Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018;2:10–16
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2018;2:10–16

УДК 512.54

О МНОГООБРАЗИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕКОТОРЫХ HNN-РАСШИРЕНИЙ СВОБОДНЫХ ГРУПП

А. Н. АДМИРАЛОВА[1]***, В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ*** [1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Получено описание структуры и свойств многообразий представлений $R_n\left(G\left(p,\, q\right)\right)$ групп, имеющих копредставление вида $G\left(p,\, q\right) = \left\langle x_1, \ldots, x_2, t \,\middle|\, t\left(x_1^2 \ldots x_g^2\right) = \left(x_1^2 \ldots x_g^2\right)^q \right\rangle$, где $g \geq 3$, $|\, p\,| > q \geq 1$. Найдены неприводимые компоненты $R_n\left(G\left(p,\, q\right)\right)$, вычислены их размерности и доказано, что каждая неприводимая компонента $R_n\left(G\left(p,\, q\right)\right)$ является рациональным многообразием.

Ключевые слова: копредставление группы; многообразие представлений; размерность многообразия, рациональное многообразие.

ON REPRESENTATION VARIETIES OF SOME HNN-EXTENSIONS OF FREE GROUPS

A. N. ADMIRALOVA[a]***, V. V. BENIASH-KRYVETS*** [a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: V. V. Beniash-Kryvets (benyash@bsu.by)

In the article we provide the description of the structure and the properties of representation varieties $R_n\left(G\left(p,\, q\right)\right)$ of the groups with the presentation $G\left(p,\, q\right) = \left\langle x_1, \ldots, x_2, t \,\middle|\, t\left(x_1^2 \ldots x_g^2\right) = \left(x_1^2 \ldots x_g^2\right)^q \right\rangle$, where $g \geq 3$, $|\, p\,| > q \geq 1$. Irreducible components of $R_n\left(G\left(p,\, q\right)\right)$ are found, their dimensions are calculated and it is proved, that every irreducible component of $R_n\left(G\left(p,\, q\right)\right)$ is a rational variety.

Key words: a group presentation; a representation variety; a dimension of a variety; a rational variety.

Пусть $G = \left\langle g_1, \ldots, g_m \right\rangle$ – конечно порожденная группа, K – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда любое конечномерное линейное представление $\rho:\, G \to GL_n\left(K\right)$ группы G однозначно определяется набором элементов $\left(\rho\left(g_1\right), \ldots, \rho\left(g_m\right)\right) \in GL_n(K)^m$. Эти элементы удовлетворяют

Образец цитирования:
Адмиралова АН, Беняш-Кривец ВВ. О многообразиях представлений некоторых HNN-расширений свободных групп. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:10–16.

For citation:
Admiralova AN, Beniash-Kryvets VV. On representation varieties of some HNN-extensions of free groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:10–16. Russian.

Авторы:
Александра Николаевна Адмиралова – аспирантка кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета. Научный руководитель – В. В. Беняш-Кривец.
Валерий Вацлавович Беняш-Кривец – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета.

Authors:
Alexandra N. Admiralova, postgraduate student at the department of higher algebra and information security, faculty of mathematics and mechanics.
al.admiralova@gmail.com
Valery V. Beniash-Kryvets, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of higher algebra and information security, faculty of mathematics and mechanics.
benyash@bsu.by

всем определяющим соотношениям G, и, таким образом, имеет место вложение $\rho \mapsto \left(\rho\left(g_1\right), \ldots, \rho\left(g_m\right)\right)$ множества $\operatorname{Hom}\left(G, GL_n\left(K\right)\right)$ в $GL_n\left(K\right)^m$. Образ $\operatorname{Hom}\left(G, GL_n\left(K\right)\right)$ относительно этого вложения является аффинным K-многообразием $R_n\left(G\right) \subset GL_n\left(K\right)^m$, и это многообразие называют многообразием n-мерных представлений группы G [1].

