

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г. А. Медведев

ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА
ДОХОДНОСТИ
В ДИФФУЗИОННЫХ МОДЕЛЯХ
ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

МИНСК
БГУ
2018

УДК 336.763.055.4(075.8)

Медведев, Г. А. Временная структура доходности в диффузионных моделях процентных ставок / Г. А. Медведев. – Минск : БГУ, 2018. – 203 с. – ISBN 978-985-566-568-8.

Представлены результаты исследований свойств случайных процессов диффузионного типа, используемых для описания динамики краткосрочных процентных ставок и построения математических моделей кривых бескупонной доходности до погашения и форвардных кривых в интересах определения рыночных цен финансовых активов и финансовых производных.

Для специалистов, занимающихся стохастическим финансовым анализом, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов математических и экономических специальностей.

Табл. 7. Ил. 36. Библиогр. 78 назв.

*Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Белорусского государственного университета*

Рецензенты:
доктор экономических наук, доцент *Э. М. Аксень*;
доктор физико-математических наук, профессор *М. А. Маталыцкий*

ISBN 978-985-566-568-8

© Медведев Г. А., 2018
© БГУ, 2018

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи современной финансовой экономики требуют использования математических методов при описании процессов изменения рыночных показателей и формирования оптимальной деятельности инвесторов на рынке. Причем проблемы, к которым приводят эти методы, оказываются достаточно сложными, и для их решения требуется применение информационных и компьютерных технологий. Одна из таких проблем, решаемых финансовой экономикой, – проблема инвестиций, ее можно кратко сформулировать так: куда и как лучше вложить свободные деньги.

Когда рынок прозрачен и стабилен, точнее детерминирован, тогда в силу уже сложившихся правил и законов финансового рынка установлено, что участник рынка, вложивший в некоторый момент времени определенную сумму в некоторый финансовый проект (контракт) заданной продолжительности, получит после его выполнения сумму, рассчитываемую через интенсивность получения дохода с течением времени. Ее принято называть процентной ставкой доходности. Таким образом, когда процентная ставка доходности известна, а на рынке не происходит непредвиденных событий (рынок детерминирован), проблема расчетов дохода проста.

Однако когда рыночная ситуация неопределенна, а процентные ставки стохастичны, найти стоимость финансовых контрактов становится сложной задачей. На реальном финансовом рынке значения процентной ставки в последовательные интервалы времени образуют стохастический процесс, строгое математическое описание которого представляет большие, пока не преодоленные трудности. В простой постановке непрерывного времени можно потребовать, чтобы процесс имел непрерывные выборочные траектории. Другое требование связано со следующим обстоятельством: если рыночное состояние фиксированно, то будущее развитие рынка должно определяться только этим состоянием. Иначе говоря, в упрощенной постановке процессы развития процентных ставок, а также и цен финансовых контрактов описываются марковскими процессами с непрерывными выборочными траекториями. Случайные процессы, называемые диффузионными, относятся к классу таких процессов.

После того как такая точка зрения была принята финансовыми аналитиками, появилась масса научных статей, в которых исследовались проблемы стохастической динамики моделей показателей финансового рынка. Число предложенных моделей было настолько велико, а их свойства оказались настолько разнообразными, что до сих пор много проблем не разрешены, поэтому интерес к исследованию стохастических моделей динамики финансового рынка и задач анализа денежных потоков в этих условиях не ослабевает.

В монографии представлены результаты исследований автора, полученные в последние годы в рамках выполнения заданий государственных программ научных исследований:

- Государственная программа научных исследований на 2011–2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»). Подпрограмма «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук». Задание «Разработка методов исследования случайных процессов диффузионного типа в финансовом анализе и устойчивых последовательных статистических процедур принятия решений при наличии искажений в наблюдениях»;

- Государственная программа научных исследований на 2016–2020 годы «Конвергенция 2020». Подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем». Задание «Разработка вероятностно-статистических методов построения и анализа последовательных решающих правил для сложных стохастических данных и оптимальных инвестиционных решений на финансовом рынке в условиях неопределенности».

Материалы, включенные в книгу, объединены в одиннадцать глав, содержание которых подробно описано во введении. В них представлены результаты, полученные автором в течение 2012–2017 гг. и опубликованные в более чем 20 журнальных статьях, перечень которых приведен в списке литературы.

Автор выражает глубокую признательность докторам наук Э. М. Аксению и М. А. Маталыцкому за рецензирование рукописи.

Предложения и замечания просьба направлять по адресу: факультет прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Республика Беларусь; e-mail: MedvedevGA@bsu.by.

Процессы краткосрочных процентных ставок порождают изменения многих рыночных индексов, а также лежат в основе определения стоимости рыночных активов и торговых контрактов. Особую роль они играют при расчетах временной структуры доходности, поэтому разработка математических моделей таких процессов крайне интересна для финансовых аналитиков и исследователей рыночных проблем. Существует много версий изменения краткосрочных безрисковых процентных ставок в рамках теории диффузионных процессов. Однако до сих пор нет модели, которая была бы основой для построения временной структуры доходности, близкой к существующей на реальном финансовом рынке. Представляет интерес проанализировать существующие модели в целях выяснения их особенностей в вероятностном смысле более подробно, чем это делалось их создателями и пользователями. Для этого в главе 1 рассматриваются маргинальные плотности вероятностей процессов диффузионного типа, порождаемых шестнадцатью моделями краткосрочных процентных ставок, допускающих получение плотностей в аналитической форме.

Некоторые модели, такие как модели Васичека, Кокса – Ингерсолла – Росса, геометрического броуновского движения, Ана – Гао, достаточно полно представлены в имеющейся литературе, но тем не менее их свойства приведены здесь для удобства сравнения с другими, менее известными или неисследованными моделями. Другие плотности описываются впервые. Предлагаемый читателю анализ будет полезен для выяснения наиболее подходящих моделей краткосрочной ставки при определении временной структуры бескупонной доходности, приближающей реально наблюдаемую по возможности наилучшим образом.

Схема анализа сводится к тому, что с помощью прямого уравнения Колмогорова выводится стационарная плотность вероятностей,

при необходимости обсуждаются ее особенности и вычисляются первые четыре момента, обычно интересных на практике. Показано, что для рассмотренных моделей коэффициенты асимметрии и эксцесса, определяемые моментами третьего и четвертого порядка, зависят от единственного параметра, называемого параметром формы плотности, который, в свою очередь, определяется только отношением дисперсии к квадрату математического ожидания (это соответствует квадрату «коэффициента вариации»). В основном рассматривались стационарные плотности и моменты, хотя несколько моделей порождают нестационарные процессы.

Временной структурой, интересной для практиков и исследователей, является номинальная кривая доходности, представляющая доходность до погашения на номинальные облигации (т. е. облигации, продающиеся по номинальной стоимости и имеющие купоны с такой же доходностью). Временная структура процентных ставок играет ключевую роль при определении цен облигаций, поэтому ее свойства интересуют многих финансовых аналитиков. Однако в имеющейся литературе обычно встречается схематичное описание этих свойств. В предлагаемой книге делается попытка детального описания всех возможных форм временной структуры для класса аффинных моделей процентных ставок, поскольку для этих моделей можно записать решения в явной форме. Определение номинальной кривой доходности основывается на наблюдении находящихся в обращении государственных ценных бумаг, только что проданных на аукционе и наиболее ликвидных. Эти ценные бумаги в странах с развитой экономикой выпускаются для 10 начальных сроков погашения. Они обычно продаются по номинальной стоимости, и их доходности называются доходностями номинальных облигаций. Определение временной структуры процентных ставок сводится к тому, что, имея только 10 находящихся в обращении номинальных доходностей, непосредственно наблюдаемых на рынке, и используя другую информацию, содержащуюся в описании этих ценных бумаг, необходимо сконструировать функцию, позволяющую вычислять доходность для любого срока до погашения. В главе 2 исследуются свойства таких характеристик временной структуры процентных ставок, как кривые доходности и форвардные ставки в случае, когда используется аффинная модель доходности. В отличие от известных подходов анализируются не только однофакторные, но и многофакторные модели. Кроме того, рассматривается как диапазон коротких и средних сроков погашения активов, так и длительные сроки. Для многофакторных моделей аффинной доходности найдены аналитические представления кривых доходности и форвардных кривых. При этом в качестве временной переменной предлагается использовать дюра-

цию безрисковой ставки, что дает возможность сравнения кривых доходности и форвардных кривых на всем неограниченном интервале изменения сроков погашения активов.

