

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе

А.Л. Толстик

29.04.2015

Регистрационный № УД- 1591 / уч.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)

2015 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования ОСВО 1-31 03 03-2013 и учебного плана G31-173/уч., 30.05.2013.

Составители:

А. Д. Егоров, профессор кафедры математического моделирования и анализа данных Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

Рекомендована к утверждению:

Кафедрой математического моделирования и анализа данных Белорусского государственного университета (протокол № 19 от 07 апреля 2015 г.);

Учебно-методической комиссией факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета (протокол № 6 от 12 мая 2015 г.).



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Стохастический анализ – это раздел математики, в котором случайные функции и их обобщения изучают методами математического анализа. Термин «стохастический анализ» часто употребляют для наименования лишь основ стохастического анализа, объединяющий теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисление и их непосредственные приложения. Методы стохастического анализа данных активно применяются в экономике, финансовом анализе, теории и практике управления, социологии, медицине и т.д.

Учебная дисциплина «Стохастический анализ и его применения» знакомит студентов с классическими и современными методами решения задач статистического анализа данных.

Целью дисциплины «Стохастический анализ и его применения» является:

- расширение фундаментального математического образования;
- изучение методов стохастического анализа гауссовских случайных процессов;
- изучение базовых элементов стохастического анализа.

Задачами дисциплины «Стохастический анализ и его применения» являются:

- систематическое изучение теоретических основ стохастического анализа;
- приобретение практических навыков для правильного использования арсенала методов стохастического анализа в конкретных ситуациях.

В первом разделе дисциплины «Стохастический анализ и его применение» приводятся сведения о линейных функционалах от случайных процессов. Приводятся формулы смешанных моментов линейных функционалов, метод диаграмм. Вычисляются плотности распределений векторов измеримых линейных функционалов.

Во втором разделе изучаются хаотические разложения первого порядка. Рассматривается построение пространства Камерона-Мартина и связь с воспроизводящим пространством гауссовского процесса. Приводятся примеры пространств Камерона-Мартина для конкретных гауссовских процессов.

Третий раздел представляет собой введение в анализ функционалов от гауссовских процессов. Вычисляются стохастические производные функционалов от гауссовских процессов. Приводятся примеры хаотического разложения функционалов от гауссовских процессов. Рассматриваются некоторые задачи математического анализа и дифференциальных уравнений, решаемые с применением методов стохастического анализа.

Учебная дисциплина «Стохастический анализ и его применение» относится к циклу дисциплин вузовского компонента и взаимосвязана с учебной

дисциплиной «Теория вероятностей и математическая статистика». Методы, излагаемые в дисциплине «Стохастический анализ и его применение», могут быть использованы при изучении ряда других дисциплин по специальности «Прикладная математика».

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- методы вычисления вероятностных характеристик линейных непрерывных функционалов от гауссовских процессов;
- элементы теории воспроизводящих гильбертовых пространств гауссовских процессов и измеримых линейных функционалов;
- вывод формул замены переменных в математических ожиданиях функционалов от процесса при преобразовании сдвига;
- элементы теории пространств Камерона-Мартина и обобщенных разложений Карунена-Лоэва;
- стохастические производные, методы построения хаотических разложений;

уметь:

- вычислять математические ожидания функций от линейных функционалов для произвольных гауссовских процессов;
- применять формулу замены переменных при сдвиге при вычислении математических ожиданий от гауссовских процессов;
- применять положения теории воспроизводящих гильбертовых пространств в случае винеровского процесса;
- находить хаотические разложения для простейших классов функционалов;

владеть:

- основными методами анализа функционалов от гауссовских процессов;
- методами решения задач стохастического анализа винеровского процесса.

В соответствии с образовательным стандартом специальности 1-31 03 03 «Прикладная математика» (по направлениям) учебная программа предусматривает для изучения дисциплины всего 84 часа, из них 34 аудиторных часа, в том числе лекций – 34 часа (3 курс, 5 семестр).

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел I. Линейные функционалы от случайных процессов

Тема 1.1. Задание случайных процессов характеристическими функционалами. Задание случайных процессов характеристическими функционалами. Вычисление х.ф. гауссовских случайных процессов.

Тема 1.2. Вероятностные характеристики непрерывных функционалов гауссовских случайных процессов. Нахождение вероятностных характеристик линейных непрерывных функционалов от гауссовских случайных процессов.

Тема 1.3. Числовые характеристики непрерывных функционалов гауссовских случайных процессов. Вычисление ожиданий функций от линейных непрерывных функционалов. Примеры.

Тема 1.4. Воспроизводящее гильбертово пространство гауссовского процесса. Построение воспроизводящего гильбертова пространства гауссовского процесса.

Тема 1.5. Плотности распределения векторов измеримых линейных функционалов от процесса. Вычисление плотностей распределений векторов измеримых линейных функционалов от процесса.

Раздел II. Хаотические разложения первого порядка.

Тема 2.1. Пространство Камерона-Мартина. Построение пространства Камерона-Мартина.

Тема 2.2. Воспроизводящее пространство гауссовского процесса. Связь с воспроизводящим пространством гауссовского процесса. Примеры пространств Камерона-Мартина для конкретных гауссовских процессов.

Тема 2.3. Разложение по ортонормированным базисам. Построение разложения по ортонормированным базисам пространства Камерона-Мартина. Свойства сходимости.

