

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.И. Чуприс

«14»

2018 г.

Регистрационный № УД-3576уч.

Групповой анализ дифференциальных уравнений и разностные схемы

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности**

1-31 03 03

Прикладная математика (по направлениям)

направление специальности

1-31 03 03-01

Прикладная математика (научно-производственная деятельность)

2018 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 03-2013 и учебного плана УВО № G31-173/уч. 2013 г. от 30.05.2013

СОСТАВИТЕЛЬ

В.И. Репников, доцент кафедры вычислительной математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой вычислительной математики (протокол № 14 от 19.04.2018);

Научно-методическим Советом БГУ (протокол № 5 от 04.05.2018)

Зав. кафедрой



В.И. Репников

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дисциплина «Групповой анализ дифференциальных уравнений и разностные схемы» посвящена изложению основ теории группового анализа дифференциальных уравнений и применению результатов такого анализа к построению эффективных численных методов решения дифференциальных задач различных классов.

Содержание дисциплины укладывается в рамки разрабатываемой на кафедре вычислительной математики идеологии повышения уровня адекватности дифференциальной и аппроксимирующей ее разностной задач и отвечает современному состоянию вопроса, а ее изучение призвано существенно повысить уровень как общематематической, так и специальной подготовки математиков-прикладников в области разработки вычислительных алгоритмов, предназначенных для решения дифференциальных задач.

В результате изучения данной дисциплины студенты должны получить навыки конструирования численных алгоритмов, эффективно использующих инвариантно-групповые свойства исходной дифференциальной задачи, а также практику их применения для решения прикладных задач соответствующего класса.

Цель учебной дисциплины «Групповой анализ дифференциальных уравнений и разностные схемы» – получение студентами навыков группового анализа дифференциальных уравнений и конструирования численных алгоритмов, способных эффективно использовать инвариантно-групповые свойства исходной задачи.

Основные задачи, решаемые при изучении учебной дисциплины «Групповой анализ дифференциальных уравнений и разностные схемы»:

- формирование у студентов твердых навыков по выбору алгоритмов для решения конкретной задачи (ориентируясь на вид поставленной задачи и теоретические характеристики соответствующего алгоритма);
- освоение современных подходов к конструированию эффективных численных методов решения дифференциальных задач.

Учебная дисциплина «Пошаговые методы численного решения начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений» относится к циклу дисциплин специализации (1-31 03 03-01 04 Численные методы).

Применяемые при решении указанных задач методы в значительной степени опираются на курсы «Геометрия и алгебра», «Обыкновенные дифференциальные уравнения» и «Методы численного анализа».

В результате изучения дисциплины студент должен **знать**:

- основные понятия, связанные с одно- и многопараметрическими группами преобразований;

- инфинитезимальные критерии инвариантности функций, алгебраических уравнений и систем, дифференциальных уравнений и систем;
- связь между групповой инвариантностью дифференциальной задачи и законами сохранения, которыми она обладает;
- подходы к использованию известных инвариантов при численном интегрировании соответствующей дифференциальной задачи;

уметь:

- по заданному инфинитезимальному оператору определять групповые преобразования и обратно;
- вычислять инварианты заданной группы преобразований;
- строить группу преобразований, допускаемую данной дифференциальной системой;
- использовать допускаемую дифференциальным уравнением группу преобразований для его аналитической и численной обработки;

владеть:

- основными понятиями теории численных методов решения дифференциальных задач;
- методикой группового анализа дифференциальных задач;
- подходами к использованию групповых свойств дифференциальной задачи при ее численном анализе;
- навыками самообразования и способами использования аппарата группового анализа и теории численных методов решения дифференциальных задач для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Освоение учебной дисциплины «Групповой анализ дифференциальных уравнений и разностные схемы» должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональных компетенций:

академические компетенции:

- АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.
- АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.
- АК-3. Владеть исследовательскими навыками.
- АК-4. Уметь работать самостоятельно.

социально-личностные компетенции:

- СЛК-1. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

профессиональные компетенции:

- ПК-1. Работать с научно-технической, нормативно-справочной и специальной литературой.

