \frac{a_1}{a_2}l + \frac{a_1}{a_2}x\right) - C_3\right) + \frac{a_2-a_1}{a_2}l\left(\Phi_1^{(0)'}(x) - C_1\right) +$$

$$+\frac{a_1}{a_2}x\left(\Phi_1^{(0)'}(x) - C_1\right) - x\left(\Phi_2^{(0)}(x) - C_0\left(l - \frac{a_1}{a_2}l + \frac{a_1}{a_2}x\right) - C_2\right) + \frac{a_2-a_1}{a_2}lx\left(\Phi_2^{(0)'}(x) - C_0\right) +$$

$$+\frac{a_1}{a_2}x^2\left(\Phi_2^{(0)'}(x) - C_0\right) = \tilde{F}_3^{(1)}(x) + xC_2 + C_3,$$

$$g_4^{(1)} = F_4^{(1)}(x) - \left(\Phi_1^{(0)'}(x) - C_1\right) - x\left(\Phi_2^{(0)'}(x) - C_0\right) = \tilde{F}_4^{(1)}(x) + xC_0 + C_1,$$

где $F_3^{(1)}, F_4^{(1)}, \tilde{F}_3^{(1)}, \tilde{F}_4^{(1)}$ – функции, зависящие от начальных и граничных функций и их произво ных, константы C_0, C_1, C_2, C_3 – из начальной задачи.

Далее делаем второй шаг и опять переходим к граничному условию на левой границе $x = ($ В этом случае $a_2t \in \left[l, l - \frac{a_2}{a_1}l\right]$, тогда $t \in \left[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}\right]$, $t_1^{(2)} = \frac{l}{a_2} - \frac{l}{a_1}$, выражение для функци $g_3^{(1)}, g_4^{(1)}$ определяются из предыдущего шага по формуле (11), а мы строим выражения д функций $g_1^{(2)}, g_2^{(2)}$, когда их аргумент $x \in \left[-l + \frac{a_1}{a_2} l, \frac{a_1}{a_2} l\right]$. Переходя к правой границе $x = l$, аргумент $l + a_1 t \in \left[\frac{a_1}{a_2} l, 0\right]$, тогда $t \in \left[t_2^{(1)}, t_2^{(2)}\right]$, $t_2^{(2)} = -\frac{l}{a_1} + \frac{l}{a_2}$, $g_3^{(2)}, g_4^{(2)}$ определяются через $g_1^{(1)}, g_2^{(1)}$ для $x \in \left[l - \frac{a_2}{a_1} l, 2l - \frac{a_2}{a_1} l\right]$ и т.д.

Таким образом, продолжая данный процесс, мы сможем определить значения функций g_1, g_2, g_3, g_4 для всех значений аргументов на всей области определения по рекуррентным формулам:

$$g_1^{(n)}(x) = \mu_1\left(\frac{x}{a_1}\right) + \frac{a_2 x}{a_2 - a_1}\mu_2\left(\frac{x}{a_1}\right) - \frac{a_2 x}{a_1(a_2 - a_1)}\mu_1'\left(\frac{x}{a_1}\right) + \frac{a_2}{a_1} x\left(g_3^{(n-1)}\right)'\left(\frac{a_2}{a_1}x\right) + \\ + \frac{a_2 x^2}{a_1}\left(g_4^{(n-1)}\right)'\left(\frac{a_2}{a_1}x\right) - g_3^{(n-1)}\left(\frac{a_2}{a_1}x\right) - x g_4^{(n-1)}\left(\frac{a_2}{a_1}x\right) = \tilde{F}_1^{(n)} - xC_1 - C_3, \tag{12}$$

$$g_2^{(n)}(x) = \frac{a_1}{a_2 - a_1}\mu_2\left(\frac{x}{a_1}\right) - \frac{1}{a_2 - a_1}\mu_1'\left(\frac{x}{a_1}\right) - \left(g_3^{(n-1)}\right)'\left(\frac{a_2}{a_1}x\right) - x\left(g_4^{(n-1)}\right)'\left(\frac{a_2}{a_1}x\right) = \tilde{F}_2^{(n)} - xC_0 - C_2, \tag{13}$$

