О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

Д. Д. Хорн (Берлин, Германия), М. В. Игнатенко (Минск, Беларусь)

Рассматривается задача приближенного вычисления дробных интегралов $\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)$ с параметром $\alpha \in [1/2, 1)$ и дробных производных $\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) \equiv \equiv f^{(\alpha)}(x)$ Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1/2]$, задаваемых [1] равенствами

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad f(t) \in C^1[a,b]; \tag{1}$$

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} \right\}, \quad f(t) \in AC[a,b], \tag{2}$$

где $\Gamma(\beta) = \int\limits_0^{\infty} s^{\beta-1} e^{-s} ds$ — Гамма-функция, $x > a$, $C^1[a,b]$ и $AC[a,b]$ — пространства непрерывно дифференцируемых и абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, соответственно.

Одно из решений этой задачи основано на сведении выражений (1) и (2) к интегралам по отрезку $[-1,1]$ и последующем применении квадратурного правила Мелера [2] с весом $p(\tau) = (1-\tau^2)^{-1/2}$, которое обладает наивысшей алгебраической степенью точности. Выполнив преобразования, получим, что

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) \approx \frac{\pi}{n} \frac{(x-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{n} \phi_{\alpha}\left(x, \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \equiv I_n(x),$$

$$f^{(\alpha)}(x) \approx \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ f(a) + \frac{\pi}{n} \frac{(x-a)}{2^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \tilde{\phi}_{\alpha}\left(x, \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \right\} \equiv D_n(x),$$

где функции $\phi_{\alpha}(x,\tau) = (1-\tau)^{\alpha-1/2}\sqrt{1+\tau} f\left(\frac{x-a}{2}\tau + \frac{x+a}{2}\right)$ $(1/2 \le \alpha < 1)$, $\tilde{\phi}_{\alpha}(x,\tau) = (1-\tau)^{1/2-\alpha}\sqrt{1+\tau} f'\left(\frac{x-a}{2}\tau + \frac{x+a}{2}\right)$ $(0 < \alpha \le 1/2)$, а значения $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x) = \left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} D_n(x) = f^{(\alpha)}(x)$.

Приведем далее одну приближенную формулу эрмитова интерполирования с одним двукратным узлом $x_0 \neq a$, содержащую дробные производные.

Алгебраический многочлен первой степени

$$H_1(x) = f(x_0) + \left\{ \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha}(x_0-a)^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(x_0) - \frac{1-\alpha}{\alpha(x_0-a)} f(x_0) \right\} (x - x_0),$$

где $0 < \alpha < 1$, удовлетворяет условиям $H_1(x_0) = f(x_0)$, $H_1^{(\alpha)}(x_0) = f^{(\alpha)}(x_0)$ и сохраняет свойство инвариантности для функций $f(x) = c_0 + c_1 x$ $(c_0, c_1 \in \mathbb{C})$.

Получены и другие интерполяционные формулы с дробными производными.

Литература

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential Equations.* Amsterdam: Elsevier Science (2006).

2. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: В 2 т.* Т. 1. М.: Наука (1976).