В главе 3 изучаются свойства кривых доходности до погашения и кривых форвардных ставок для многофакторных и трех конкретных двухфакторных моделей Васичека, дается их сравнение и приводится численный пример, основанный на анализе реальных данных.

В главе 4 продолжается исследование аффинной временной структуры процентных ставок доходности с помощью кривых доходности и форвардных кривых в случае, когда используется модель Кокса – Ингерсолла – Росса. Анализируются не только однофакторные, но и многофакторные модели. Кривые доходности и форвардные кривые в качестве временной переменной используют дюрацию безрисковой ставки. Проводится численное сравнение результатов, основанных на моделях Васичека и Кокса – Ингерсолла – Росса.

Исторически первой популярной моделью динамики процентной ставки является модель Васичека, предложенная в 1977 г. Она рассмотрена в главе 3. В этой модели процентная ставка имеет нормальное распределение, что очевидно является экономически несостоятельным, так как по смыслу процентная ставка не может принимать отрицательных значений. Вместе с тем эта модель использовалась по той причине, что во многих случаях соотношение между средним значением и дисперсией реальных ставок таково, что вероятность появления их отрицательных значений оказывается очень малой. В то же время анализ модели Васичека и цен активов, основанных на ней, очень прост, так как приводит к линейным задачам. Позже, в 1985 г., Коксом, Ингерсоллом и Россом была предложена другая модель, называемая еще «моделью с квадратным корнем», в условиях которой процентная ставка принимает только неотрицательные значения и имеет распределение гамма. Анализ процентных ставок и цен активов, основанных на этой модели, также допускает аналитические результаты, но они существенно сложнее, так как предполагают решение нелинейных задач. Возможность получения аналитических результатов – главное преимущество аффинных моделей. Аналитические результаты важны, потому что иначе доходности должны вычисляться либо методами Монте-Карло, либо методами решения уравнений с частными производными. Оба эти подхода являются в вычислительном отношении трудоемкими, особенно когда параметры модели нужно оценивать, используя выборочные данные доходностей облигаций, поэтому литература по определению цен облигаций, начиная с работ Васичека и Кокса, Ингерсолла и Росса, сосредоточивала внимание на решениях в замкнутой форме. С практической точки зрения интересно рассмотреть проблему, касающуюся того, насколько

ко сильно различаются результаты, полученные с помощью этих моделей. Основная цель главы 4 – получение аналитических решений при анализе временной структуры процентных ставок доходности бескупонных облигаций, использующей модель Кокса – Ингерсолла – Росса в однофакторном и многофакторном вариантах. Приводится также сравнение кривых доходности и форвардных кривых, вытекающих из упомянутых выше моделей поведения краткосрочной процентной ставки.

Более общей по сравнению с упомянутыми выше является модель Даффи – Кана (Dk) с произвольной нижней границей для безрисковой (спот) процентной ставки. Однофакторная версия этой модели рассмотрена в главе 5. Результаты для моделей CIR и Васичека получаются как частные случаи. Для модели Dk найдены все возможные типы формы кривых доходности. Для однофакторной модели аффинной доходности Даффи – Кана найдены аналитические представления кривых доходности и форвардных кривых и исследованы их свойства, когда в качестве временной переменной используется мера дюрации безрисковой ставки. Показано, что для всего многообразия параметров существует только четыре возможных вида кривой доходности. Для малых сроков погашения актива доходность определяется в основном текущим уровнем безрисковой ставки, в то время как для очень продолжительных сроков до погашения доходность определяется стационарным математическим ожиданием безрисковой ставки. В связи с этим можно было бы ожидать, что влияние текущего уровня безрисковой ставки на доходность будет с увеличением времени затухать. Однако это не так. Оказалось, что текущий уровень безрисковой ставки существенным образом влияет на вид всей кривой доходности и форвардной кривой. Кривая доходности и форвардная кривая стартуют из одной точки и при увеличении срока до погашения стремятся к одному и тому же пределу. Это отличается от обычно принятой точки зрения, что с увеличением срока до погашения эти кривые расходятся.

Модели Даффи – Кана, описывающие динамику краткосрочной процентной ставки в случае, когда состояние финансового рынка характеризуется не только уровнем самой процентной ставки, но и еще одним другим изменяющимся во времени параметром, исследуются в главе 6. Рассматриваются два случая. В первом в качестве дополнительной переменной состояния берется локальное по времени среднее значение краткосрочной процентной ставки. Во втором случае в качестве дополнительной переменной состояния принята мгновенная дисперсия процентной ставки. Двухфакторные модели строятся таким образом, чтобы они приводили к аффинной временной структуре доходности. Основное внимание уделяется определению функ-

ций временной структуры. Поскольку получающиеся для этих функций уравнения не допускают аналитических решений, предлагается находить их аппроксимации. Ввиду того что в реальных случаях волатильность обычно мала, для этого используется метод малого параметра Пуанкаре.

Обычно рассматриваются модели процентной ставки, в которых краткосрочная ставка является единственной переменной состояния. Эти модели привлекательны тем, что часто дают возможность получать аналитические решения и обеспечивают относительно простой вычислительный анализ. Однако однофакторные модели имеют определенные недостатки. Основной из них состоит в том, что вся временная структура управляется только единственным значением краткосрочной ставки, зафиксированным в начальный момент построения временной структуры. А это представляется неразумным с экономической точки зрения. Для того чтобы избежать этого недостатка, авторы предлагают для моделирования динамики процентной ставки использовать более чем одну переменную состояния. При переходе от единственного фактора к нескольким должно быть улучшение аппроксимации временной структуры. Цена за это – потеря возможности получения аналитических решений, получение уравнений с частными производными с повышенной размерностью и усложнение процедуры получения результатов.

Двухфакторные модели строятся таким образом, чтобы они приводили к аффинной временной структуре доходности. Основное внимание уделяется определению функций временной структуры. Поскольку получающиеся для этих функций уравнения не допускают аналитических решений, предлагается находить их аппроксимации. Ввиду того что в реальных случаях волатильность обычно мала, для этого используется метод малого параметра Пуанкаре.

Однако свойства кривых на концах интервала выясняются аналитически. Для модели «ставка – ее локальное среднее» оказалось, что предельные свойства долгосрочных доходностей определяются только свойствами дополнительной переменной – локальным средним процентной ставки. Для модели «ставка – ее мгновенная дисперсия» выяснилось, что эта модель имеет экономический смысл только тогда, когда весовой коэффициент мгновенной дисперсии при определении краткосрочной ставки доходности равен нулю. Сравнение кривых доходности и форвардных кривых для однофакторной модели и двухфакторных моделей показывает, что при принятых параметрах эти кривые заметно различаются. Поскольку значения весовых коэффициентов существенно влияют на поведение кривых доходности и форвардных кривых, они должны оцениваться наряду с рыночными параметрами цены риска.