когда $x \in \left[\left[\frac{n+1}{2}\right]\frac{a_1}{a_2} l - \left[\frac{n}{2}\right] l, l - \left[\frac{n+1}{2}\right] l + \left[\frac{n}{2}\right]\frac{a_1}{a_2} l\right]$,

$$g_4^{(n)}(x) = \frac{a_2}{a_2 - a_1}\nu_2\left(\frac{x - l}{a_2}\right) - \frac{1}{a_2 - a_1}\nu_1'\left(\frac{x - l}{a_2}\right) - \left(g_1^{(n-1)}\right)'\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l - x)\right) - \\ - x\left(g_2^{(n-1)}\right)'\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l - x)\right) = \tilde{F}_4^{(n)} + xC_0 + C_1, \tag{14}$$

$$g_3^{(n)}(x) = \nu_1\left(\frac{x - l}{a_2}\right) + \frac{l}{a_2}\nu_1'\left(\frac{x - l}{a_2}\right) + \frac{a_1 x}{a_1(a_2 - a_1)}\nu_1'\left(\frac{x - l}{a_2}\right) - l\nu_2\left(\frac{x - l}{a_2}\right) - \frac{a_1 x}{a_1(a_2 - a_1)}\nu_2\left(\frac{x - l}{a_2}\right) - \\ - g_1^{(n-1)}\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l - x)\right) + \left(l - \frac{a_1}{a_2}(l - x)\right)\left(g_1^{(n-1)}\right)'\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l - x)\right) - x g_2^{(n-1)}\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l - x)\right) + \\ + x\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l - x)\right)\left(g_2^{(n-1)}\right)'\left(l - \frac{a_1}{a_2}(l - x)\right) = \tilde{F}_3^{(n)} + xC_0 + C_1, \tag{15}$$

$x \in \left[\left[\frac{n+1}{2}\right] l - \left[\frac{n}{2}\right]\frac{a_2}{a_1} l, l + \left[\frac{n}{2}\right] l - \left[\frac{n+1}{2}\right]\frac{a_2}{a_1} l\right]$, $n = 1, 2, \ldots$, через $[\cdot]$ обозначена целая часть.

Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Значения* $g_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$ *определяются на отрезках* $t \in \left[t_i^{(n)}, t_i^{(n+1)}\right]$, $i = 1, 2, n = 0, 1, \ldots$ *поочередно, где*

$$t_1^{(0)} = t_2^{(0)} = 0,\ t_1^{(n)} = (n-1)\frac{l}{a_2} - \frac{l}{a_1},\ t_2^{(n)} = \frac{l}{a_2} - (n-1)\frac{l}{a_1},\ n = 1, 2, \ldots,\ \text{и}$$

$$g_i(x) = \begin{cases} g_i^{(0)}, x \in [0, l], \\ g_i^{(n)}, x \in \left[\left[\frac{n+1}{2}\right]\frac{a_1}{a_2} l - \left[\frac{n}{2}\right] l, l - \left[\frac{n+1}{2}\right] l + \left[\frac{n}{2}\right]\frac{a_1}{a_2} l\right] \end{cases}, i = 1, 2,\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$g_i(x) = \begin{cases} g_i^{(0)}, x \in [0, l], \\ g_i^{(n)}, x \in \left[\left[\frac{n+1}{2}\right] l - \left[\frac{n}{2}\right]\frac{a_2}{a_1} l, l + \left[\frac{n}{2}\right] l - \left[\frac{n+1}{2}\right]\frac{a_2}{a_1} l\right] \end{cases}, i = 3, 4,\ n = 1, 2, \ldots,$$

а функции $g_i^{(n)}, i = 1, 2, 3, 4, n = 1, 2\ldots$, *определяются формулами (12)–(15).*

Введем обозначения соответствующих значений аргументов $x_1^{(n)}$ и $x_2^{(n)}$, кото определяются соответствующим образом:

$$x_1^{(0)}=l, x_1^{(1)}=0, x_1^{(2)}=\frac{a_1}{a_2}l,\ \ldots, x_1^{(n)}=l-\left[\frac{n+1}{2}\right]l+\left[\frac{n}{2}\right]\frac{a_1}{a_2}l,\ldots;$$

$$x_2^{(0)}=0,\ x_2^{(1)}=l, x_2^{(2)}=l-\frac{a_2}{a_1}l,\cdots, x_2^{(n)}=\left[\frac{n+1}{2}\right]l-\left[\frac{n}{2}\right]\frac{a_2}{a_1}l,\ldots, n=1,2,\ldots.$$

