ПОСТРОЕНИЕ ЧЕТЫРЁХТОЧЕЧНОГО УРАВНЕНИЯ ФУКСА С ЗАДАННЫМИ ПРИВОДИМЫМИ МАТРИЦАМИ МОНОДРОМИИ В НЕРЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

В. В. Амелькин, М. Н. Василевич (Минск, Беларусь)

Пусть $X = \mathbb{CP}^1$ — комплексная проективная прямая, $M = \{1, i, -1, \alpha\}$ — множество точек прямой X. На открытом множестве $X \setminus M$ рассмотрим уравнение Фукса

$$dY = \Big(\frac{U_1}{z-1} + \frac{U_2}{z-i} + \frac{U_3}{z+1} + \frac{U_4}{z-\alpha}\Big) Y dz \qquad (1)$$

с постоянными (не зависящими от z) матрицами

$$U_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \theta_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,3}; \quad U_4 = \begin{pmatrix} \xi_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

такими, что

$$0 \le \mathbb{R}e\ \xi_j < 1, \quad j = \overline{1,3}; \quad \sum_{i=1}^{4} \xi_i = 0; \quad \sum_{s=1}^{3} \theta_s = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (1) является модельным уравнением при решении задачи Римана-Гильберта о построении на комплексной проективной прямой уравнения Фукса по заданным четырём конечным особым точкам и заданным постоянным приводимым (2x2)–матрицам монодромии V_j, удовлетворяющим условию $\prod\limits_{j=1}^{4} V_j = E$, где E — единичная матрица, в нерезонансном случае.

Теорема 1 [1]. Уравнение (1) с матрицами-вычетами вида (2) и условиями (3) вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда параметры θ_1, θ_2, θ_3 имеют любое из слудующих трёх представлений:

1) $\theta_1 = C(\alpha-1)^{\xi_4}$, $\theta_2 = -C(1-i)(\alpha-i)(\alpha-1)^{\xi_4-1}$, $\theta_3 = -C\ i\ (\alpha+1)(\alpha-1)^{\xi_4-1}$;

2) $\theta_1 = -C(1+i)(\alpha-1)(\alpha-i)^{\xi_4-1}/2$, $\theta_2 = C(\alpha-i)^{\xi_4}$, $\theta_3 = -C(1-i)\times\times(\alpha+1)(\alpha-i)^{\xi_4-1}/2$;

3) $\theta_1 = C\ i\ (\alpha-1)(\alpha+1)^{\xi_4-1}$, $\theta_2 = -C(1+i)(\alpha-i)(\alpha+1)^{\xi_4-1}$, $\theta_3 = C(\alpha+1)^{\xi_4}$, где C — произвольная постоянная (вообще говоря, комплексная).

Обозначим $u_{12}(z) = \dfrac{\theta_1}{z-1} + \dfrac{\theta_2}{z-i} + \dfrac{\theta_3}{z+1}$, $\phi_{11}(z) = (z-1)^{\xi_1}(z-i)^{\xi_2}(z+1)^{\xi_3} \times\times (z-\alpha)^{\xi_4}$, $\phi_{12}(z) = \phi_{11}(z)\int (u_{12}(z)/\varphi_{11}z)dz$.

Теорема 2 [1]. Матрица $U_j = \begin{pmatrix} \phi_{11}(z) & \phi_{12}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, являясь нормированной в точке $z_0 = \infty$ фундаментальной матрицей вполне интегрируемого уравнения (1), имеет заданные матрицы монодромии $V_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & \nu_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $j = \overline{1,3}$; $V_4 = \Big(\prod\limits_{j=1}^{3} V_j\Big)^{-1}$, где $\lambda_j = e^{2\pi\xi_j}$, $\nu_j = \mu_j\ \xi_j^{-1}(\lambda_j - 1)$, ξ_j, μ_j — заданные постоянные, $j = \overline{1,3}$.

Литература

1. *Амелькин В.В., Василевич М.Н.* Построение уравнения Фукса с четырьмя заданными конечными особыми точками и заданными приводимыми матрицами монодромии. *Дифференц. уравнения.* Т. 54. № 1 (2018), с. 3–8.