Три версии расширения однофакторной модели до трехфакторной, позволяющие получать аффинную временную структуру доходности, рассмотрены в главе 7. Эти версии предполагают, что параметры однофакторной модели – уровень возвращения процентной ставки и ее волатильность – не постоянные величины, а диффузионные процессы. В первой версии волатильность процесса уровня возвращения процентной ставки не зависит от самого уровня и является стохастической. Во второй версии процесс уровня возвращения процентной ставки является процессом «с квадратным корнем». В третьей версии волатильность процесса уровня возвращения процентной ставки не зависит от самого уровня и является детерминированной. Основное внимание уделяется свойствам кривой доходности и форвардной кривой, когда динамика краткосрочной процентной ставки описывается описанными трехфакторными моделями.

С увеличением числа факторов модели их анализ существенно усложняется, и получение результатов в аналитической форме становится невозможным. Численный анализ также усложняется, поскольку число параметров моделей растет, поэтому всестороннего сравнения моделей, их преимуществ и недостатков осуществить не удастся. По этой причине приводится только характер доходностей для одного набора параметров, найденных Д. Аном и Б. Гао при обработке реальных финансовых данных. Более широкое сравнение моделей предстоит еще сделать в будущем. Приведены данные о том, какие и сколько параметров используется для построения рассмотренных моделей.

В интервале изменения времени до погашения от нуля до бесконечности кривые доходности и форвардные кривые для всех моделей стартуют из общей точки – текущего значения спот ставки – и стремятся к соответствующим пределам, зависящим от параметров модели, но не зависящим от значений текущего уровня переменных состояния. Эти предельные значения в общем случае определяются не только параметрами модели, но и наборами весовых коэффициентов и параметров цен риска, что заметно усложняет формулы. Однако если считать, что краткосрочная ставка доходности актива определяется только спот ставкой, стохастические процессы ставки и ее мгновенной дисперсии нейтральны к риску, а нижние границы для процентной ставки и ее дисперсии равны нулю, то формулы для вычисления доходностей сильно упрощаются. Приводятся их явные аналитические выражения при этих предположениях.

Предельные значения доходностей могут рассматриваться как доходности долгосрочных ценных бумаг. Они не зависят от текущего значения переменных состояния, а зависят только от параметров модели. Для рассмотренного числового примера предельные значения доходностей уменьшаются с увеличением числа факторов. Бо-

лее обоснованные выводы могут быть сделаны после исследования доходностей во всей допустимой области десятимерного пространства параметров. Кроме того, предстоит сравнительное исследование взаимного поведения кривых доходностей и форвардных кривых во всем интервале сроков до погашения актива во всей допустимой области параметров.

В отличие от предыдущих разделов при анализе временной структуры процентных ставок в главе 8 предлагается рассматривать временную переменную не как дюрацию краткосрочной процентной ставки (там временная переменная зависит от параметров рассматриваемых моделей, что затрудняет сравнение доходностей для одних и тех же реальных сроков до погашения), а как некоторое не зависящее от параметров модели нелинейное преобразование временных сроков, позволяющее отображать всю временную ось на интервал единичной длины. Использование такого подхода проиллюстрировано при анализе свойств кривой доходности и форвардной кривой для одно-, двух- и трехфакторных моделей процентных ставок. В этом разделе предложено рассматривать временную переменную, описывающую срок до погашения бескупонных облигаций, как результат не зависящего от параметров модели изменения процентной ставки нелинейного преобразования временных сроков, позволяющего отображать временную ось на интервал единичной длины. Этот способ имеет преимущества перед применением в качестве меры времени дюрации краткосрочной процентной ставки, поскольку при применении дюрации временная переменная зависит от параметров рассматриваемых моделей, что затрудняет сравнение доходностей для одних и тех же реальных сроков до погашения. Показано, что получающиеся функции доходности обладают практически теми же свойствами, что и кривая доходности до погашения, и форвардная кривая, за исключением (в некоторых случаях) свойств, связанных со второй производной. Вместе с тем они удобнее, поскольку позволяют визуально анализировать доходности на всей оси времени. Использование такого подхода проиллюстрировано при анализе свойств кривой доходности и форвардной кривой для однофакторной модели Даффи – Кана, двухфакторной модели Васичека – Фонга и трехфакторных моделей процентных ставок: расширенной модели Васичека – Фонга, модели Чена и модели BDFS. Сформулированы математические модели динамики переменных состояния для всех этих случаев (всего шесть различных моделей), выведены уравнения для функций временной структуры и при возможности найдены их аналитические решения. Поскольку большая доля уравнений может быть решена только численно, проведены численные расчеты для всех шести моделей и сравнения функций доходностей, характеризующих их временную структуру. Расчеты проводились для набора параметров, основанных

на оценках, опубликованных Д. Аном и Б. Гао, приспособивших однофакторную модель Даффи – Кана для описания динамики процесса годовой ставки доходности одномесечных бумаг Казначейства США для периода наблюдения с января 1960 г. по февраль 1991 г. Расчеты показали, что увеличение размерности модели влечет уменьшение показателей доходности.

В главе 9 рассмотрена популярная в последнее время модель Нельсона – Сигеля, хотя в аналитическом смысле она относится к многомерным аффинным моделям. Показано, что требование выполнения условий отсутствия арбитража уточняет модель Нельсона – Сигеля – Свенссона (NSS) в том смысле, что придает коэффициентам этой модели явный экономический смысл: свободный коэффициент должен быть функцией срока до погашения, а остальные коэффициенты должны зависеть от переменных состояния рынка, которые, в свою очередь, являются выборочными значениями случайных процессов в момент времени, для которого конструируется временная структура. Показано, что сама модель является представителем семейства аффинных моделей доходности и порождается двухмерной моделью краткосрочной процентной ставки для модели Нельсона – Сигеля (NS) или четырехмерной моделью краткосрочной процентной ставки для NSS-модели. Получены условия отсутствия арбитража для этих моделей, и показано, что эти условия для трехфакторной NSS-модели неосуществимы.

Представлено описание моделей доходностей Нельсона – Сигеля (NS) и Нельсона – Сигеля – Свенссона (NSS) как традиционных многомерных аффинных моделей доходности. В случае NS-модели получается двухфакторная модель, в случае NSS-модели – четырехфакторная. Это описание отличается от представлений Ф. Диболда и Г. Радебуша тем, что размерность здесь представленных моделей уменьшается на единицу, что приводит к упрощению вычислений. Выяснено, что латентные (скрытые) переменные Нельсона – Сигеля полностью совпадают с переменными состояниями традиционной модели. Получены явные представления распределения вероятностей и первых двух моментов этих «скрытых переменных». Вычислены математические ожидания и ковариационные матрицы процентных ставок доходности до погашения и форвардных ставок. Сформулирована процедура рекуррентного оценивания скрытых переменных, основанная на применении фильтра Калмана.

Из-за ограниченной свободы действий при подгонке аффинных моделей к реальным данным в последнее время предлагаются другие способы описания процентных ставок, приводящие к неаффинным моделям временной структуры доходности. Наиболее известной попыткой является «квадратичная модель». В главе 10 представлено математически эквивалентное, но более компактное

описание обычно встречающейся квадратичной модели доходности. Получены уравнения для функций временной структуры и приведены общие свойства их решений. Основным содержанием раздела является рассмотрение случая, когда вероятностные свойства модели подчиняются нейтральной к риску вероятностной мере, что позволяет получить аналитические решения задачи о форме кривых доходности и форвардных кривых в явном виде. Уравнения кривых представлены в компактной форме с использованием гиперболических функций. Найдены семейства кривых доходности и форвардных кривых, которые для фиксированной краткосрочной ставки доходности обеспечивают получение одной и той же предельной долгосрочной доходности. Полученные результаты иллюстрируются численным примером.