О структуре многообразий $R_n\left(G\right)$ в общем случае известно немного. Однако для некоторых классов групп такие описания получены. В [2; 3] исследованы многообразия представлений фундаментальных групп компактных ориентируемых и неориентируемых поверхностей, в [4] – многообразия представлений и характеров групп Баумслага – Солитера $R_n\left(BS\left(p, q\right)\right)$ для взаимно простых p и q. В [5] результаты работы [4] расширены на случай не взаимно простых показателей p и q. В [6] описаны структура и свойства многообразий представлений и характеров групп, имеющих копредставление

$$G = \left\langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g, t \,\middle|\, t\left(\left[x_1, y_1\right]\ldots\left[x_g, y_g\right]\right)^p t^{-1} = \left(\left[x_1, y_1\right]\ldots\left[x_g, y_g\right]\right)^q \right\rangle, \tag{1}$$

где p и q взаимно просты.

В данной статье рассматриваются многообразия представлений еще нескольких классов групп с одним соотношением, представляющих собой HNN-расширения свободных групп. Напомним определение HNN-расширения.

Определение. Пусть группа G имеет копредставление $G = \langle S | R \rangle$, $\alpha : H \to K$ – изоморфизм двух подгрупп G, t – символ, не принадлежащий порождающему множеству S. Положим

$$G *_\alpha = \left\langle S, t \,\middle|\, R, tht^{-1} = \alpha(h), \forall h \in H \right\rangle.$$

Группа $G *_\alpha$ называется HNN-расширением G относительно α. Исходную группу G называют базисной группой, группы H и K – связанными подгруппами в G.

Очевидно, что группы с копредставлением (1), рассмотренные в [6], также являются HNN-расширениями. Базисной группой является свободная группа с $2g$ образующими $x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g$, а в качестве связанных подгрупп в этом случае выступают бесконечные циклические группы, порожденные степенями p и q слов вида $\left[x_1, y_1\right]\ldots\left[x_g, y_g\right]$.

В этой статье исследуются многообразия представлений групп, имеющих копредставление

$$G\left(p, q\right) = \left\langle x_1, \ldots, x_g, t \,\middle|\, t\left(x_1^2 \ldots x_g^2\right)^p t^{-1} = \left(x_1^2 \ldots x_g^2\right)^q \right\rangle,$$

при этом $g \geq 3$ и $p > |q| \geq 1$.

Введем некоторые необходимые обозначения. Через d обозначим наибольший общий делитель p и q, через $\Omega\left(p, q\right)$ – множество матриц $A \in GL_n\left(K\right)$ таких, что A^p и A^q сопряжены. Для матрицы $A \in \Omega\left(p, q\right)$ зададим многообразие $L(A)$ следующим образом:

$$L(A) = \left\langle \left(x_1, \ldots, x_g\right) \in GL_n(K)^g \mid x_1^2 \ldots x_g^2 = A \right\rangle,$$

и через n_A будем обозначать количество неприводимых компонент многообразия $L(A)$.

О структуре $L(A)$ известно следующее [7].

Предложение 1. *Пусть $g \geq 3$. Справедливы утверждения:*

1. Если $\left(n, g\right) \neq \left(2, 3\right)$ либо $\left(n, g\right) = \left(2, 3\right)$ и A не является скалярной матрицей, то $L\left(A\right)$ состоит из двух непересекающихся рациональных компонент $L_1\left(A\right), L_2\left(A\right)$ размерности $\left(g-1\right)n^2$. При этом регулярная функция $\det x_1 x_2 \ldots x_g$ на компоненте $L_1(A)$ принимает значение α, на компоненте $L_2(A)$ – значение $-\alpha$, где $\alpha^2 = \det A$.

2. Если $n = 2$, $g = 3$ и $A = \alpha E_2$ – скалярная матрица, то $L\left(A\right)$ состоит из трех рациональных компонент размерности 8. При этом на компонентах $L_1\left(A\right), L_2\left(A\right)$ регулярные функции $\operatorname{tr} x_1, \operatorname{tr} x_2, \operatorname{tr} x_3$ являются ненулевыми, а регулярная функция $\det x_1 x_2 \ldots x_g$ на компоненте $L_1\left(A\right)$ принимает значение α, на компоненте $L_2\left(A\right)$ – значение $-\alpha$. На компоненте $L_3\left(A\right)$ регулярные функции $\operatorname{tr} x_1, \operatorname{tr} x_2, \operatorname{tr} x_3$ являются нулевыми.

