ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

Ф. Е. Ломовцев (Минск, Беларусь)

Рассматривается задача нахождения классических решений и критерия корректности смешанной задачи

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{tx}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\, a_1>0,\, a_2>0,\, \{x,t\}\in G, \tag{1}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\ \ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ \ x\in[0,d], \tag{2}$$

$$u|_{x=0}=\mu_1(t),\ u|_{x=d}=\mu_2(t),\ t\in[0,\infty[. \tag{3}$$

Пусть $C^k(\Omega)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω, $C(\Omega)$ — множество непрерывных функций на $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. Для классических решений $u\in C^2(G)$, $G=[0,d]\times[0,\infty[$, из уравнения (1) и условий (2), (3) вытекают соответственно необходимые требования гладкости и согласования

$$f\in C(G),\,\varphi\in C^2[0,d],\,\psi\in C^1[0,d],\,\mu_k\in C^2[0,\infty[,\,\hat d_k=(k-1)d, \tag{4}$$

$$\varphi(\hat d_k)=\mu_k(0),\,\psi(\hat d_k)=\mu_k'(0),\,f(\hat d_k,0)+(a_2-a_1)\psi'(\hat d_k)+a_1a_2\varphi''(\hat d_k)=\mu_k''(0),k=1,\,2. \tag{5}$$

Множество G разбивается на прямоугольники $G_n=[0,d]\times[d_n,\,d_{n+1}]$, $d_n=(n-1)d/(a_1+a_2)$, и характеристиками уравнения (1) на треугольники

$$\Delta_{3n-2}=\{\{x,t\}:\,x>a_1t_n,\,x+a_2t_n<d,x\in]0,\,d[\},\,t_n=t-d_n,$$

$$\Delta_{3n-1}=\{\{x,t\}:\,x\le a_1t_n,\ \ x\in[0,\,a_1d_2]\},$$

$$\Delta_{3n}=\{\{x,\,t\}:\,x+a_2t_n\ge d,\,x\in[a_1d_2,\,d]\},\,t\in[d_n,\,d_{n+1}],\,n=1,\,2,...$$

Без продолжений заданных f, φ, ψ, μ_1, μ_2 вне G доказана глобальная

Теорема [1]. Если коэффициенты $(-1)^i(a_2-a_1)\ge 0$, то первая смешанная задача (1)–(3) имеет единственное устойчивое по f, φ, ψ, μ_1, μ_2 классическое решение $u\in C^2(G)$ тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости (4), условия согласования (5) и интегральные требования гладкости:

$$\int_{d_n}^{t}f(x+(-1)^pa_p(t-\tau),\tau)d\tau\in C^1(\Delta_{3n-2}),\ p=1,\,2,$$

$$\frac{a_i}{a_1}\int_{d_n}^{\hat t^{(1)}_{n,i}(x)}f\big(a_it^{(1)}_{n,i}(x)-a_2[\tau-(2-i)d_n],\tau\big)d\tau-\int_{\hat t^{(1)}_{n,i}(x)}^{t}f(x-a_1(t-\tau),\tau)d\tau\in C^1(\Delta_{3n-1}),$$

$$\frac{a_i}{a_2}\int_{d_n}^{t^{(2)}_{n,i}(x)}f\big(d-a_it^{(2)}_{n,i}+a_1[\tau-(i-1)d_n],\tau\big)d\tau-\int_{t^{(2)}_{n,i}(x)}^{t}f(x+a_2(t-\tau),\tau)d\tau\in C^1(\Delta_{3n}),$$

$$\int_{d_n}^{t}f(x-(-1)^ka_{3-k}(t-\tau),\tau)d\tau\in C^1(\Delta_{3n-2+k}),\,k=1,\,2;\,n=1,\,2,...;\,i=1,\,2.$$

Этим классическим решением $u \in C^2(G)$ задачи (1)–(3) является функция

$$u_{3n-2}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi_n(x+a_2t_n) + a_2\varphi_n(x-a_1t_n) + \int\limits_{x-a_1t_n}^{x+a_2t_n} \psi_n(\nu)d\nu\right] + F_n^{(0)}(x,t),$$

$$u_{3n-1}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi_n(a_2t_n+x) - a_1\varphi_n\Big(a_2\Big(t_n - \frac{x}{a_1}\Big)\Big) + \int\limits_{a_2(t_n-x/a_1)}^{a_2t_n+x} \psi_n(\nu)d\nu\right] +$$

$$+\mu_1\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big) + F_{n,1}^{(2)}(x,t),$$

$$u_{3n}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_2\varphi_n(x-a_1t_n) - a_2\varphi_n\big(d-a_1t_{n,2}^{(2)}\big) + \int\limits_{x-a_1t_n}^{d-a_1t_{n,2}^{(2)}} \psi_n(\nu)d\nu\right] +$$

$$+\mu_2\Big(t-\frac{d-x}{a_2}\Big) + F_{n,2}^{(2)}(x,t),\ t_n = t-d_n,\ n=1,\,2,\dots,$$

где u_{3n-l} — сужения u на Δ_{3n-l}, $l=0,\ 1,\ 2$; рекуррентные начальные данные:

$$\varphi_1(x) = \varphi(x),\ \psi_1(x) = \psi(x),\ x\in[0,\ d],\ \varphi_n(x) = u_{3n+j-4}|_{t=d_n},$$

$$\psi_n(x) = (u_{3n+j-4})_t|_{t=d_n},\ x\in[ja_1d_2,\ (a_1+ja_2)d_2],\ j=0,\ 1,\ n=2,\,3,\dots;$$

и функции : $$F_n^{(0)}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\int\limits_{d_n}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)ds\,d\tau,\ F_{n,q}^{(2)}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\times$$

$$\times\left[(-1)^q \int\limits_{d_n}^{t_{n,3-q}^{(q)}(x)} \int\limits_{x-(-1)^q a_{3-q}(t-\tau)}^{\hat d_q-(-1)^q a_{3-q}\left(t_{n,3-q}^{(q)}(x)-\tau\right)} f(s,\tau)ds\,d\tau + \int\limits_{t_{n,3-q}^{(q)}(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\right],$$

$$q=1,\,2;\quad \hat t_{n,i}^{(1)}(x) = \frac{a_1+a_i}{a_1+a_2}\,t_{n,i}^{(1)}(x) + (2-i)d_n,\ t_{n,i}^{(1)}(x) = t-(2-i)d_n - \frac{x}{a_1},$$

$$\hat t_{n,i}^{(2)}(x) = \frac{a_2+a_i}{a_1+a_2}\,t_{n,i}^{(2)}(x) + (i-1)d_n,\ t_{n,i}^{(2)}(x) = t-(i-1)d_n - \frac{d-x}{a_2},\ i=1,\,2.$$

Литература

1. *Ломовцев Ф.Е.* О глобальных теоремах с явными решениями и условиями корректности начально-краевых задач для уравнения колебаний ограниченной струны. *Материалы междунар. конф. "ВЗМШ С.Г. Крейна-2016". (25 янв.–31 янв. 2016 г., Воронеж, Россия).* Воронеж (2016), с. 276–279.