

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОДНОГО ВИДА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С ДВУКРАТНЫМИ УЗЛАМИ

Игнатенко М. В., Янович Л. А.

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: yanovich@im.bas-net.by;
БГУ, Минск, Беларусь, e-mail: ignatenkomv@bsu.by*

Пусть на множестве функций $X = C[a, b]$ или $X = L_2[a, b]$ определен функционал $F: X \rightarrow R$, с известными значениями $F(x_v)$ и значениями первых вариационных производных $\frac{\delta F(x_v)}{\delta x(t)}$ в узлах $\{x_v(t)\}_{v=0}^n \in X$. Предполагаем, что узлы интерполирования $x_i(t) \neq x_j(t)$ при $i \neq j$ для любых $t \in [a, b]$.

Обозначим фундаментальные многочлены относительно произвольной чебышевской системы функций в интерполяционной формуле Эрмита с двукратными узлами $h_{n,k}(x)$ и $q_{n,k}(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$); $G_{n,k}(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b [h_{n,k}(x(t)) - h_{n-1,k}(x(t))] dt$, $Q_{n,k}(x) = q_{n,k}(x) - q_{n-1,k}(x)$, где $k = 0, 1, \dots, n+1$; $h_{n,n+1}(x) = q_{n,n+1}(x) \equiv 0$. Функционал

$$H_{2n+1}(F; x) = H_{2n-1}(F; x) + \sum_{v=0}^n \left\{ F(x_v) G_{n,v}(x) + \int_a^b \frac{\delta F(x_v)}{\delta x(t)} Q_{n,v}(x(t)) dt \right\}, \quad (1)$$

является для $F(x)$ интерполяционным многочленом в форме Ньютона относительно двукратных узлов: $H_{2n+1}(F; x_v) = F(x_v)$; $\frac{\delta H_{2n+1}(x_v)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_v)}{\delta x(t)}$, $v = 0, 1, \dots, n$.

Теорема. Пусть для функционала $F(x)$ в точке $x \in X$ справедливы неравенства:

$$\|F(x)\|_X \leq M_1, \quad \left\| \frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} \right\|_X \leq M_2 \quad (0 \leq M_1, M_2 < \infty). \text{ Тогда для нормы погрешности}$$

$r_{2n+1}(x) = F(x) - H_{2n+1}(F; x)$, где $H_{2n+1}(F; x)$ – интерполяционный полином вида (1), имеет место оценка

$$\|r_{2n+1}(x)\|_X \leq M \left\{ \|h_{n,n}(x)\|_X + \|q_{n,n}(x)\|_X \right\}, \quad M = M(M_1, M_1, h_{n,k}, q_{n,k}), \quad k = 0, 1, \dots, n+1.$$

Приближенные интерполяционные формулы вида (1), могут найти применение для построения алгоритмов приближения функционалов, заданных на пространствах дифференцируемых функций, при решении отдельных задач, содержащих вариационные производные и дифференциалы Гато. Достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографии [1].

Литература

1. Makarov V.L., Khlobystov V.V., Yanovich L.A. *Methods of Operator Interpolation*, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, **83** (2010).