При определенных предположениях относительно параметров квадратичной модели краткосрочная процентная ставка является случайным процессом, имеющим сдвинутое распределение гамма. Такое же распределение характеризует также краткосрочную процентную ставку в аффинной модели Даффи – Кана. Таким образом, модель Даффи – Кана и квадратичная модель порождают случайные процессы процентных ставок с одним и тем же распределением. В разделе получены явные выражения для временной структуры бескупонной доходности до погашения и кривые форвардных ставок для обеих моделей, рассмотрено, какие отличия имеют эти временные структуры доходности для рассматриваемых моделей в нейтральной к риску постановке, когда рыночные цены риска равны нулю. Показано, что если в квадратичной модели любой размерности латентные переменные состояния независимы и одинаково распределены по нормальному закону с нулевым средним, то временная структура процентных ставок доходности не зависит от конкретных значений переменных, а определяется только стартовым значением текущей краткосрочной процентной ставки, точно так же как и в аффинных моделях. При этом долгосрочные предельные ставки получаются такими же, как в модели Даффи – Кана. Сравнительные свойства аффинной модели Даффи – Кана и квадратичной модели доходности иллюстрируются численным примером.

Наиболее известные временные структуры доходности – это аффинные, т. е. относящиеся к случаю, когда структура доходности моделируется полиномом первой степени относительно текущей краткосрочной процентной ставки. Здесь возникает вопрос, существуют ли безарбитражные модели, в которых структура доходности моделировалась бы полиномами более высокого порядка относительно процентной ставки или степенным рядом относительно нее. В главе 11 как раз рассматривается возможность представления временных структур доходности в виде полиномов и степенных

рядов в моделях с процессами краткосрочной процентной ставки, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями с полиномиальными функциями дрейфа и диффузии. Показано, что такое представление имеет место только в случае, когда функции дрейфа и диффузии – полиномы не выше первого порядка. Проблема представления временных структур степенными рядами связана с решением бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов ряда. Эта система уравнений имеет особенности, не позволяющие получить ее решение в аналитическом виде в общем случае. Рассмотрены условия, при которых степенной ряд мог бы быть описанием временной структуры доходности. Показано, что существуют модели краткосрочной ставки, для которых уравнения для коэффициентов ряда могут быть решены. Такими моделями являются, в частности, диффузионные модели краткосрочных процентных ставок CIR (1980) и Ана – Гао. Для них системы дифференциальных уравнений решены аналитически и показано, что степенной ряд по значениям процентной ставки не может быть использован в качестве модели временной структуры для этих моделей. К сожалению, доказательства этого в общем случае пока не найдено.

Глава 1

КРАТКОСРОЧНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ И ИХ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА

В этой главе сделан анализ для семейства моделей, использованных авторами трех широко известных обзорных статей (CKLS: K. C. Chan, G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, A. S. Sanders, 1992; D.-H. Ahn, B. Gao, 1999; T. Bali, 1999), посвященных подгонке моделей к реальным временным рядам доходности. Все рассматриваемые модели относятся к классу диффузионных, порождающих процессы $X(t)$, описываемые уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t))dW(t), t > t_0, X(t_0) = X_0, \quad (1.1)$$

где конкретное задание дрейфа $\mu(x)$ и волатильности $\sigma(x)$ определяет ту или иную конкретную модель.

Некоторые модели, такие как модели Васичека, Кокса – Ингерсолла – Росса, геометрического броуновского движения, Ана – Гао, достаточно полно описаны в имеющейся литературе, но тем не менее их свойства приведены здесь для удобства сравнения с другими, менее известными или неисследованными моделями. Предлагаемый анализ будет полезен для выяснения наиболее подходящих моделей краткосрочной ставки при определении временной структуры бескупонной доходности, приближающей реально наблюдаемую по возможности наилучшим образом.

Схема анализа сводится к тому, что с помощью прямого уравнения Колмогорова (уравнения Фоккера – Планка) для плотности вероятностей $f(x, t | y, s)$, $t > s$,

$$\frac{\partial f(x, t | y, s)}{\partial t} + \frac{\partial [\mu(t, x)f(x, t | y, s)]}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma^2(t, x)f(x, t | y, s)]}{\partial x^2} = 0$$

можно найти переходную плотность $f(x, t | y, s)$ при выполнении условий однородности по времени для функций дрейфа, когда $\mu(t, x) = \mu(x)$, и волатильности, когда $\sigma(t, x) = \sigma(x)$. При условии, что для $t - s \rightarrow \infty$ существует

стационарный режим процесса $X(t)$, можно получить следующее соотношение, связывающее три функции $\mu(x)$, $\sigma(x)$ и $f(x)$:

$$2\mu(x)f(x) = \frac{\partial[\sigma^2(x)f(x)]}{\partial x},$$

из которого находится маргинальная плотность $f(x)$

$$f(x) = \frac{c(\omega)}{\sigma^2(x)} \exp\left(\int_{\omega}^x \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)} du\right),$$

где $c(\omega)$ – постоянная нормировки; ω – некоторое фиксированное число, конкретное значение которого не играет роли. При необходимости обсуждаются ее особенности и вычисляются первые четыре момента, обычно интересных на практике. Оказалось, что для рассмотренных моделей коэффициенты асимметрии и эксцесса, определяемые моментами третьего и четвертого порядков, зависят от единственного параметра, называемого параметром формы плотности, который, в свою очередь, определяется только отношением дисперсии к квадрату математического ожидания (это соответствует квадрату «коэффициента вариации»).

МОДЕЛЬ ВАСИЧЕКА

Для $\mu(x) = k(\theta - x)$, $\sigma^2(x) = \sigma^2$ уравнение (1.1) описывает процесс Орнштейна – Уленбека, в финансовой литературе обычно называемый моделью Васичека (Vasiček, 1977). Плотность распределения вероятностей для этого процесса является нормальной с математическим ожиданием $E[X] = \theta$ и дисперсией $\text{Var}[X] = \sigma^2/2k$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-k \frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2}}.$$

Как известно, для нормального распределения коэффициент асимметрии S равен нулю, коэффициент эксцесса K равен 3.

МОДЕЛЬ КОКСА – ИНГЕРСОЛЛА – РОССА

Для функций дрейфа и волатильности $\mu(x) = k(\theta - x)$ и $\sigma^2(x) = \sigma^2 x$ получаем неотрицательный процесс краткосрочной процентной ставки $r(t)$, в финансовой литературе известный под названием модель Кокса – Ингерсолла – Росса (CIR) (Cox [et al.], 1985)

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kDr(t)/\theta} dW(t),$$

где θ и D – стационарные математическое ожидание и дисперсия соответственно.

Процесс CIR имеет распределение вероятностей гамма с параметром масштаба $c = 2k/\sigma^2$ и параметром формы $q = 2k\theta/\sigma^2$. Так что

$$f(x) = \frac{c^q x^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-cx}, \quad q > 0, \quad x > 0.$$

Моменты этого распределения вычисляются по формуле

$$E[X^m] = \frac{\Gamma(m+q)}{c^m \Gamma(q)},$$

а важные числовые характеристики, такие как математическое ожидание $E[X]$, дисперсия $\text{Var}[X]$, коэффициенты асимметрии S и эксцесса K , имеют вид

$$\begin{aligned} E[X] &= q/c = \theta, \\ \text{Var}[X] &\equiv D = q/c^2 = \sigma^2 \theta / 2k, \\ S &\equiv \frac{E[(X - E[X])^3]}{\text{Var}[X]^{3/2}} = 2\sqrt{q}, \\ K &\equiv \frac{E[(X - E[X])^4]}{\text{Var}[X]^2} = 3 + \frac{6}{q}. \end{aligned}$$

Если обозначить отношение дисперсии к квадрату математического ожидания символом ω , $\omega = \frac{\text{Var}[X]}{E[X]^2}$, то $q = \frac{1}{\omega}$. В дальнейшем при сравнении свойств плотностей удобнее использовать зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ вместо $S(q)$ и $K(q)$, так как довольно абстрактные параметры формы q для разных моделей по-разному зависят от вполне физически понятного отношения ω .