Для матрицы $A \in GL_n\left(K\right)$ обозначим через $Z\left(A\right)$ ее централизатор. Пусть $A \in \Omega\left(p, q\right)$, t_0 – некоторая фиксированная матрица, для которой справедливо равенство

$$t_0 A^p t_0^{-1} = A^q. \tag{2}$$

Отметим, что в силу леммы 2.3 из [4] совпадают централизаторы:

$$Z\left(A^d\right) = Z\left(A^p\right) = Z\left(A^q\right). \tag{3}$$

Для каждой пары матриц A, t_0 и числа i, $1 \le i \le n_A$, рассмотрим морфизм

$$f_{A,i,t_0} : L_i(A) \times Z(A^d) \times GL_n(K) \to GL_n(K)^{g+1},\ (x_1, \ldots, x_g,\ z,\ T) \to\ T(x_1, \ldots, x_g,\ t_0 z)T^{-1}.$$

Докажем следующие утверждения о свойствах морфизма f_{A,i,t_0}.

Лемма 1. *Образ морфизма* $\operatorname{Im} f_{A,i,t_0}$ *содержится в многообразии* $R_n(G(p, q))$.

Доказательство. Для произвольного набора $T(x_1, \ldots, x_g, t_0 z)T^{-1} \in \operatorname{Im} f_{A,i,t_0}$ имеем

$$T(t_0 z)T^{-1}\left(\left(Tx_1T^{-1}\right)^2 \ldots \left(Tx_gT^{-1}\right)^2\right)^p T(t_0 z)^{-1} T^{-1} = Tt_0 z\left(x_1^2 \ldots x_g^2\right)^p z^{-1} t_0^{-1} T^{-1} = T t_0 z A^p z^{-1} t_0^{-1} T^{-1}. \tag{4}$$

Так как $z \in Z(A^d)$, то в силу (3) правая часть (4) преобразуется к виду $Tt_0 A^p t_0^{-1} T^{-1} = TA^q T^{-1}$. С другой стороны, имеем равенство $\left(\left(Tx_1T^{-1}\right)^2 \ldots \left(Tx_gT^{-1}\right)^2\right)^q = T\left(x_1^2 \ldots x_g^2\right)^q T^{-1} = TA^q T^{-1}$. Это означает, что точка $T(x_1, \ldots, x_g, t_0 z)T^{-1}$ принадлежит многообразию $R_n(G(p, q))$, что и завершает доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Образ морфизма* $\operatorname{Im} f_{A,i,t_0}$ *не зависит от выбора матрицы* t_0.

Доказательство. Пусть t_1, $t_1 \ne t_0$, – другая матрица, для которой также справедливо равенство $t_1 A^p t_1^{-1} = A^q$, и f_{A,i,t_0}, f_{A,i,t_1} – соответствующие морфизмы. Тогда с учетом (2) имеем $t_1^{-1} t_0 A^p t_0^{-1} t_1 = A^p$, откуда следует, что $t_1^{-1} t_0 \in Z(A^p)$. Поэтому для любого элемента централизатора $z_0 \in Z(A^d)$ в силу равенств (3) получим $z_1 = t_1^{-1} t_0 z_0 \in Z(A^d)$ и $t_0 z_0 = t_1 z_1$. Следовательно, для любого упорядоченного набора $(x_1, \ldots, x_g,\ T) \in L_i(A) \times GL_n(K)$ выполняется равенство $f_{A,i,t_0}(x_1, \ldots, x_g, z_0, T) = f_{A,i,t_1}(x_1, \ldots, x_g, z_1, T)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, ввиду независимости $\operatorname{Im} f_{A,i,t_0}$ от выбора матрицы t_0 далее для образов морфизмов f_{A,i,t_0} будем использовать обозначение $\operatorname{Im} f_{A,i}$. Замыкание образа $\operatorname{Im} f_{A,i}$ в топологии Зарисского обозначим $W_i(A)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *1. Каждое многообразие* $W_i(A)$ *является неприводимой компонентой* $R_n(G(p, q))$, *и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты* $R_n(G(p, q))$.