4. Вывод условий согласования. Решение задачи (2)–(4) определяется формулой При этом функции g_1, g_2 определены на полупрямой $(-\infty,l]$, принадлежат классу $C^{(4)}(-\alpha$ а функции g_3, g_4 определены на полупрямой $[0,\infty)$, принадлежат классу $C^{(4)}[0,\infty)$ и так что решение (5) удовлетворяет начальным (2) и граничным (3) условиям. Мы опреде функции $g_i, i=1,2,3,4,$ на соответствующих отрезках. При достаточной гладкости началь $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ и граничных данных μ_1,μ_2,ν_1,ν_2, которые будут уточнены ниже, функ $g_i^{(n)}\in C^{(4)}\left[x_1^{(n+1)},x_1^{(n)}\right], n=0,1,2,\ldots,i=1,2,$ и $g_i^{(n)}\in C^{(4)}\left[x_2^{(n)},x_2^{(n+1)}\right], n=0,1,2,\ldots,i=3,4.$ Потреб чтобы были выполнены условия непрерывности этих функций и их производных до четвер порядка включительно в точках склеивания функций.

Остановимся на рассмотрении условий согласования для функций $g_1(x), g_2(x)$ в т $x_1^{(1)}=0$. Сначала рассмотрим равенство $g_1^{(0)}(0)=g_1^{(1)}(0)$:

$$g_1^{(0)}(0)=-C_3+\frac{(3a_1-a_2)a_2^2}{(a_1-a_2)^3}\varphi_0(0),\quad g_1^{(1)}(0)=-C_3+\mu_1(0)-\frac{(a_1-3a_2)a_1^2}{(a_1-a_2)^3}\varphi_0(0).$$

Откуда следует, что

$$\mu_1(0)=\varphi_0(0).$$

Аналогично для $g_2(x)$ рассматриваем равенство $g_2^{(0)}(0)=g_2^{(1)}(0)$:

$$g_2^{(0)}(0)=-C_2+\frac{-a_2(2a_1+a_2)\varphi_1(0)+a_1a_2^2\varphi_1'(0)}{(a_1-a_2)^3},\quad g_2^{(1)}(0)=\frac{1}{(a_1-a_2)^3}\Big(a_1(a_1-a_2)^2\mu_2(0)-$$

$$-(a_1-a_2)^2\mu_1'(0)+a_1(a_1-4a_2)\varphi_1(0)-a_1^2(a_1-2a_2)\varphi_0'(0)\Big)-C_2.$$

Проводя расчеты, получим равенство

$$\varphi_1(0)-\mu_1'(0)+a_1\big(\mu_2(0)-\varphi_0'(0)\big)=0. \qquad ($$

Непрерывность первой производной для функции $g_1(x)$ $\left(g_1^{(0)}\right)'(0)=\left(g_1^{(1)}\right)'(0)$ приво к соотношению

$$\varphi_1(0)-\mu_1'(0)+a_2\big(\mu_2(0)-\varphi_0'(0)\big)=0. \qquad ($$

В свою очередь, из непрерывности первой производной для $g_2(x)$ имеем

$$\varphi_2(0)-\mu_1''(0)+a_1\big(\mu_2'(0)-\varphi_1'(0)\big)=0. \qquad ($$

Далее, рассматриваем непрерывность вторых производных, $\left(g_1^{(0)}\right)''(0)=\left(g_1^{(1)}\right)''($ $\left(g_2^{(0)}\right)''(0)=\left(g_2^{(1)}\right)''(0)$:

$$-2a_1a_2\mu_2'(0)+(a_1+a_2)\mu_1''(0)-(a_1+a_2)\varphi_2(0)+2a_1a_2\varphi_1'(0)=0, \qquad ($$

$$\varphi_3(0)+a_1\left(\mu_2''(0)-\varphi_2'(0)\right)-\mu_1^{(3)}(0)=0. \qquad ($$

