НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

П. П. Забрейко, И. В. Шашуро

Одним из основных принципов неподвижной точки является принцип Шаудера [1]: *Если в банаховом пространстве X вполне непрерывный оператор A оставляет инвариантным ограниченное замкнутое выпуклое множество Q ($AQ \subset Q$), то этот оператор имеет по крайней мере одну неподвижную точку.* В качестве множеств Q, обычно рассматриваются тела, т.е. ограниченные замкнутые выпуклые множества с непустой внутренностью, в частности шары.

В упорядоченных банаховых пространствах в качестве множеств Q можно рассматривать отрезки $\langle u, v\rangle = \{x : \ u \le x \le v\}$; как правило отрезки не обладают внутренними точками, т.е. телами не являются. Однако в работе [2] при рассмотрении нелинейных интегральных операторов в пространствах измеримых функций, оставляющих инвариантными отрезки, было обнаружено, что такие операторы также обладают неподвижными точками. Этот результат основан на том, что можно таким образом подобрать банахово пространство X содержащее $\langle u, v\rangle$, на котором оператор A оказывается вполне непрерывным. Естественно возникает вопрос, для каких других ограниченных выпуклых замкнутых множеств Q, отличных от отрезков, может быть применено аналогичное рассуждение и тем самым для таких множеств Q установлено существование неподвижных точек для интегральных операторов оставляющих инвариантным эти множества.

Пусть $(\Omega, \mathscr{L}, ds)$ — пространство с мерой, в котором Ω ограниченное замкнутое множество в конечномерном пространстве, $\mathscr{L}$ алгебра его измеримых подмножеств, ds мера Лебега и пусть Q — ограниченное замкнутое и выпуклое множество в пространстве $S = S(\Omega, \mathscr{L}, ds)$ измеримых функций. Предположим, что множества Q существует такая функция $w \in S$, что Q оказывается ограниченным замкнутым выпуклым множеством в пространстве $L(w)$ интегрируемых функций с весом w и, более того, это множество имеет равностепенно непрерывные нормы.

Доказывается, что при некоторых естественных ограничениях на $K(t, s, u)$ (условия Каратеодори) интегральный оператор Урысона

$$Ax(t) = \int_{\Omega} K(t, s, x(s))\, ds,$$

оставляющее инвариантным множество Q с описанными выше свойствами, также оказывается вполне непрерывным в пространстве $L(w)$. Тем самым для таких операторов оказывается справедливым принцип неподвижной точки в случае, если он оставляет множество Q инвариантным.

Подчеркнем, что рассматриваемые множества Q в пространстве $L(w)$ не обладают внутренними точками.

Литература

1. *Люстерник Л.А. Соболев В.И. Элементы функционального анализа* . Наука. Главная редакция физико-математической литературы 2-е издание. 1965.

2. *Забрейко П.П., Майорова Н.Л.*: *Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений.* I. Ярославль, вып. 3, (1978), с. 61–73.