2. Размерность компоненты $W_i(A)$ *равна* $(g+1)n^2 + \dim Z(A^d) - \dim Z(A)$.

3. Число неприводимых компонент многообразия $R_n(G(p, q))$ *равно* $\sum_{A \in X} n_A$, *где* X *– множество представителей всех классов сопряженности в* $\Omega(p, q)$.

Для доказательства теоремы 1 необходим ряд лемм.

Лемма 3. *Многообразие* $R_n(G(p, q))$ *является объединением всех своих замкнутых неприводимых подмножеств вида* $W_i(A)$.

Доказательство. Многообразие $W_i(A)$ неприводимо как замыкание образа неприводимого многообразия относительно регулярного морфизма. Покажем, что многообразия $W_i(A)$ покрывают $R_n(G(p, q))$. Рассмотрим произвольную точку $(x_1, \ldots, x_g,\ t) \in R_n(G(p, q))$. Пусть $\tilde{A} = x_1^2 \ldots x_g^2$. Тогда $\tilde{A} \in \Omega(p, q)$ и найдется такая неприводимая компонента $L_k(\tilde{A})$, что $(x_1,\ \ldots,\ x_g) \in L_k(\tilde{A})$. Легко проверить, что в таком случае точка $(x_1, \ldots, x_g,\ t)$ является образом упорядоченного набора $(x_1, \ldots, x_g,\ E,\ E) \in L_k(\tilde{A}) \times Z(\tilde{A}^d) \times GL_n(K)$ относительно морфизма $f_{\tilde{A},k,t}$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если* $A, B \in \Omega(p, q)$ *– подобные матрицы, то при подходящей нумерации* $W_i(A) = W_i(B)$, $1 \le i \le n_A$.

Доказательство. Пусть $B = SAS^{-1}$. Тогда для всякой матрицы t_0 такой, что $t_0 A^p t_0^{-1} = A^q$, справедливо равенство $\left(St_0S^{-1}\right)B^p\left(St_0S^{-1}\right)^{-1} = B^q$. Отображение

$$f : L(A) \to L(B),\ (x_1, \ldots, x_g) \mapsto S(x_1, \ldots, x_g)S^{-1},$$

очевидно, является бирегулярным изоморфизмом. Положим $L_i(B) = f(L_i(A))$. Рассмотрим произвольную точку $(x_1, \ldots, x_g, z, T) \in L_i(A) \times Z(A^d) \times GL_n(K)$. Тогда так как $Z(A^d) = S^{-1} Z(B^d) S$, то

$$\left(S^{-1}x_1S, \ldots, S^{-1}x_gS,\ S^{-1}zS,\ TS\right) \in L_i(B) \times Z(B^d) \times GL_n(K)$$

$$\text{и}\ \ f_{A,i,t_0}(x_1, \ldots, x_g, z, T) = f_{B,i,S^{-1}t_0S}\left(S^{-1}x_1S, \ldots, S^{-1}x_gS,\ S^{-1}zS,\ TS\right).$$

Значит, $\operatorname{Im} f_{A,i} \subset \operatorname{Im} f_{B,i}$. Аналогично доказывается противоположное включение. Таким образом, $\operatorname{Im} f_{A,i} = \operatorname{Im} f_{B,i}$, следовательно, переходя к замыканиям, получим, что $W_i(A) = W_i(B)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если матрицы* $A, B \in \Omega(p, q)$ *не подобны, то многообразия* $W_i(A)$ *и* $W_j(B)$ *не содержатся друг в друге.*

Доказательство. Для доказательства понадобится описание многообразий представлений групп Баумслага – Солитера $R_n(BS(p, q))$ [5]. Пусть $A \in \Omega(p, q)$ – фиксированная матрица, $A_1 = A^d$, где $d = (p, q)$ – наибольший общий делитель p и q, $t_0 \in GL_n(K)$ – такая матрица, что $t_0 A_1^{p_1} t_0^{-1} = A_1^{q_1}$, где $p_1 = \dfrac{p}{d}$, $q_1 = \dfrac{q}{d}$. Рассмотрим отображение

$$g_A : Z(A_1) \times GL_n(K) \to GL_n(K) \times GL_n(K), (Z, X) \mapsto \left(XAX^{-1}, Xt_0ZX^{-1}\right).$$

