О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ИЕРАРХИИ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В. И. Громак (Минск, Беларусь)

В настоящей работе мы рассматриваем свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве [1]

$$ {}_{2m}\widetilde{P}_2 \equiv \left(\frac{d}{dz} + 2w\right)\widetilde{L}_m[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \quad m = 1, 2, ..., \tag{1}$$

где оператор $\widetilde{L}_m$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\widetilde{L}_{m+1}[w] = (\frac{d^3}{dz^3} + (4w + \beta_m)\frac{d}{dz} + 2w_z)\widetilde{L}_m[w], \quad \widetilde{L}_1[w(z)] = w(z), \quad m = 1, 2, ... \tag{2}$$

Первый член этой иерархии, т.е. уравнение $({}_2\widetilde{P}_2)$, есть второе уравнение Пенлеве $w'' = 2w^3 + zw + \alpha$, а последующие уравнения называют высшими аналогами второго уравнения Пенлеве. В уравнении (1) $2m$ — порядок уравнения, $\alpha, \beta_1, ..., \beta_{m-1}$ — комплексные параметры, входящие в уравнение $({}_{2m}\widetilde{P}_2)$. Иерархия (1), (2) обобщает известную иерархию второго уравнения Пенлеве [1–6], получаемую при $\beta_j = 0$ в (3), и которая связана с иерархией уравнения Кортевега–де Фриза.

Рациональное решение уравнения (1), также как и для второго уравнения Пенлеве, может быть представлено в виде отношения полиномов Яблонского–Воробьева. Относительно обобщенных полиномов Яблонского–Воробьева $Q_n^{[m]}(z)$, которые в общем случае, в отличие от второго уравнения Пенлеве, не являются взаимно простыми, доказана

Теорема. Уравнение $({}_{2m}\widetilde{P}_2)$ имеет рациональное решение $w(z)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = n \in \mathbb{Z}$. При этом для каждого такого α рациональное решение единственно. Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то рациональное решение имеет представление

$$w(z, \alpha, \beta_1, ..., \beta_{m-1}) = \frac{d}{dz}\left(\ln\left[\frac{Q_{n-1}^{[m]}(z)}{Q_n^{[m]}(z)}\right]\right),$$

где $Q_n^{[m]}(z)$ — обобщенные полиномы Яблонского–Воробьева, которые определяются из рекуррентного соотношения $(Q_j^{[m]}(z) \equiv Q_j)$

$$Q_{n+1}Q_{n-1} = zQ_n^2 - 2Q_n^2\widetilde{L}_m[2Q_n^{-2}(Q_nQ_n'' - (Q_n')^2), Q_0(z) = 1, Q_1(z) = z,$$

а для $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, $w(z, \alpha, \beta_1, ..., \beta_{m-1}) = -w(z, -\alpha, \beta_1, ..., \beta_{m-1})$, $w(z, 0, \beta_1, ..., \beta_{m-1}) = 0$.

Для полиномов $Q_j^{[m]}(z)$ определена степень, найдены условия на параметры $\beta_1, ..., \beta_{m-1}$, гарантирующие наличие общих корней определенной кратности и доказано, что полиномы $Q_j^{[m]}(z)$ также удовлетворяют уравнениию $Q_{n-1}Q_{n+1}' - Q_{n-1}'Q_{n+1} = (2n+1)Q_n^2$.

Литература

1. *Громак В.И.* О решений уравнений Пенлеве высших порядков. *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. междунар. науч. семинара. 11–14 сент. 2012 г., Минск, Беларусь* / ИМ НАНБ; под ред. С.В. Рогозина. – Минск, 2012. – С. 27.

2. *Airault H.* Rational Solutions of Painlevé equations. *Stud. Appl. Math.* Vol. 61 (1979) pp. 31–53.

3. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

4. *Clarkson P.A. and Mansfield E.L.* The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials. *Nonlinearity.* Vol. 16 (2003), pp. R1–R26.

5. *Gromak V.I., Laine I., Shimomura S. Painlevé Differential Equations in the Complex Plane.* Berlin, New-York: De Gruyter Studies in Mathematics 28, 2002.

6. *Демина М.В., Кудряшов Н.А.* Специальные полиномы и рациональные решения иерархии второго уравнения Пенлеве. *ТМФ*, Т. 153, № 1 (2007), с. 58–67.