Непрерывность третьей производной $\left(g_1^{(0)}\right)^{(3)}(0)=\left(g_1^{(1)}\right)^{(3)}(0), \left(g_2^{(0)}\right)^{(3)}(0)=\left(g_2^{(1)}\right)^{(3)}(0)$ по упрощения дает

$$-a_1\mu_2^{(3)}(0)+\mu_1^{(4)}(0)-(a_1+2a_2)\varphi_3'(0)+(a_1^2+4a_1a_2+a_2^2)\varphi_2''(0)-2a_1a_2(a_1+a_2)\varphi_1^{(3)}(0)=0. \qquad ($$

Соответственно, непрерывность четвертой производной $\left(g_1^{(0)}\right)^{(4)}(0)=\left(g_1^{(1)}\right)^{(4)}(0), \left(g_2^{(0)}\right)^{(4)}(0)$ $=\left(g_2^{(1)}\right)^{(4)}(0)$ приводит к равенству

$$\left(a_1^2+2a_1a_2+3a_2^2\right)\varphi_3''(0)-\left(a_1^3+4a_1^2a_2+7a_1a_2^2+2a_2^3\right)\varphi_2^{(3)}(0)+a_1\mu_2^{(4)}(0)+$$

$$+a_1a_2\left(2a_1^2+5a_1a_2+4a_2^2\right)\varphi_1^{(4)}-\mu_1^{(5)}(0)=0. \qquad (2$$

Производя соответствующие упрощения выражений (16)–(23), приходим к соотношениям вида

$$\left.\frac{d^j\mu_1(t)}{dt^j}\right|_{t=0}=\varphi_j(0),\quad \left.\frac{d^j\mu_2(t)}{dt^j}\right|_{t=0}=\varphi_j'(0),\quad j=0,1,2,3,$$

$$\begin{gathered}\mu_1^{(4)}(0)=2(a_1+a_2)\varphi_3'(0)-(a_1^2+4a_1a_2+a_2^2)\varphi_2''(0)+2a_1a_2(a_1+a_2)\varphi_1^{(3)}(0)-a_1^2a_2^2\varphi_0^{(4)}(0),\\ \mu_2^{(4)}(0)=-\frac{(a_1^2+2a_1a_2+3a_2^2)\varphi_3''(0)}{a_1}+\frac{(a_1^3+4a_1^2a_2+7a_1a_2^2+2a_2^3)\varphi_2^{(3)}(0)}{a_1}-\\ -a_2(2a_1^2+5a_1a_2+4a_2^2)\varphi_1^{(4)}(0)+\frac{\mu_1^{(5)}(0)}{a_1}+a_1a_2^2(a_1+2a_2)\varphi_0^{(5)}(0).\end{gathered}\tag{24}$$

Теперь по такой же схеме рассмотрим условия на функции $g_3(x), g_4(x)$ в точке $x_2^{(1)}=l$. В силу идентичности расчетов подробно на них останавливаться не будем. Заметим, что в этом случае они имеют вид

$$\left.\frac{d^j\nu_1(t)}{dt^j}\right|_{t=0}=\varphi_j(l),\quad \left.\frac{d^j\nu_2(t)}{dt^j}\right|_{t=0}=\varphi_j'(l),\quad j=0,1,2,3,$$

$$\begin{gathered}\nu_1^{(4)}(0)=2(a_1+a_2)\varphi_3'(l)-(a_1^2+4a_1a_2+a_2^2)\varphi_2''(l)+2a_1a_2(a_1+a_2)\varphi_1^{(3)}(l)-a_1^2a_2^2\varphi_0^{(4)}(l),\\ \nu_2^{(4)}(0)=-\frac{(3a_1^2+2a_1a_2+a_2^2)\varphi_3''(l)}{a_1}+\frac{(2a_1^3+7a_1^2a_2+4a_1a_2^2+a_2^3)\varphi_2^{(3)}(l)}{a_1}-\\ -a_1(4a_1^2+5a_1a_2+2a_2^2)\varphi_1^{(4)}(l)+\frac{\nu_1^{(5)}(0)}{a_2}+a_1^2a_2(2a_1+a_2)\varphi_0^{(5)}(l).\end{gathered}\tag{25}$$