Обозначим через $H(A)$ замыкание в топологии Зарисского образа $\operatorname{Im} g_A$. В [5] доказано, что многообразия $H(A)$ являются в точности неприводимыми компонентами $R_n(BS(p, q))$, и если матрицы A и B не подобны, то многообразия $H(A)$ и $H(B)$ не содержатся друг в друге.

Рассмотрим морфизм

$$\alpha : R_n(G) \to R_n(BS(p, q)),\ \alpha(x_1, \dots, x_g, t) = \left(x_1^2 \dots x_g^2, t\right).$$

Поскольку для произвольной точки $z = (x_1, \dots, x_g, t) \in \operatorname{Im} F_{A,i}$ справедливо $\alpha(z) \in H(A)$ и $\operatorname{Im} f_{A,i}$ плотно в $W_i(A)$, то $\alpha(W_i(A)) \subset H(A)$, $1 \le i \le n_A$. Покажем, что $\alpha(W_i(A))$ плотно в $H(A)$. Рассмотрим произвольную точку $y = g_A(Z, X) = X(A, t_0 Z)X^{-1} \in \operatorname{Im} g_A$. Тогда для любой точки $(x_1, \dots, x_g) \in L_i(A)$ имеем

$$\alpha \circ f_{A,i,t_0}(x_1, \dots, x_g, Z, X) = X\left(x_1^2, \dots, x_g^2, t_0 Z\right)X^{-1} = X(A, t_0 Z)X^{-1} = y.$$

Значит, $\alpha(W_i(A)) \supset \operatorname{Im} g_A$, следовательно, $\alpha(W_i(A))$ является плотным подмножеством в $H(A)$.

Допустим теперь, что матрицы $A, B \in \Omega(p, q)$ не подобны, но имеет место включение $W_i(A) \supset W_j(B)$. Тогда $\alpha(W_i(A)) \supset \alpha(W_j(B))$ и $H(A) = \overline{\alpha(W_i(A))} \supset \overline{\alpha(W_j(B))} = H(B)$. Приходим к противоречию. Следовательно, многообразия $W_i(A)$ и $W_j(B)$ не содержатся друг в друге. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Размерность многообразия* $W_i(A)$ *равна* $g^2 n + \dim Z\left(A^d\right) - \dim Z(A)$.

Доказательство. Для вычисления размерности $W_i(A)$ воспользуемся теоремой о размерности слоев морфизма. Пусть $w_0 = f_{A,i,t_0}(x_1, \dots, x_g, z_0, T_0)$. Найдем $\dim f_{A,i,t_0}^{-1}(w_0)$. Пусть $u = (y_1, \dots, y_g, z, T)$ и $f_{A,i,t_0}(u) = w_0$. Тогда справедливо равенство

$$T_0(x_1, \dots, x_g, t_0 z_0)T_0^{-1} = T(y_1, \dots, y_g, t_0 z)T^{-1}. \tag{5}$$

В результате имеем систему уравнений

$$y_i = T^{-1}T_0 x_i T_0^{-1}T,\ 1 \le i \le g. \tag{6}$$

Поскольку для точек $(x_1, \dots, x_g), (y_1, \dots, y_g) \in L_i(A)$ справедливо

$$x_1^2 \dots x_g^2 = y_1^2 \dots y_g^2 = A, \tag{7}$$

то из (6), (7) вытекает равенство $A = T_0^{-1}TAT^{-1}T_0$. Следовательно, $T_0^{-1}T \in Z(A)$, откуда