МОДЕЛЬ ДАФФИ – КАНА

В модели Даффи – Кана (Duffie, Kan, 1996), часто называемой «моделью с квадратным корнем», ставка $r(t)$ порождается уравнением (1.1) с

$$\mu(x) = k(\theta - x) \quad \text{и} \quad \sigma(x) = \sqrt{\gamma x + \delta} \equiv \sqrt{2kD \frac{x - r_0}{\theta - r_0}}:$$

$$dr(t) = (\alpha r(t) + \beta)dt + \sqrt{\gamma r(t) + \delta} dW(t), \quad \gamma r(0) + \delta > 0,$$

$$\text{где } k = -\alpha > 0; \quad \theta = -\frac{\beta}{\alpha} > 0; \quad D = \frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{2\alpha^2} > 0; \quad r_0 = \frac{\delta}{\gamma} < \theta.$$

Процесс $r(t)$ имеет стационарную плотность вероятностей $f(x)$, которая является сдвинутой плотностью гамма с параметром сдвига r_0 , параметром формы q и параметром масштаба c , т. е.

$$f(x) = \frac{c^q (x - r_0)^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-c(x-r_0)}, \quad r_0 < x < \infty,$$

где $q = (\theta - r_0)^2 / D$; $c = (\theta - r_0) / D > 0$; r_0 – предельное нижнее значение процентной ставки $r(t)$.

Важные числовые характеристики стационарной плотности:

$$E[X] = q/c = \theta, \quad \text{Var}[X] \equiv D = q/c^2,$$

$$S = 2\sqrt{q}, \quad K = 3 + 6/q.$$

Здесь также $q = 1/\omega$. Зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ для моделей CIR (1985) и Даффи – Кана одинаковы и представлены на рис. 1.1, где сплошной линией показан коэффициент асимметрии $S(\omega)$, а прерывистой – коэффициент эксцесса $K(\omega)$. В таком же стиле будут показаны зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ для других моделей на последующих рисунках.

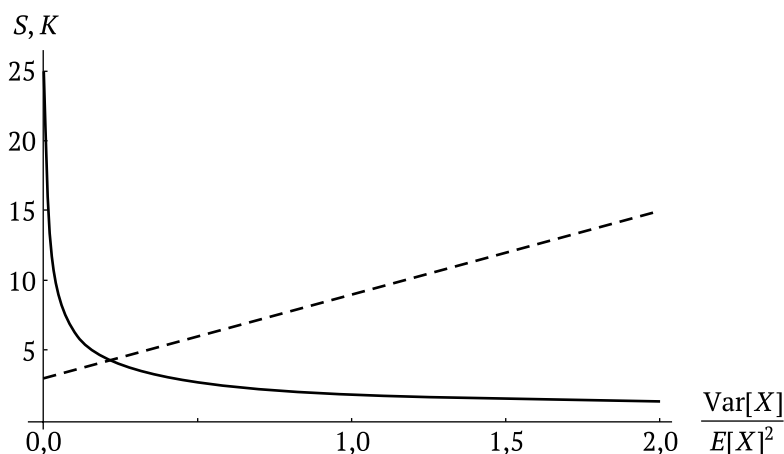


Рис. 1.1. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для моделей CIR (1985) и Даффи – Кана

Заметим, что только у моделей CIR (1985) и Даффи – Кана из рассмотренных в статье моделей коэффициент асимметрии уменьшается с ростом отношения дисперсии к квадрату математического ожидания ω .

МОДЕЛЬ ЛОНГСТАФФА

Модель Лонгстаффа (Longstaff, 1989) иногда называется моделью «с двойным корнем» и определяется диффузионным процессом с функциями дрейфа и диффузии $\mu(x) = k(\theta - \sqrt{x})$, $\sigma^2(x) = \sigma^2 x$:

$$dr(t) = k(\theta - \sqrt{r(t)})dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t).$$

Такая модификация модели CIR приводит к тому, что плотность вероятностей процесса приобретает вид

$$f(x) = \frac{(2c)^{2q} x^{q-1}}{2\Gamma(2q)} e^{-2c\sqrt{x}}, \quad q > 0, x > 0.$$

В этой модели параметр масштаба $c = 2k/\sigma^2$, а параметр формы $q = 2k\theta/\sigma^2$. Числовые характеристики процесса вычисляются по формулам

$$E[X] = \frac{q(1+2q)}{2c^2}, \quad \text{Var}[X] = \frac{q(1+2q)(3+4q)}{4c^4},$$

$$S = \frac{30 + 68q + 40q^2}{\sqrt{q(1+2q)}(3+4q)^{3/2}} > 0,$$

$$K = 3 \frac{210 + 629q + 674q^2 + 288q^3 + 32q^4}{q(1+2q)(3+4q)^2} > 3.$$

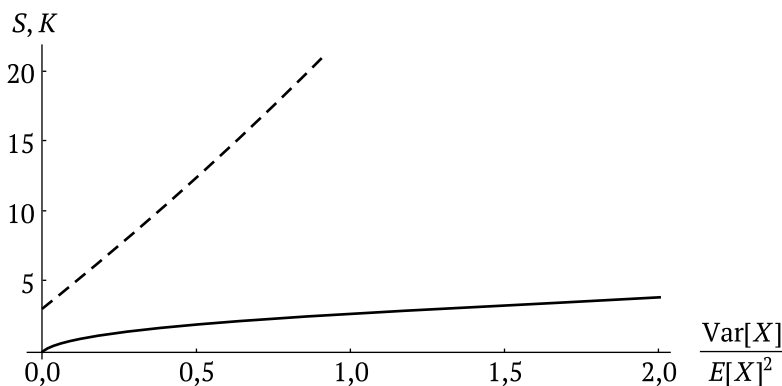


Рис. 1.2. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели Лонгстафа

Для этой модели $q = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{16}{\omega} + \frac{16}{\omega^2}} - 1 \right)$. Соответствующие зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ представлены на рис. 1.2.

МОДЕЛЬ АНА – ГАО

В модели Ана – Гао (Ahn, Gao, 1999) принимается, что дрейф и волатильность являются нелинейными $\mu(x) = k(\theta - x)x$ и $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^3$. Процесс имеет стационарную плотность, ее вид

$$f(x) = \frac{c^q}{\Gamma(q)x^{1+q}} e^{-c/x}, \quad x > 0,$$

где параметр масштаба $c = 2k\theta/\sigma^2$; параметр формы $q = 2 + 2k/\sigma^2$. Такой процесс получается из процесса CIR преобразованием $X_{AG} = 1/X_{CIR}$. Моменты $E[X^m]$ существуют только при условии, что $m < q$:

$$E[X^m] = c^m \frac{\Gamma(q-m)}{\Gamma(q)},$$

поэтому числовые характеристики стационарной плотности процесса определяются формулами

$$\begin{aligned} E[X] &= c/(q-1) = 2k\theta/(2k + \sigma^2), \\ \text{Var}[X] &= c^2/(q-1)^2(q-2) = 2k\sigma^2\theta^2/(2k + \sigma^2)^2, \\ S &= 4 \frac{\sqrt{q-2}}{q-3}, \quad q > 3; \quad K = 3 \frac{(q-2)(q+5)}{(q-3)(q-4)} > 3, \quad q > 4. \end{aligned}$$