В соответствии с типовым учебным планом специальности 1- 31 03 03 Прикладная математика (по направлениям) учебная программа предусматривает для изучения дисциплины 154 учебных часа, в том числе 68 аудиторных часов: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Однопараметрические группы преобразований

Тема 1.1. Введение

Проблема численного моделирования дифференциальных задач сеточными методами. Основные требования, предъявляемые к разностным схемам. Принципы оптимизации разностных схем.

Тема 1.2. Определения и примеры

Общее определение группы. Примеры групп. Группы преобразований. Однопараметрические группы преобразований. Закон композиции.

Тема 1.3. Уравнение Ли. Инварианты

Касательное векторное поле. Восстановление групповых преобразований по касательному векторному полю. Инфинитезимальный оператор группы. Экспоненциальное представление группы. Канонический параметр. Приведение однопараметрической группы к группе переносов. Инварианты группы преобразований. Критерий инвариантности. Наиболее часто встречающиеся однопараметрические группы преобразований и их характеристики.

Тема 1.4. Инвариантные поверхности

Определение инвариантности уравнения (системы) относительно однопараметрической группы. Инфинитезимальный критерий инвариантности. Представление инвариантной относительно группы поверхности через инварианты данной группы.

Раздел 2. Группы преобразований, допускаемые дифференциальными уравнениями

Тема 2.1. Обсуждение проблемы на примере уравнения теплопроводности

Простейшие преобразования, допускаемые уравнением теплопроводности. Обсуждение их групповых свойств в стандартном и продолженном пространствах.

Тема 2.2. Операция продолжения

Независимые и дифференциальные переменные. Формальное определение операции продолжения точечных преобразований. Непосредственное вычисление операторов продолжения в простейшем случае. Общие формулы продолжения.

Тема 2.3. Построение группы, допускаемой дифференциальным уравнением

Дифференциальные функции. Дифференциальные уравнения как поверхности в продолженном пространстве. Инфинитезимальный критерий инвариантности дифференциальных уравнений. Расщепление определяющих уравнений. Примеры вычисления групп симметрий: для обыкновенного дифференци-

ального уравнения второго порядка; для уравнения теплопроводности; для нелинейного уравнения переноса.

Тема 2.4. Алгебры Ли и многопараметрические группы

Обсуждение возможности объединения допускаемых уравнением однопараметрических групп в многопараметрические на примере уравнения теплопроводности. Определения и основные свойства алгебр Ли. Таблица коммутирования.

Тема 2.5. Использование симметрий для построения решений дифференциальных уравнений

Нахождение интегрирующего множителя по известной группе симметрий. Метод «выпрямления» группы. Определение общего вида уравнения, допускающего заданную группу. Общий вид уравнений, допускающих часто встречающиеся группы на плоскости. Понижение порядка дифференциального уравнения с использованием допускаемой им группы. Построение инвариантных решений дифференциальных уравнений.

Тема 2.6. Инвариантность дифференциальных уравнений и законы сохранения

Постановка вариационной задачи. Необходимое условие экстремума. Понятие вариационных симметрий. Инфинитезимальный критерий инвариантности. Понятие закона сохранения. Связь между вариационными симметриями и законами сохранения. Обсуждение законов сохранения на примере динамики системы материальных точек.

Раздел 3. Численные методы решения дифференциальных уравнений и инвариантность

Тема 3.1. Использование информации о симметриях дифференциальной задачи при ее численном интегрировании

Сохранение линейных и квадратичных инвариантов методами Рунге-Кутты. Учет инвариантов путем проектирования на многообразие. Введение локальных координат на инвариантном многообразии.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов		Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия		
1	Однопараметрические группы преобразований				Контрольная работа по темам 1.1-1.4
1.1	Введение	2			
1.2	Определения и примеры	2	2		Экспресс-опрос
1.3	Уравнение Ли. Инварианты	4	4	1	Отчет по лаб. работе
1.4	Инвариантные поверхности	4	6		Экспресс-опрос
2	Группы преобразований, допускаемые дифференциальными уравнениями				Контрольная работа по темам 2.1-2.2, коллоквиум
2.1	Обсуждение проблемы на примере уравнения теплопроводности	2			
2.2	Операция продолжения	2			
2.3	Построение группы, допускаемой дифференциальным уравнением	4	4	1	Отчет по лаб. работе
2.4	Алгебры Ли и многопараметрические группы	2			Экспресс-опрос
2.5	Использование симметрий для построения решений дифференциальных уравнений	4	4	1	Отчет по лаб. работе
2.6	Инвариантность дифференциальных уравнений и законы сохранения	4			Экспресс-опрос
3	Численные методы решения дифференциальных уравнений и инвариантность				
3.1	Использование информации о симметриях дифференциальной задачи при ее численном интегрировании	4	10	1	Отчет по лаб. работе
	Всего	34	30	4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Олвер П. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
2. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration. – Springer, 2006. – 659 pp.
3. Дородницын В.А. Групповые свойства разностных уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 240 с.