$$T = T_0 Z_1, \tag{8}$$

где $Z_1 \in Z(A)$. Тогда

$$y_i = Z_1^{-1} x_i Z_1,\ 1 \le i \le g, \tag{9}$$

и из равенств (5) и (8) получим $t_0 z_0 = Z_1 t_0 z Z_1^{-1}$, а значит,

$$z = t_0^{-1} Z_1^{-1} t_0 z_0 Z_1. \tag{10}$$

Проверим, что элемент z, определяемый формулой (10), принадлежит $Z\left(A^d\right)$. Поскольку $Z\left(A^d\right) = Z\left(A^p\right) = Z\left(A^q\right)$ в силу (3), то следующее вычисление показывает, что $z \in Z\left(A^d\right)$:

$$zA^p z^{-1} = \left(t_0^{-1} Z_1^{-1} t_0 z_0 Z_1\right) A^p \left(Z_1^{-1} z_0^{-1} t_0^{-1} Z_1 t_0\right) = t_0^{-1} Z_1^{-1} t_0 A^p t_0^{-1} Z_1 t_0 = t_0^{-1} Z_1^{-1} A^q Z_1 t_0 = t_0^{-1} A^q t_0 = A^p.$$

Из (8)–(10) следует, что слой $f_{A,i,t_0}^{-1}(w_0)$ изоморфен $Z(A)$. Следовательно, все слои морфизма f_{A,i,t_0} имеют одинаковую размерность, равную $\dim Z(A)$. Поэтому с учетом предложения 1 размерность многообразия $W_i(A)$ равна

$$\dim W_i(A) = \left(\dim L_i(A) + \dim Z\left(A^d\right) + \dim GL_n(K)\right) - \dim Z(A) = gn^2 + \dim Z\left(A^d\right) - \dim Z(A).$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. $W_i(A) \neq W_j(A)$ *при* $i \neq j$.

Доказательство. Вначале исследуем случай $(g, n) \neq (3, 2)$ либо $(g, n) = (3, 2)$ и матрица A не скалярна. В этом случае многообразие $L(A)$ содержит 2 неприводимые компоненты. Рассмотрим регулярную функцию

$$\varphi : R_n(G(p, q)) \to K, \left(x_1, x_2, \ldots, x_g, t\right) \mapsto \det\left(x_1 x_2 \ldots x_g\right). \tag{11}$$

По предложению 1 на множествах $\operatorname{Im} f_{A,1}$ и $\operatorname{Im} f_{A,2}$ функция φ принимает значение β и $-\beta$ соответственно, где $\beta^2 = \det A$. Следовательно, φ принимает значение β и $-\beta$ соответственно на многообразиях $W_1(A)$ и $W_2(A)$, поэтому $W_1(A) \cap W_2(A) = \varnothing$.

Пусть теперь $(g, n) = (3, 2)$ и матрица A скалярна. Тогда многообразие $L(A)$ содержит 3 неприводимые компоненты и по лемме 6 размерности многообразий $W_1(A), W_2(A), W_3(A)$ равны 12. В силу предложения 1 регулярная функция φ, определенная в (11), принимает значение β и $-\beta$ соответственно на многообразиях $W_1(A)$ и $W_2(A)$, поэтому $W_1(A) \cap W_2(A) = \varnothing$.

Остается доказать, что $W_3(A)$ не совпадает ни с $W_1(A)$, ни с $W_2(A)$. Допустим, что $W_1(A) = W_3(A)$. Рассмотрим регулярную функцию

$$\psi : R_n(G(p, q)) \to K, \ \left(x_1, x_2, x_3, t\right) \mapsto \operatorname{tr} x_1.$$

Из предложения 1 следует, что функция ψ на $\operatorname{Im} f_{A,3}$ тождественно равна нулю. Так как $\operatorname{Im} f_{A,3}$ – плотное подмножество в $W_1(A) = W_3(A)$, то функция ψ тождественно равна нулю на $W_1(A)$, а значит, и на $\operatorname{Im} f_{A,1}$, что противоречит предложению 1. Поэтому $W_1(A) \neq W_3(A)$. Аналогично $W_2(A) \neq W_3(A)$. Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 3–7.