МОДЕЛЬ БРЕННАНА – ШВАРЦА

В модели Бреннана – Шварца (Brennan, Schwartz, 1980) предполагается, что $\mu(x) = k(\theta - x)$ и $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^2$. Такое задание дрейфа и диффузии приводит к плотности вероятностей диффузионного процесса

$$f(x) = \frac{c^q}{\Gamma(q)x^{1+q}} e^{-c/x}, \quad x > 0,$$

где параметр формы $q = 1 + 2k/\sigma^2$ и параметр масштаба $c = 2k\theta/\sigma^2$. У этого процесса существуют моменты $E[X^m]$, если $m < q$:

$$E[X^m] = c^m \frac{\Gamma(q-m)}{\Gamma(q)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E[X] &= c/(q-1) = \theta, \\ \text{Var}[X] &= c^2/(q-2)(q-1)^2 = \theta^2\sigma^2/(2k - \sigma^2), \\ S &= 4 \frac{\sqrt{q-2}}{q-3}, \quad q > 3; \quad K = 3 \frac{(q-2)(q+5)}{(q-4)(q-3)} > 3, \quad q > 4. \end{aligned}$$

Как выясняется, плотности вероятностей процессов в моделях Ана – Гао и Бреннана – Шварца совпадают с точностью до параметров формы, зависимость которых от параметров модели несколько другая:

$$q_{БШ} = 1 + 2k/\sigma^2, \quad q_{AG} = 2 + 2k/\sigma^2.$$

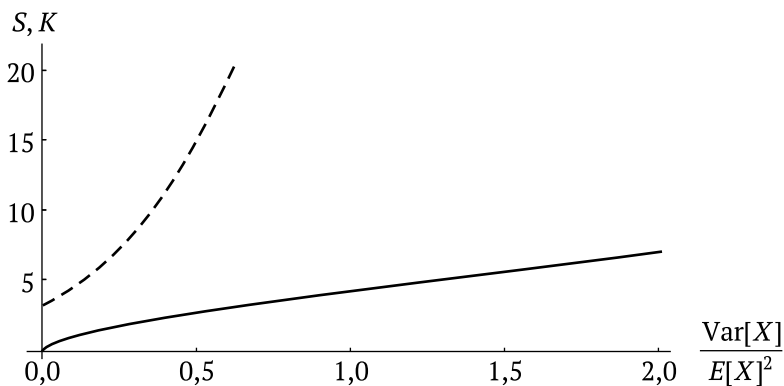


Рис. 1.3. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для моделей Ана – Гао и Бреннана – Шварца

Тем не менее для обеих моделей $q = 2 + 1/\omega$, а зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ представлены на рис. 1.3.

МОДЕЛЬ БЛЭКА – ДЕРМАНА – ТОЯ

Модель Блэка – Дермана – Тоя (BDT) (Black, Derman, Toy, 1990)

$$dr(t) = [\alpha_1 r(t) - \alpha_2 r(t) \ln r(t)]dt + \beta r(t) dW(t), \alpha_2 > 0,$$

при помощи преобразования $Y(t) = \ln r(t)$ и применения формулы Ито приводится к линейному виду

$$dY(t) = (\alpha_1 - \beta^2/2 - \alpha_2 Y(t))dt + \beta dW(t).$$

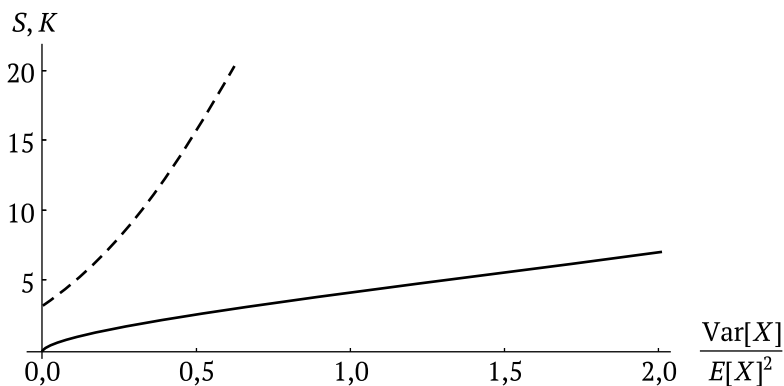


Рис. 1.4. Зависимости коэффициентов асимметрии $S(\omega)$ и эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели BDT

Это уравнение допускает стационарное решение, для которого процесс $Y(t)$ находится в явной форме

$$Y(t) = \frac{1}{\alpha_2} \left(\alpha_1 - \frac{\beta^2}{2} \right) + \xi(t), \quad \xi(t) = \beta \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_2 s} dW(s),$$

где $\xi(t)$ – случайный гауссовский процесс с нулевым средним, дисперсией $\text{Var}[\xi(t)] = \beta^2 / 2\alpha_2$ и ковариацией $\text{Cov}[t_1, t_2] = \beta^2 e^{-\alpha_2 |t_2 - t_1|} / 2\alpha_2$. Таким образом, модель BDT генерирует логарифмически нормальный процесс, допускающий стационарный режим (рис. 1.4). Первые стационарные моменты процентной ставки вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} E[r] &= \exp \left[\frac{1}{\alpha_2} \left(\alpha_1 - \frac{\beta^2}{4} \right) \right], \\ \text{Var}[r] &= (q - 1) \exp \left[\frac{2}{\alpha_2} \left(\alpha_1 - \frac{\beta^2}{4} \right) \right], \quad q = \exp \left(\frac{\beta^2}{2\alpha_2} \right) = 1 + \omega, \\ S &= (q + 2)\sqrt{q - 1}, \quad K = q^4 + 2q^3 + 3q^2 - 3 > 3. \end{aligned}$$

МОДЕЛЬ ЭЙТ-САХЭЙЛИА

Aït-Sahalia (1996) протестировал основные модели краткосрочных процентных ставок, включая описанные здесь, приспособивая их к реальным временным рядам ставок. При этом оказалось, что на допустимом уровне согласия все эти ставки отвергались из-за свойств дрейфа и волатильности. В связи с этим он предложил следующие функции дрейфа и диффузии:

$$\mu(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_{-1} \frac{1}{r}, \quad \sigma^2(r) = \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2.$$

В такой модели функции дрейфа и диффузии нелинейные и допускают широкое разнообразие формы. Для того чтобы $\sigma^2(x) \geq 0$ для любых x , параметры функции диффузии должны обеспечивать выполнение неравенств

$$\beta_0 > 0, \beta_2 > 0, \gamma^2 \equiv 4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2 \geq 0.$$

Соответствующая таким функциям плотность вероятностей дается выражением

$$f(x) = Nx^B (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)^{C-1} \exp[Ax + D \arctg(E + Fx)], \quad x > 0,$$

где N – постоянная нормировки,

$$\begin{aligned} A &= 2\alpha_2/\beta_2 < 0, \quad B = 2\alpha_{-1}/\beta_0 > 0, \quad C = \alpha_1/\beta_2 - \alpha_2\beta_1/\beta_2^2 - \alpha_{-1}/\beta_0, \\ D &= 2[2\alpha_0 + \alpha_2\beta_1^2/\beta_2^2 - \alpha_1\beta_1/\beta_2 - 2\alpha_2\beta_0/\beta_2 - \alpha_{-1}\beta_1/\beta_0]/\gamma, \\ E &= \beta_1/\gamma, \quad F = \beta_2/\gamma. \end{aligned}$$

Поскольку функция плотности $f(x)$ при $x \rightarrow 0$ имеет порядок $O(x^B)$, $B > 0$, а при $x \rightarrow \infty$ ее порядок $O(x^{B+C} \exp[Ax])$, $A < 0$, то для всякого конечного m моменты $E[X^m]$ существуют, однако их аналитические выражения получить не удается, и они могут быть вычислены только численно.