Рассмотрим теперь условия согласования на произвольном шаге n. Потребуем, чтобы выполнялось равенство функций $g_i^{(n+1)}\left(x_1^{(n+1)}\right)=g_i^{(n)}\left(x_1^{(n+1)}\right)$, $i=1,2$, $g_j^{(n+1)}\left(x_2^{(n+1)}\right)=$ $=g_j^{(n)}\left(x_2^{(n+1)}\right)$, $j=1,2$, и их производных до четвертого порядка включительно при других значениях n. Сначала рассмотрим равенство для функций $g_1^{(n+1)}, g_1^{(n)}$ в точках $x_1^{(n+1)}$, при этом учтем, что $\frac{a_2}{a_1}x_1^{(n+1)}=x_2^{(n)}$. Итак,

$$\begin{gathered}-g_3^{(n)}\left(x_2^{(n)}\right)-x_1^{(n+1)}g_4^{(n)}\left(x_2^{(n)}\right)+x_2^{(n)}\left(g_3^{(n)}\right)'\left(x_2^{(n)}\right)+x_1^{(n+1)}x_2^{(n)}\left(g_4^{(n)}\right)'\left(x_2^{(n)}\right)=\\ =-g_3^{(n-1)}\left(x_2^{(n)}\right)-x_1^{(n+1)}g_4^{(n-1)}\left(x_2^{(n)}\right)+x_2^{(n)}\left(g_3^{(n-1)}\right)'\left(x_2^{(n)}\right)+x_1^{(n+1)}x_2^{(n)}\left(g_4^{(n-1)}\right)'\left(x_2^{(n)}\right).\end{gathered}\tag{26}$$

Далее для функции g_2

$$\left(g_3^{(n)}\right)'\left(x_2^{(n)}\right)+x_1^{(n+1)}\left(g_4^{(n)}\right)'\left(x_2^{(n)}\right)=\left(g_3^{(n-1)}\right)'\left(x_2^{(n)}\right)+x_1^{(n+1)}\left(g_4^{(n-1)}\right)'\left(x_2^{(n)}\right).\tag{27}$$

Теперь приравняем функции $g_3^{(n+1)}\left(x_2^{(n+1)}\right)=g_3^{(n)}\left(x_2^{(n+1)}\right)$, учтем, что $l-\frac{a_1}{a_2}l+\frac{a_1}{a_2}x_2^{(n+1)}=x_1^{(n)}$.

$$\begin{gathered}-g_1^{(n)}\left(x_1^{(n)}\right)+x_1^{(n)}\left(g_1^{(n)}\right)'\left(x_1^{(n)}\right)-x_2^{(n+1)}g_2^{(n)}\left(x_1^{(n)}\right)+x_2^{(n+1)}x_1^{(n)}\left(g_2^{(n)}\right)'\left(x_1^{(n)}\right)=\\ -g_1^{(n-1)}\left(x_1^{(n)}\right)+x_1^{(n)}\left(g_1^{(n-1)}\right)'\left(x_1^{(n)}\right)-x_2^{(n+1)}g_2^{(n-1)}\left(x_1^{(n)}\right)+x_2^{(n+1)}x_1^{(n)}\left(g_2^{(n-1)}\right)'\left(x_1^{(n)}\right).\end{gathered}\tag{28}$$

Аналогично для g_4

$$\left(g_1^{(n)}\right)'\left(x_1^{(n)}\right)+x_2^{(n+1)}\left(g_2^{(n)}\right)'\left(x_1^{(n)}\right)=\left(g_1^{(n-1)}\right)'\left(x_1^{(n)}\right)+x_2^{(n+1)}\left(g_2^{(n-1)}\right)'\left(x_1^{(n)}\right).\tag{30}$$

