СПЕКТР СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ В ЯДРЕ

Т. И. Маслюкова (Минск, Беларусь)

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\lambda\varphi(x) - \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{cn(\tau - x)\varphi(\tau)d\tau}{sn(\tau - x)} = f(x), \qquad -a < x < a, \tag{1}$$

где $sn(\cdot)$ — эллиптический синус; $cn(\cdot)$ — эллиптический косинус [1, с. 94]. Функция $\dfrac{cn(\tau - x)}{sn(\tau - x)}$ имеет основные периоды $2K$ и $4iK'$ (K и K' — некоторые положительные числа), а λ и a — числовые параметры, причем $0 < a < K$.

Будем предполагать, что заданная функция $f(x)$ и неизвестная функция $\varphi(x)$ принадлежат пространству $L_2(-a, a)$. Так как $sn(z) \sim z$ при $z \to 0$, а $cn(z) \sim 1$ при $z \to 0$, то выражение $\dfrac{cn(\tau - x)}{sn(\tau - x)}$ есть аналог ядра Коши на торе. Тор можно реализовать в виде прямоугольника со сторонами длин $2K$ и $4iK'$, противолежащие стороны которого параллельны осям координат и попарно отождествлены. В качестве такого прямоугольника зафиксируем прямоугольник вида $[-K, K] \times [-iK', 3iK']$.

Входящий в уравнение (1) сингулярный оператор самосопряженный. Таким образом, спектр этого оператора — компактное подмножество вещественной оси [2]. Введем в рассмотрение новую фукнцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{cn(\tau - x)\varphi(\tau)d\tau}{sn(\tau - x)}, \qquad z \in [-a, a]. \tag{2}$$

Применяя формулы Сохоцкого [3] и учитывая двоякую периодичность функции в ядре получим систему краевых условий, равносильную уравнению (1). Критерий нетривиальной разрешимости данной задачи заключается в том, что уравнение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)d\tau + 2Kn + 2iK'm = 0, \tag{3}$$

где

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\lambda+1}{\lambda-1}, & x \in (-a, a) \\ -1, & z \in [-K - iK', K - iK'] \end{cases},$$

должно быть разрешимо в целых числах m и n [4]. Отсюда получим следующий результат: Спектр интегрального оператора в уравнении (1) состоит из точек $\lambda = \pm 1$ и точек $\lambda_m = cth\dfrac{2K'\pi m - K}{a}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Литература

1. *Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций* М.: Наука (1970).
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа* М.: Наука (1981).
3. *Гахов Ф.Д. Краевые задачи* М.: Наука (1977).
4. *Зверович Э.И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях *Успехи математических наук.* Вып. 1(157). № 26 (1971), с. 113–179.