МОДЕЛЬ CKLS

В модели CKLS (Chan, Karolyi, Longstaff, Sanders, 1992) принято, что $\mu(x) = k(\theta - x)$, $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^3$. Оказывается, что случайный процесс, соответствующий этой модели, имеет стационарную плотность

$$f(x) = \frac{n}{x^3} \exp \left[-c \left(\left(\frac{\theta}{x} \right)^2 - 2 \frac{\theta}{x} \right) \right], \quad x > 0,$$

где $c = k/\theta\sigma^2$; n – постоянная нормировки. Заметим, что у такого случайного процесса существует только первый момент $E[X] = \theta$.

МОДЕЛЬ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ I

В модель без ограничений I (unrestricted model) (Ahn, Gao, 1999)

$$dr = (\alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 r^2)dt + \sqrt{\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3}dw$$

вложены все предыдущие модели, т. е. при определенном задании параметров $\{\alpha\}$ можно получить любую из предыдущих моделей.

В табл. 1 показано соответствие параметров в этом случае.

Таблица 1

Частные случаи модели без ограничений I

Ограничение параметров	Модель	Уравнение процесса
$\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$	Модель Васичека	$dr = k(\theta - r)dt + \sigma dw$
$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$	Модель CIR	$dr = k(\theta - r)dt + \sigma \sqrt{r}dz$
$\alpha_3 = \alpha_6 = 0$	Модель Даффи – Кана	$dr = k(\theta - r)dt + \sqrt{\alpha + \beta r}dw$
$\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$	Модель Ана – Гао	$dr = k(\theta - r)rdt + \sigma r^{1.5}dw$
$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$	Модель CKLS	$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^{1.5}dw$

Стационарная плотность вероятностей процесса «без ограничений I» имеет вид

$$f(X) = \frac{c(\omega)}{\sigma^2(x)} \exp \left(\int_{\omega}^x \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)} du \right) = \frac{c(\omega)}{\alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 x^3} \exp \left(\int_{\omega}^x \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 u^2)}{\alpha_4 + \alpha_5 u + \alpha_6 u^3} du \right),$$

где $c(\omega)$ – постоянная нормировки; ω – некоторое фиксированное число из множества возможных значений случайного процесса, конкретное значение которого не играет роли.

Получение явного вида выражения для $f(x)$ возможно, однако оно в общем случае будет иметь довольно громоздкий вид, и мы ограничимся только тем случаем, когда значения параметров $\{\alpha\}$ обеспечивают выполнение свойств плотности вероятностей для $f(x)$. Заметим, что волатильность реального процесса должна быть вещественной функцией, поэтому $\sigma^2(r) = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 \geq 0$ для любых значений r . При этом аналитические свойства плотности вероятностей зависят от характера корней уравнения $\sigma^2(r) = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = 0$, $\alpha_6 > 0$. Знак дискриминанта $\Delta = (\alpha_5/3\alpha_6)^3 + (\alpha_4/2\alpha_6)^2$ определяет число действительных и комплексных корней уравнения. Когда $\Delta > 0$, имеется один действительный и два комплексных сопряженных корня. Когда $\Delta < 0$, имеется три различных действительных корня. Когда $\Delta = 0$, корни действительные кратные.

Пусть $\Delta > 0$ и действительным корнем является $r = r_0$, тогда можно записать $\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = \alpha_6 (r - r_0)(r^2 + pr + q)$, где r_0, p и q имеют довольно сложные аналитические выражения и из-за этого здесь не приводятся. Однако если $\alpha_4 = 0$, то $r_0 = 0$, $p = 0$, $q = \alpha_5/\alpha_6$. В этом случае плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{c(\omega)}{\alpha_6 x(x^2 + \alpha_5/\alpha_6)} \exp \left(\int_{\omega}^x \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 u^2)}{\alpha_6 u(u^2 + \alpha_5/\alpha_6)} du \right) =$$

$$= n x^{\frac{2\alpha_1}{\alpha_5} - 1} (\alpha_6 x^2 + \alpha_5)^{\frac{\alpha_3}{\alpha_6} - \frac{\alpha_1}{\alpha_5} - 1} \exp \left(\frac{2\alpha_2}{\sqrt{\alpha_5 \alpha_6}} \operatorname{arctg} \left[x \sqrt{\frac{\alpha_6}{\alpha_5}} \right] \right),$$

где n – нормировочная константа. Для существования плотности вероятностей ее параметры должны удовлетворять неравенствам: $\alpha_1/\alpha_5 > 1$, $\alpha_3/\alpha_6 < 1$. Для того чтобы при этом существовали стационарные моменты, нужно для математического ожидания $\alpha_3/\alpha_6 < 0,5$, для дисперсии $\alpha_3/\alpha_6 < 0$, для третьего момента $\alpha_3/\alpha_6 < -0,5$ и для четвертого момента $\alpha_3/\alpha_6 < -1$.

В случае $\Delta < 0$ обозначим корни уравнения $r_0 > r_1 > r_2$, так что

$$\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = \alpha_6 (r - r_0)(r - r_1)(r - r_2).$$

Тогда плотность вероятностей выражается в виде

$$f(x) = n(x - r_0)^{\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_0 + \alpha_3 r_0^2)}{\alpha_6(r_0 - r_1)(r_0 - r_2)} - 1} (x - r_1)^{-\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_1 + \alpha_3 r_1^2)}{\alpha_6(r_0 - r_1)(r_1 - r_2)} - 1} \times$$

$$\times (x - r_2)^{\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_2^2)}{\alpha_6(r_0 - r_2)(r_1 - r_2)} - 1}.$$

При этом должны выполняться неравенства

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 r_0 + \alpha_3 r_0^2) > \alpha_6 (r_0 - r_1)(r_0 - r_2), \quad \alpha_3/\alpha_6 < 1.$$

Для существования m -го момента, кроме этого, необходимо соблюдение условия $m/2 + \alpha_3/\alpha_6 < 1$. К сожалению, аналитические выражения нормировочной константы n и моментов $E[r^m]$ очень громоздки, включают гипергеометрические функции. При сделанных предположениях процесс, характеризующийся такой плотностью, имеет нижнюю границу, равную наибольшему корню, т. е. $r(t) \geq r_0$.

Наконец, если $\Delta = 0$ и корни действительные кратные, равные r_0 , стационарная плотность будет иметь вид

$$f(x) = \frac{2^{2-\gamma} \beta^{1-\gamma/2} (x-r_0)^{\gamma-3}}{\Gamma(2-\gamma) U\left(1-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right)} e^{-\frac{\alpha}{x-r_0} - \frac{\beta}{(x-r_0)^2}}, \quad x \geq r_0,$$

где $\alpha = 2 \frac{\alpha_2 + 2\alpha_3 r_0}{\alpha_6} > 0$; $\beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 r_0 + \alpha_3 r_0^2}{\alpha_6} > 0$; $\gamma = 2 \frac{\alpha_3}{\alpha_6} < 2$, а $U(a, b, x)$ – кон-
флюэнтная гипергеометрическая функция (гипергеометрическая функция Трикоми). Моменты такой плотности вычисляются по формулам

$$E[X^m] = 2^m \sqrt{\beta^m} \frac{\Gamma(2-\gamma-m)}{\Gamma(2-\gamma)} U\left(1-\frac{\gamma+m}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right) / U\left(1-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right)$$

при ограничении $\gamma + m < 2$. Поскольку моменты вычисляются в аналитическом виде, то математическое ожидание, дисперсия и коэффициенты асимметрии и эксцесса существуют при $\gamma < -2$ и тоже могут быть вычислены в аналитическом виде, но их выражения довольно громоздки и здесь не приводятся. Как и в предыдущем случае, процентная ставка может принимать только значения, превышающие r_0 , т. е. $r(t) \geq r_0$.