По этой же схеме приравниваются и производные до четвертого порядка включительно. Формулы (26)–(30) показывают, что для выполнения условий согласования на следующем шаге необходимо, чтобы они выполнялись на предыдущем. Поэтому достаточно проверить условия согласования вида $\left(g_i^{(1)}\right)^{(k)}\left(x_1^{(1)}\right)=\left(g_i^{(0)}\right)^{(k)}\left(x_1^{(1)}\right)$ и $\left(g_j^{(1)}\right)^{(k)}\left(x_2^{(1)}\right)=\left(g_j^{(0)}\right)^{(k)}\left(x_2^{(1)}\right)$, $i=1,2$; $j=3,4; k=0,1,2,3,4$. Такие проверки проведены выше. В результате справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что функции* $\varphi_0 \in C^{(5)}[0,l]$, $\varphi_1 \in C^{(4)}[0,l]$, $\varphi_2 \in C^{(3)}[0,$ $\varphi_3 \in C^{(2)}[0,l]$, $\mu_1, \nu_1 \in C^{(5)}[0,\infty)$, $\mu_2, \nu_2 \in C^{(4)}[0,\infty)$, *выполняются для них услов согласования(24)–(25). Тогда в классе функций* $C^{(4)}(\overline{Q})$ *существует единственное решен задачи (2)–(4).*

В работе [1] рассмотрены условия согласования для строго гиперболического уравнен когда уравнение имеет четыре различные характеристики. Следует отметить, что услов гладкости на начальные данные там на порядок ниже, чем полученные здесь. Аналогичн закономерность была замечена и при решении смешанных задач для гиперболическо уравнения второго порядка [6–8]. Таким образом, наличие кратных характеристик у уравнен гиперболического типа повышает требования на гладкость входных данных.

5. Решение граничной задачи для случая, когда $b_1 \neq b_2 \neq 0$. Общее решение урав ния (1) имеет вид [3]

$$u(t,x) = e^{-b_1 t} g_1(x+a_1 t) + t e^{-b_1 t} g_2(x+a_1 t) + e^{-b_2 t} g_3(x+a_2 t) + t e^{-b_2 t} g_4(x+a_2 t). \quad ($$

Теперь, после проведения расчетов по вышеизложенной методике, решаются началь и граничная задачи. Затем выводятся условия согласования начальных и граничн функций. В данной статье не приводятся явные формулы для функций $g_i, i = 1,2,3$ на всей области определения в силу их громоздкости. Однако следует заметить, что ес в полученных условиях согласования положить $b_1 = b_2 = 0$, то они в точности совпада с условиями (24)–(25).

При рассмотрении задачи (1)–(3), когда (1) является неоднородным, можно воспользоват схемой метода Дюамеля [9].

Заключение. Таким образом, в работе построено классическое решение поставлен задачи и выведены условия гладкости входных функций. Если сравнить результаты ра [1; 2], в которых рассмотрено классическое решение аналогичной смешанной зада для биволнового уравнения, то можно заметить, что в данном случае, во-первых, краевые усло задаются не на всей границе, а во-вторых, повышается порядок гладкости входных функц Это говорит о важности того факта, что уравнение является не строго гиперболическ т.е. имеет кратные характеристики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корзюк, В. И.* Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характерист В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, Ле Тхи Тху // Труды ИМ НАН Беларуси. – 2010. – Т. 18, № 2. – С. 36–54.

2. *Корзюк, В. И.* Решение первой смешанной задачи для нестрого биволнового уравнен В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, Ле Тхи Тху // Доклады НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 4. – С. 5–13.

3. *Корзюк, В. И.* Метод энергетических неравенств и операторов осреднения / В. И. Корзюк // Вест БГУ. Серия 1. Физика. математика. Информатика. – 1996. – № 3. – С. 55–71.

4. *Корзюк, В. И.* Решение задачи Коши для гиперболического уравнения для однородн дифференциального оператора в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловск Доклады НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 9–13.

5. *Корзюк, В. И.* Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянны коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Диффер уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

6. *Корзюк, В. И.* Классическое решение первой граничной задачи в полуполосе для линейн гиперболического уравнения второго порядка / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, А. А. Карпечина // Труды НАНБ. – 2012. – Т. 20, № 1. – С. 64–67.

7. *Корзюк, В. И.* Гиперболическое уравнение второго порядка в случае двух независимых переменн В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, А. А. Карпечина // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных наву 2013. – № 1. – С. 71–78.

8. *Корзюк, В. И.* Граничная задача с условиями Неймана для нестрого гиперболического уравне второго порядка / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информати 2014. – № 2. – С. 71–76.