Теорема 2. *Каждая неприводимая компонента* $W_i(A)$ *многообразия* $R_n(G(p, q))$ *является рациональным многообразием.*

Доказательство. Введем необходимые обозначения. $(m \times n)$-Матрицу X будем называть правильной верхней треугольной, если она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_1 \end{pmatrix} \ \text{при } m \leq n \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \ \text{при } m \geq n.$$

Без ограничения общности можно считать, что A имеет жорданову нормальную форму $A = \operatorname{diag}\left(A_1, \ldots, A_s\right)$, где $A_i = \operatorname{diag}\left(J_{m_{i,1}}\left(\alpha_i\right), \ldots, J_{m_{i,s_i}}\left(\alpha_i\right)\right)$ – $\left(n_i \times n_i\right)$-матрица, являющаяся прямой суммой всех клеток Жордана $J_{m_{i,j}}\left(\alpha_i\right)$ из A с собственным значением α_i. Тогда централизатор $Z(A)$ состоит из невырожденных матриц вида

$$C = \operatorname{diag}\left(C_1, \ldots, C_s\right), \text{ где } C_i = \begin{pmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1, s_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{s_i, 1} & \cdots & X_{s_i, s_i} \end{pmatrix} \tag{12}$$

и X_{rt} – произвольная правильная верхняя треугольная $\left(m_{i,r} \times m_{i,t}\right)$-матрица (см. [8, гл. VIII]). Рассмотрим множество $T(A)$ матриц вида $Y = \left(Y_{ij}\right) \in GL_n(\mathbb{C})$, где Y_{ij} при $i \neq j$ – произвольная $\left(n_i \times n_j\right)$-матрица, Y_{ii} – блочная матрица вида

$$Y_{ii} = \begin{pmatrix} Z_{11}^{(i)} & \ldots & Z_{1, s_i}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{s_i, 1}^{(i)} & \cdots & Z_{s_i, s_i}^{(i)} \end{pmatrix},$$

блоки которой описываются следующим образом. Матрица $Z_{rr}^{(i)}$ размером $m_{ir} \times m_{ir}$ имеет вид

$$Z_{rr}^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2,\, m_{ir}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m_{ir},\, 1} & u_{m_{ir},\, 2} & \dots & u_{m_{ir},\, m_{ir}} \end{pmatrix}.$$

Если же $r \neq k$, то $Z_{rk}^{(i)}$ – матрица размером $m_{ir} \times m_{ik}$ следующего вида: при $m_{ir} \leq m_{ik}$

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1,\, m_{ik} - m_{ir}} & 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{2,\, m_{ik}} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ w_{m_{ir},\, 1} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{m_{ir},\, m_{ik}} \end{pmatrix},$$

при $m_{ir} \geq m_{ik}$

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & w_{2,\, m_{ik}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m_{ir},\, 1} & \dots & w_{m_{ir},\, m_{ik}} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\dim T(A) = n^2 - \dim Z(A)$. Обозначим через $h_{A,\, i,\, t_0}$ ограничение морфизма $f_{A,\, i,\, t_0}$ на $L_i(A) \times Z\left(A^d\right) \times T(A)$. Несложное вычисление показывает, что $h_{A,\, i,\, t_0}$ – инъективный морфизм. Действительно, если $h_{A,\, i,\, t_0}\left(x_1, \dots, x_g, Z_1, T_1\right) = h_{A,\, i,\, t_0}\left(x_1', \dots, x_g', Z_2, T_2\right)$, то

$$T_1\left(x_1, \dots, x_g, t_0 Z_1\right)T_1^{-1} = T_2\left(x_1', \dots, x_g', t_0 Z_2\right)T_2^{-1}. \tag{13}$$

Значит, $T_1 x_i T_1^{-1} = T_2 x_i T_2^{-1}$, $1 \leq i \leq g$, откуда

$$T_1 x_1^2 \dots x_g^2 T_1^{-1} = T_2 x_1'^2 \dots x_g'^2 T_2^{-1}.$$

Следовательно, $T_1 A T_1^{-1} = T_2 A T_2^{-1}$, поэтому $T_2 = T_1 B$ для некоторой матрицы $B \in Z(A)$. Учитывая вид (12) матриц из централизатора $Z(A)$ и вид матриц из $T(A)$, получим $B = E$ и, следовательно, $T_1 = T_2$. Тогда (13) влечет $x_i' = x_i, 1 \leq i \leq g$, и $Z_1 = Z_2$, что и доказывает инъективность $h_{A,\, i,\, t_0}$.

