ФОРМУЛЫ T-ЭНТРОПИИ ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ КЛАССОВ ТРАНСФЕР ОПЕРАТОРОВ

К. С. Курносенко (Минск, Беларусь)

Пусть (X, α) — динамическая система, где X — компактное пространство и $\alpha : X \to X$ — непрерывное отображение.

Линейный оператор $A : C(X) \to C(X)$ называется трансфер оператором для (X, α), если:

(a) A — положительный оператор (отображает неотрицательные функции в неотрицательные функции),

(b) A удовлетворяет *гомологическому тождеству*

$$A(f \circ \alpha \cdot g) = fAg, \quad f, g \in C(X).$$

По оператору A определим семейство операторов $A_\varphi : C(X) \to C(X)$, зависящих от функционального параметра $\varphi \in C(X)$ с помощью формулы

$$A_\varphi f = A(e^\varphi f).$$

Операторы такого типа являются принципиальными объектами спектральной теории динамических систем, эллиптической теории функционально-диффференциальных уравнений и т.д.

Обозначим через $\lambda(\varphi)$ логарифм спектрального радиуса оператора A_φ.

Известен вариационный принцип для вычисления $\lambda(\varphi)$:

$$\lambda(\varphi) = \max_{\mu \in M_\alpha} (\mu(\varphi) + \tau(\mu)),$$

где M_α — множество α-инвариантных вероятностных мер, $\mu(\varphi) = \int_X \varphi d\mu$ и $\tau(\mu)$ — t-энтропия (довольно сложно вычисляемый динамический инвариант).

Следующие теоремы дают *явные* формулы t-энтропии для двух конкретных классов трансфер операторов.

Теорема 1. Пусть (X, α) — обратимая динамическая система, $\psi \in C(X)$ и трансфер оператор имеет вид

$$(Af)(x) := e^{\psi(x)} f(\alpha^{-1}(x))$$

(любой трансфер оператор для обратимой динамической системы имеет такой вид). Тогда $\tau(\mu) = \mu(\psi)$.

Теорема 2. Пусть X — метрический компакт, α — растягивающее непрерывное отображение, для которого $\alpha^{-1}(x) \equiv \mathrm{const}$, $\psi \in C(X)$ и трансфер оператор имеет вид

$$(Af)(x) := \sum_{y \in \alpha^{-1}(x)} e^{\psi(y)} f(y).$$

Тогда $\tau(\mu) = \mu(\psi) + h(\mu)$, где $h(\mu)$ — энтропия Колмогорова–Синая.