Перечень дополнительной литературы

4. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. – М.: Знание, 1989. – 48 с.
5. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280 с.
6. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
7. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. – Нижний Новгород. Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2007. – 421 с.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Раздел 1. Однопараметрические группы преобразований

1. Выяснить, образует ли группу каждое из указанных множеств.
2. Выяснить, образует ли однопараметрическую группу каждое из заданных преобразований.
3. Найти преобразования группы, задаваемой указанным оператором.
4. Проверить инвариантность указанного многообразия относительно преобразований заданной группы и записать данное многообразие в инвариантах допускаемого оператора

Раздел 2. Группы преобразований, допускаемые дифференциальными уравнениями

1. Вычислить первое и второе продолжение указанных операторов.
2. Вычислить группы преобразований, допускаемых ОДУ второго порядка.
3. Проинтегрировать указанное дифференциальное уравнение, предварительно вычислив допускаемую им группу преобразований.
4. Найти решения указанного уравнения в частных производных, инвариантные относительно группы преобразований, допускаемой уравнением.

Раздел 3. Численные методы решения дифференциальных уравнений и инвариантность

1. На интервале заданном интервале найти приближенное решение указанной дифференциальной задачи одним из стандартных методов типа Рунге-Кутты с заданной точностью.
2. Тем же методом найти решение, используя постоянный шаг и а) без проектирования на инвариантные многообразия данной задачи; б) с проектированием на каждое из многообразий по отдельности; в) на все многообразия одновременно.
3. Тем же методом найти решение, используя постоянный шаг и локальные координаты на упомянутых многообразиях.

Перечень рекомендуемых средств диагностики

Для текущего контроля качества усвоения знаний студентами используется следующий диагностический инструментарий:

- лабораторные работы;
- письменные контрольные работы;
- коллоквиумы;
- устные экспресс-опросы.

Лабораторные работы, как правило, представляют собой задания, включающие аналитическое исследование предложенной дифференциальной задачи, а также (по разделу 3) программную реализацию указанного численного метода (язык

программирования обычно выбирается самим студентом), проведение вычислительного эксперимента и комментарии по его итогам. Рекомендуемая форма отчетности по лабораторной работе – письменный отчет. Лабораторная работа оценивается по стандартной 10-балльной шкале. Оценка за лабораторную работу может быть снижена в случае несвоевременного выполнения.

Письменные контрольные работы проводятся для контроля знаний по одному или нескольким разделам курса. Они включают, как правило, 4-5 заданий и оцениваются по 10-балльной шкале. В случае неудовлетворительной оценки контрольная работа может быть переписана.

Коллоквиум представляет собой персональную устную беседу преподавателя со студентом с целью определения уровня знаний по пройденным темам. Для более точной оценки коллоквиум может включать дополнительный письменный этап. По результатам коллоквиума выставляется оценка по 10-балльной шкале.

Устный экспресс-опрос студентов проводится в свободной форме в течение лабораторных занятий. Его результаты учитываются преподавателем при выставлении рейтинговой оценки в конце семестра.

Методика формирования итоговой оценки

Итоговая оценка формируется на основе:

1. Правил проведения аттестации студентов (Постановление Министерства образования Республики Беларусь №53 от 29 мая 2012 г.);
2. Положения о рейтинговой системе оценки знаний по дисциплине в БГУ (Приказ ректора БГУ от 18.08.2015)
3. Критериев оценки знаний студентов (письмо Министерства образования от 22.12.2003 г.)

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу
Методы численного анализа	Кафедра вычислительной математики	Нет	Изменений не требуется, протокол № 14 от 19.04.2018
Численные методы математической физики	Кафедра вычислительной математики	Нет	Изменений не требуется, протокол № 14 от 19.04.2018

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕ-
МОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 201_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