Так как $\dim L_i(A) \times Z\left(A^d\right) \times T(A) = \dim W_i(A)$, то морфизм $h_{A,\, i,\, t_0}$ доминантен. Значит, $h_{A,\, i,\, t_0}$ – бирациональный изоморфизм и $W_i(A)$ бирационально изоморфно многообразию $L_i(A) \times Z\left(A^d\right) \times T(A)$. По предложению 1 $L_i(A)$ рационально и, очевидно, $Z\left(A^d\right)$ и $T(A)$ также рациональны. Следовательно, $W_i(A)$ – рациональное многообразие. Теорема 2 доказана.

Библиографические ссылки

1. Lubotzky A, Magid AR. Varieties of Representations of Finitely Generated Groups. [Providence, Rhode Island]: American Mathematical Society; 1985. (American Mathematical Society: Memoirs of the American Mathematical Society; volume 336). 117 p.

2. Rapinchuk AS, Benyash-Krivetz VV, Chernousov VI. Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces. *Israel Journal of Mathematics*. 1996; 93(1):29–71. DOI: 10.1007/BF02761093.

3. Беняш-Кривец ВВ, Черноусов ВИ. Многообразия представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей. *Математический сборник*. 1997;188(7):47–92. DOI: 10.4213/sm242.

4. Беняш-Кривец ВВ, Говорушко ИО. Многообразия представлений и характеров групп Баумслага – Солитера. *Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН*. 2016;292:26–42. DOI: 10.1134/S0371968516010039.

5. Беняш-Кривец ВВ, Говорушко ИО. Многообразия представлений групп Баумслага – Солитера в случае не взаимно простых показателей. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. 2016;1:52–56.

6. Адмиралова АН, Беняш-Кривец ВВ. О многообразиях представлений и характеров одного класса групп с одним соотношением. *Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2016;3:166–172.

7. Беняш-Кривец ВВ. Многообразия представлений неевклидовых кристаллографических групп. *Доклады НАН Беларуси*. 2000;44(4):37–40.

8. Гантмахер ФР. *Теория матриц*. Москва: Наука; 1967.

References

1. Lubotzky A, Magid AR. Varieties of Representations of Finitely Generated Groups. [Providence, Rhode Island]: American Mathematical Society; 1985. (American Mathematical Society: Memoirs of the American Mathematical Society; volume 336). 117 p.

2. Rapinchuk AS, Benyash-Krivetz VV, Chernousov VI. Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces. *Israel Journal Mathematics*. 1996; 93(1):29–71. DOI: 10.1007/BF02761093.

3. Benyash-Krivets VV, Chernousov VI. Representation varieties of the fundamental groups of non-orientable surfaces. *Matematicheskii sbornik.* 1997;188(7):47–92. Russian. DOI: 10.4213/sm242.

4. Benyash-Krivets VV, Govorushko IO. Representation and character varieties of the Baumslag – Solitar groups. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova RAN*. 2016;292:26–42. Russian. DOI: 10.1134/S0371968516010039.

5. Benyash-Krivets VV, Govorushko IO. Mnogoobraziya predstavlenii grupp Baumslaga – Solitera v sluchae ne vzaimno prostykh pokazatelei [On representation varieties of Baumslag – Solitar groups in the case of not-coprime powers]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2016;1:52–56. Russian.

6. Admiralova AN, Beniash-Krivets VV. On representations varieties and characters of one class groups with one relation. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika*. 2016;3:166–172. Russian.

7. Benyash-Krivets VV. Representation varieties of non-Euclidean crystallographic groups. *Doklady NAN Belarusi.* 2000;44(4): 37–40. Russian.

8. Gantmacher FR. *The theory of matrices.* Moscow: Nauka; 1967. Russian.

Статья поступила в редколлегию 15.03.2018.
Received by editorial board 15.03.2018.