НЕОДНОРОДНЫЕ УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ДЛЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

И. И. Столярчук (Минск, Беларусь)

В области $Q = (0; +\infty) \times (0; l)$ задается одномерное уравнение Клейна–Гордона–Фока

$$\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u - \lambda(t,x)u = f(t,x), \tag{1}$$

где λ и f — функции, заданные на множестве $\overline{Q} = [0; l] \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u(0,x) = \varphi(x), \partial_t u(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0; l], \tag{2}$$

и нелокальные интегральные условия

$$u(t,j) = \int\limits_0^l K_j(t,s)u(t,s)ds + q^{(j)}(t), \quad t \in [0; \infty), j \in \{0, l\}. \tag{3}$$

Рассмотрим область $\tilde{Q} = \{(t,x) \in Q | x + at \neq (k+1)l \wedge x - at \neq -kl, k = 0, 1, 2, ...\}$.

Теорема 1. Пусть $\lambda, f \in C^1(\overline{Q})$, $q^{(0)} \in C^2([0; +\infty))$, $q^{(l)} \in C^2([0; +\infty))$, $\varphi \in C^2([0; l])$, $\psi \in C^1([0; l])$, $K_i \in C^2(\overline{Q}), i = 0, l$. Решение задачи (1)–(3), удовлетворяющее условиям сопряжения

$$\left[(\partial_x^p u)^+ - (\partial_x^p u)^-\right](t, x = at - kl) = F_p^{(0)}(\sigma_0^{(k)}, \sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}), p = \overline{0,2},$$

$$\left[(\partial_x^2 u)^+ - (\partial_x^2 u)^-\right](t, x = (k+1)l - at) = F_p^{(l)}(\delta_0^{(k)}, \delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)}), p = \overline{0,2}$$

где коэффициенты $\delta_i^{(k)}, \sigma_i^{(k)}, i = \overline{0,2}$ выражаются линейным образом через $\delta_i^{(k-1)}$, $\sigma_i^{(k-1)}, i = \overline{0,2}, k = 1, 2, ...$, а под выражением $(\cdot)^{\pm}$ понимаются предельные значения функции $u(t,x)$ и её производных с разных сторон характеристик $x - at = -kl, x + at = (k+1)l$, функции $F_p^{(j)}, j = 0, l, p = \overline{0,2}$ являются линейными относительно своих аргументов, является единственным классическим решением задачи (1)–(3) в области $\tilde{Q}$ тогда и только тогда, когда выполнены неоднородные условия согласования

$$q^{(0)}(0) - \varphi(0) + \int\limits_0^l K_0(0,s)\varphi(s)ds = \sigma_0^{(0)}, q^{(l)}(0) - \varphi(l) + \int\limits_0^l K_l(0,s)\varphi(s)ds = \delta_0^{(0)},$$

$$-\frac{1}{a}dq^{(0)}(0) + \frac{1}{a}\psi(0) - \frac{1}{a}\int\limits_0^l \left(\partial_t K_0(0,s)\varphi(s) + \psi(s)K_0(0,s)\right)ds = \sigma_1^{(0)},$$

$$\frac{1}{a}dq^{(l)}(0) - \frac{1}{a}\psi(l) - \frac{1}{a}\int\limits_0^l \left(\partial_t K_l(0,s)\varphi(s) + \psi(s)K_l(0,s)\right)ds = \delta_1^{(0)},$$

$$\frac{1}{a^2}d^2q^{(0)}(0) - d^2\varphi(0) - \frac{1}{a^2}\left(\varphi(0)\lambda(0,0) + f(0,0)\right) +$$

$$+\frac{1}{a^2}\int\limits_0^l \big(\partial_t^2 K_0(0,s)\varphi(s) + 2\partial_t K_0(0,s)\psi(s) + K_0(0,s) \times$$

$$\times \left(a^2 d^2\varphi(s) + \varphi(s)\lambda(0,s)\right) + f(0,s)\big)ds = \sigma_2^{(0)},$$

$$\frac{1}{a^2}d^2q^{(0)}(0) - d^2\varphi(l) - \frac{1}{a^2}\left(\varphi(l)\lambda(0,l) + f(0,l)\right) +$$

$$+\frac{1}{a^2}\int\limits_0^l \left(\partial_t^2 K_l(0,s)\varphi(s) + 2\partial_t K_l(0,s)\psi(s) + K_l(0,s)\times\right.$$

$$\left.\times\left(a^2d^2\varphi(s) + \varphi(s)\lambda(0,s) + f(0,s)\right)\right)ds = \delta_2^{(0)}.$$

Литература

1. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока с нелокальными условиями. *Доклады НАН Беларуси.* Т. 61, № 6 (2017), с. 20–27.

2. *Корзюк В.И., Козловская И.С. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций. В 10 ч. Ч. 2.* Минск: БГУ, 2017.

3. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе *Дифференциальные уравнения.* Т. 50, № 8 (2014), с. 1108–1117.

4. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока в криволинейной полуполосе // *Доклады НАН Беларуси.* Т. 58, № 3 (2014), с. 9–15.

5. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами *Дифференциальные уравнения.* Т. 53, № 1 (2017), с. 77–88.