9. *Корзюк, В. И.* Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск : БГУ, 2011. – 459

Поступила в редакцию 02.03

"Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2.
Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control"
Vol. 7, No. 3, 2017, pp. 33–41

Classical solution of the mixed problem for linear hyperbolic fourth-order equation with multiple characteristics

E. S. Cheb

Belarusian State University (Belarus)
Nezavisimosti Ave., 4, 220030, Minsk, Belarus; e-mail: cheb@bsu.by

Abstract. In the introduction the object of research is identified – mixed problem for the fourth-order partial differential equations with constant coefficients of hyperbolic type with multiple characteristics. The aim of the study is to construct a classical solution of the mixed problem correctly posed by Hadamard and to prove the theorem of the existence and uniqueness. In the main part it is constructed the classical solution of the Cauchy problem and of the boundary value problem for not strictly hyperbolic homogeneous equation of the fourth order with constant coefficients and the multiple characteristics. The method of characteristics is used to solve this problem. According to this method, general solution of the equation contains the sum of four functions, which are found from initial and boundary conditions and depend on the arguments $x + a_1t$ and $x + a_2t$. The solution is constructed for the cases of presence or absence of derivatives of lower order. The conditions for matching the initial and boundary data with allowance for the smoothness of the given functions are obtained, which follow from the requirement of four times the continuous differentiability of the solution. It is noted that in the case of a strictly hyperbolic equation, the requirements on the smoothness of the initial data are lower. The theorem on the existence of a unique classical solution is proved. The obtained results can be used in the theory of differential equations with partial derivatives and in the computational mathematics.

Keywords: differential equation with partial derivatives of hyperbolic type of fourth order, initial value problem, boundary value problem, classical solution, method of characteristics, matching conditions.

References

1. Korziuk V. I., Cheb E. S., Le Thi Thu. Solution of the mixed problem for the biwave equation by the method of characteristics [*Reshenie smeshannoi zadachi dlia bivolnovogo uravneniia metodom kharakteristik*]. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 18, No. 2, pp. 36-54.

2. Korziuk V. I., Cheb E. S., Le Thi Thu. Solution of the first mixed problem for the not strong biwave equation [*Reshenie pervoi smeshannoi zadachi dlia nestrogo bivolnovogo uravneniia*]. *Reports of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2011, vol. 55, No. 4, pp. 5-13.

3. Korziuk V. I. Method of energy inequations and mollifies [*Metod energeticheskikh neravenstv i operatorov osredneniia*]. *Vestnik BSU. Series 1. Physics. Mathematics. Informatics*, 1996, No. 3, pp. 55-71.

4. Korziuk V. I., Kozlovskaya I. S. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation for a homogeneous differential operator in the case of two independent [*Reshenie zadachi Koshi dlia giperbolicheskogo uravneniia dlia odnorodnogo differentsial'nogo operatora v sluchae dvukh nezavisimykh peremennykh*]. *Reports of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2011, vol. 55, No. 5, pp. 9-13.

5. Korziuk V. I., Kozlovskaya I. S. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent [*Reshenie zadachi Koshi dlia giperbolicheskogo uravneniia s postoiannymi koeffitsientami v sluchae dvukh nezavisimykh peremennykh*]. *Differential equation*, 2012, vol. 48, No. 5, pp. 700-709.

6. Korziuk V. I., Cheb E. S., Karpechina A. A. Classical solution **of** the first boundary problem in half-fringe for linear hyperbolic equation of the second order [*Klassicheskoe reshenie pervoi granichnoi zadachi v polupolose dlia lineinogo giperbolicheskogo uravneniia vtorogo poriadka*]. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2012, vol. 20, No. 1, pp. 64-67.

7. Korziuk V. I., Cheb E. S., Karpechina A. A. Hyperbolic equation of the second order in the case of two independent variables [*Giperbolicheskoe uravnenie vtorogo poriadka v sluchae dvukh nezavisimykh peremennykh*]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2013, No. 1, pp. 71-78.

8. Korziuk V. I., Cheb E. S. Boundary problem with a Neumann conditions for not strong hyperbolic equation of the second order [*Granichnaia zadacha Neimana dlia nestrogo giperbolicheskogo uravneniia vtorogo poriadka*]. *Vestnik BSU. Series 1. Physics. Mathematics. Informatics*, 2014, No. 2, pp. 71-76.

9. Korziuk V. I. Equations of mathematical physic [*Uravneniia matematicheskoi fiziki*]. Minsk, 2011, 459 p.