СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА

И. И. Столярчук, В. И. Корзюк (Минск, Беларусь)

Рассматривается одномерное гиперболическое диффренциальное уравнение второго порядка

$$\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u - \lambda(t,x) u = f(t,x).$$

Данное уравнение называется уравнением Клейна–Гордона–Фока [1], которое с физической точки зрения возникает при описании процессов прохождения переменного электрического тока в цепях с учетом потерь на емконстных и индукционных элементах, движение элементарных частиц, обладающих массой, со скоростью, близкой к скорости света, колебание струны, лежащей на упругой подложке и многие другие.

С точки зрения теории дифференциальных уравнений с частными производными, уравнение Клейна-Гордона-Фока относится к подклассу линейных гиперболических уравнений второго порядка, оператор которого не может быть факторизован на линейные дифференциальные операторы первого порядка [2].

Проведены исследования четырёх линейных смешанных задач для неоднородного одномерного уравнения К лейна–Гордона–Фока: задача с граничными условиями первого рода, заданная как в прямолиненой [3], так и в криволинейной полуполосе [4, 5], задача с косыми производными первого порядка в граничных условиях [6], а также задача с нелокальными условиями[7, 8]. Получены необходимые и достаточные условия корректности по Адамару (существование, единственность, непрерывная зависимость решения от данных), при заданной гладкости исходных функций, получены эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры второго рода, доказана их разрешимость. Для каждой из поставленных задач гладкость решения зависит от выполнимости необходимых и достаточных условий согласования на её заданные функции.

Для примера рассмотрим первую смешанную задачу в полуполосе $Q = (0,l) \times \mathbb{R}^+$

$$\partial_t^2 v - a^2 \partial_x^2 v - \lambda(t,x) u = f(t,x). \tag{1}$$

$$v(0,x) = \varphi(x), \partial_t v(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0;l], \tag{2}$$

$$v(t,0) = \mu^{(0)}(t), v(t,l) = \mu^{(l)}(t), \quad t \in [0;\infty). \tag{3}$$

Доказана теорема

Теорема 1. Пусть $f \in C^1(\overline{Q})$, $\lambda \in C^1(\overline{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2([0;+\infty)), j = 0, l$, $\varphi \in C^2([0,l])$, $\psi \in C^1([0,l])$. Решение задачи (1)–(3) существует и единственно в классе $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования

$$\mu^{(0)}(0) = \varphi(0),\ \mu^{(l)}(0) = \varphi(l), \frac{1}{a} d\mu^{(0)}(0) = \frac{1}{a}\psi(0), \frac{1}{a} d\mu^{(l)}(0) = \frac{1}{a}\psi(l),$$

$$\frac{1}{a^2} d^2\mu^{(0)}(0) - d^2\varphi(0) - \frac{1}{a^2}(\lambda(0,0)\varphi(0) + f(0,0)) = 0,$$

$$\frac{1}{a^2} d^2\mu^{(l)}(0) - d^2\varphi(l) - \frac{1}{a^2}(\lambda(0,l)\varphi(l) + f(0,l)) = 0.$$

Аналогичные теоремы доказаны и для других рассмотренных задач.

Литература

1. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля.* М., ФИЗМАТЛИТ., 2005. – 384 с.

2. *Карпечина А.А., Корзюк В.И., Чеб Е.С.* Гиперболическое уравнение второго порядка в случае двух независимых переменных *Весцi НАН Беларусi. Серыя фiз-мат. навук.* № 1 (2013), с. 71–80.

3. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе. *Дифференциальные уравнения.* Т. 50, № 8 (2014), с. 1108–1117.

4. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в криволинейной полуполосе *Доклады НАН Беларуси.* Т. 58, № 3 (2014), с. 9–15.

5. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.*Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами *Дифференциальные уравнения.* Т. 53, № 1 (2017), с. 77–88.

6. *Korzyuk V.I., Stoliarchuk, I.I.* Mixed problem for Klein-Gordon-Fock eqaution with curve derivatives in boundary conditions *Computer Algebra Systems in Teaching and Research.* Sedlice University of Natural Science and Humanities. Vol. 5 (2015), pp. 166–181.

7. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение смешанных задач для уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными условиями. Материалы XVII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения — 2017), 16–20 мая, 2017, Минск. Тезисы докладов, с. 21–23.

8. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными условиями *Доклады НАН Беларуси.* Т. 60, № 6 (2017), с. 15–19.