Тема 2.4. Сходимость. Свойства сходимости.

Тема 2.5. Математические ожидания функционалов от гауссовских процессов. Вычисление математических ожиданий функционалов от гауссовских процессов с использованием формулы сдвига (формулы замены переменной).

Раздел III. Введение в анализ функционалов от гауссовских процессов

Тема 3.1. Функциональные многочлены Эрмита. Функциональные многочлены Эрмита как ортогональные полиномы от процесса.

Тема 3.2. Интегрирование по частям при вычислении математических ожиданий. Формула интегрирования по частям при вычислении математических ожиданий.

Тема 3.3. Квадратично интегрируемые случайные функционалы по гауссовским хаосам. Построение и свойства разложений квадратично интегрируемых случайных функционалов по гауссовским хаосам.

Тема 3.4. Хаотическое разложение функционалов от гауссовских процессов. Примеры хаотического разложения функционалов от гауссовских процессов.

Тема 3.5. Задачи анализа и дифференциальных уравнений, решаемых с применением методов стохастического анализа. Обзор задач анализа и дифференциальных уравнений, решаемых с применением методов стохастического анализа.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

№п/п	Название раздела, темы	Количество часов				Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Аудиторные					
		Лекции	Практ. и сем. занятия	Лаб. занятия	Иное		
1	Линейные функционалы от случайных процессов	10					
1.1	Задание случайных процессов характеристическими функционалами	2					
1.2	Вероятностные характеристики непрерывных функционалов гауссовских случайных процессов	2					
1.3	Числовые характеристики непрерывных функционалов гауссовских случайных процессов	2					
1.4	Воспроизводящее гильбертово пространство гауссовского процесса	2					
1.5	Плотности распределения векторов измеримых линейных функционалов от процесса	2					
2	Хаотические разложения первого порядка	12					
2.1	Пространство Камерона-Мартина	2					
2.2	Воспроизводящее пространство гауссовского процесса	2					
2.3	Разложение по ортонормированным базисам	2					
2.4	Сходимость	2					
2.5	Математические ожидания функционалов от гауссовских процессов	4					Коллоквиум
3	Введение в анализ функционалов от гауссовских процессов	6					
3.1	Функциональные мно-	2					

	гочлены Эрмита						
3.2	Интегрирование по частям при вычислении математических ожиданий	2					
3.3	Квадратично интегрируемые случайные функционалы по гауссовским хаосам	2					
3.4	Хаотическое разложение функционалов от гауссовских процессов.	2					
3.5	Задачи анализа и дифференциальных уравнений, решаемых с применением методов стохастического анализа	4					Итоговый тест
ИТОГО		34					

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рекомендуемая литература

Основная

1. Богачев В.И. Гауссовы меры. М.: Физматлит, 1997. – 352 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М: Наука. 1971. – 664 с.
3. Егоров А.Д., Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. М.: Физматлит, 2006. – 400 с.

Дополнительная

1. Розанов Ю.А. Гауссовские бесконечномерные распределения (Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова, т. CVIII). М.: Наука, 1968. –134 с.
2. *Каллианпур Г.* Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 2007. – 318 с.
3. Nualart D. The Malliavin calculus and Related Topics. Springer-Verlag. 1995. – 264 p.
4. Hida T., Kuo H.-H., Potthoff J. and Strait L. White Noise. An infinite Dimensional
5. Calculus. Dordrecht: Kluwer Acad.Publ., 1993. – 507 p.

Рекомендации по контролю качества усвоения знаний и проведению аттестации

На лекционных занятиях по учебной дисциплине «Стохастический анализ и его применения» рекомендуется использовать элементы проблемного обучения: проблемное изложение некоторых аспектов, использование частично-поискового метода.

Для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным и конечным требованиям образовательной программы создаются фонды оценочных средств, включающие типовые задания, контрольные работы и тесты. Оценочными средствами предусматривается оценка способности обучающихся к творческой деятельности, их готовность вести поиск решения новых задач, связанных с недостаточностью конкретных специальных знаний и отсутствием общепринятых алгоритмов.

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

- устная форма: собеседование, устный промежуточный зачет, итоговый зачет, устный коллоквиум;
- письменная форма: тест, письменный коллоквиум.

Контрольные мероприятия проводятся в соответствии с учебно-методической картой дисциплины. В случае неявки на контрольное мероприятие по уважительной причине студент вправе по согласованию с преподавателем выполнить его в дополнительное время. Для студентов, получивших неудовлетворительные оценки за контрольные мероприятия, либо не явившихся по неуважительной причине, по согласованию с преподавателем и с разрешения заведующего кафедрой мероприятие может быть проведено повторно.

Оценка текущей успеваемости рассчитывается как среднее оценок за каждую из письменных контрольных работ, оценки за отчеты по домашним практическим упражнениям и оценки за итоговый тест.

Итоговая аттестация предусматривает проведение зачета. При этом рекомендуется использовать оценивание успеваемости на основе модульно-рейтинговой системы.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Теория вероятностей и математическая статистика	Кафедра математического моделирования и анализа данных	нет	Оставить содержание учебной дисциплины без изменения, протокол № 19 от 07 апреля 2015 г.

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ

на ____/____ учебный год

№№ Пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры дискретной математики и алгоритмики (протокол № ____ от _____ 201_ г.)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, звание)

(подпись)

(И.О. Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

(ученая степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)