МОДЕЛЬ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ II

В этой модели (СКЛС, 1992) процесс краткосрочной ставки следует уравнению

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw, \quad \gamma > 0, \quad (1.2)$$

поэтому $\mu(x) = k(\theta - x)$, $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^{2\gamma}$ и стационарная плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{n}{x^{2\gamma}} \exp\left[\frac{q}{x^{2\gamma}} \left(\frac{\theta x}{1-2\gamma} - \frac{x^2}{2-2\gamma}\right)\right], \quad x > 0,$$

где $q = 2k/\sigma^2$; n – постоянная нормировки. Значения параметра γ , допускающие сходимость интеграла от $f(x)$ на интервале $(0, \infty)$, определяются неравенством $\gamma > 0,5$. При этом имеются две особые точки: $\gamma = 0,5$ (в этом случае такая модель краткосрочной ставки превращается в модель CIR) и $\gamma = 1$,

когда плотность вероятностей сводится к виду, соответствующему процессу модели Бреннана – Шварца:

$$f(x) = \frac{c^{q+1}}{\Gamma(q+1)x^{2+q}} e^{-c/x}, \quad c = \theta q, x > 0.$$

Таблица 2

Числовые характеристики плотностей семейства без ограничений II

Модель	γ	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	Асимметрия	Экссесс
Васичека	0	θ	$\frac{\sigma^2}{2k}$	0	3
CIR	0,5	$\frac{q}{c} = \theta$	$\frac{q}{c^2} = \frac{\sigma^2 \theta}{2k}$	$2\sqrt{q}$	$3 + 6\frac{1}{q}$
Бреннана – Шварца	1,0	$\frac{c}{q} = \theta$	$\frac{\theta^2}{q-2} = \frac{\theta^2 \sigma^2}{2k - \sigma^2}$	$4 \frac{\sqrt{q-2}}{q-3}$	$3 \frac{(q-2)(q+5)}{(q-4)(q-3)}$
CKLS	1,5	$\frac{q}{c} = \theta$	Не существует	Не существует	Не существует

Когда $\gamma = 1,5$, модель без ограничений II известна под наименованием модель CKLS. Модель Васичека тоже является вложенной моделью в модель без ограничений II при $\gamma = 0$. Для того чтобы существовали моменты порядка m , необходимо выполнение неравенства $2\gamma > m + 1$. К сожалению, выражение для плотности вероятностей в общем случае не позволяет вычислять моменты в аналитическом виде, хотя для упомянутых частных случаев они вычисляются просто. В табл. 2 приведены характеристики плотностей этого семейства.

МОДЕЛЬ CEV

Еще до появления модели без ограничений II использовались модели, которые потом оказались частными случаями этой модели. Одной из них является модель CEV – модель процесса с постоянной эластичностью дисперсии (*Constant Elasticity of Variance*), предложенная Дж. Коксом и С. Россом (1976), когда в уравнении (1.2) принято $\theta = 0$:

$$dr = -kr dt + \sigma r^\gamma dw,$$

так что дрейф $\mu(x) = -kx$; коэффициент диффузии $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^{2\gamma}$, а стационарная плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{c(2-2\gamma)^{1/(2-2\gamma)}}{\Gamma[(0,5-\gamma)/(1-\gamma)](cx)^{2\gamma}} \exp\left(-\frac{(cx)^{2-2\gamma}}{2-2\gamma}\right), \quad x > 0,$$

где $c = (2k/\sigma^2)^{1/(2-2\gamma)}$. Значения параметра γ , допускающие сходимость интеграла от $f(x)$ на интервале $(0, \infty)$, определяются неравенством $\gamma < 0,5$. Заметим, что это условие допускает не только положительные, но и отрицательные значения параметра γ . При $\gamma \neq 0$ процесс $r(t)$ с вероятностью единица принимает только неотрицательные значения. Причем для $\gamma > 0$ плотность вероятностей монотонно убывает с возрастанием аргумента (т. е. меньшие значения процесса более вероятны, чем большие). Если $\gamma < 0$ плотность $f(x)$ имеет максимум в точке $x = (-\sigma^2\gamma/k)^{0,5/(1-\gamma)}$. Значение $\gamma = 0$ является особой точкой, в этом случае процесс $r(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2/2k$. Это семейство плотностей иллюстрируется на рис. 1.5.

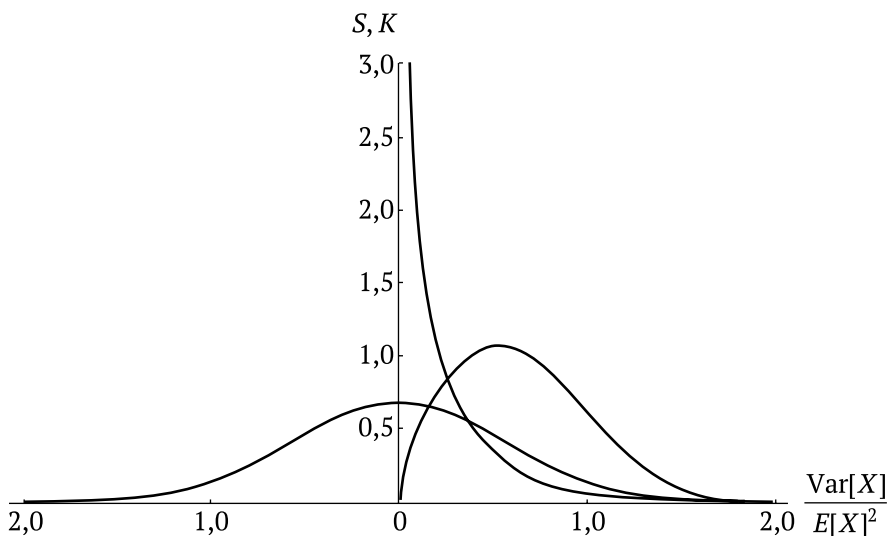


Рис. 1.5. Плотности вероятностей для различных значений γ ($\gamma = 0, \gamma < 0, \gamma > 0$)

Когда $\gamma \neq 0$, моменты $E[X^m]$ вычисляются по формуле

$$E[X^m] = \frac{\Gamma(m+1-2\gamma)}{c^m \Gamma(2-2\gamma)} (2-2\gamma)^{0,5m/(1-\gamma)},$$

поэтому важные числовые характеристики в модели CEV такие:

$$E[X] = (2-2\gamma)^{1/(2-2\gamma)} / c \Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right),$$

$$\text{Var}[X] = (2-2\gamma)^{1/(1-\gamma)} \left[\Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{3-2\gamma}{2-2\gamma}\right) - 1 \right] / c^2 \Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right)^2,$$

$$S = \frac{\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right)^2 \Gamma\left(\frac{2-\gamma}{1-\gamma}\right) - 3\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) + 2}{\left(\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 1\right)^{3/2}},$$

$$K = \frac{\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right)^3 \Gamma\left(\frac{2,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 4\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right)^2 \Gamma\left(\frac{2-\gamma}{1-\gamma}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 1\right)^2} +$$

$$+ \frac{6\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 3}{\left(\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 1\right)^2}.$$

В модели CEV роль параметра формы выполняет параметр волатильности модели γ . К сожалению, в аналитическом виде можно привести только зависимость $\omega(\gamma)$, поскольку зависимость $\gamma(\omega)$ здесь сложная

$$\omega(\gamma) = \Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{3-2\gamma}{2-2\gamma}\right) - 1,$$

а довольно грубое, но простое приближение обратной зависимости имеет вид $\gamma(\omega) \approx 0,14 + 0,25 \ln \omega$. Зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ для модели CEV представлены на рис. 1.6.

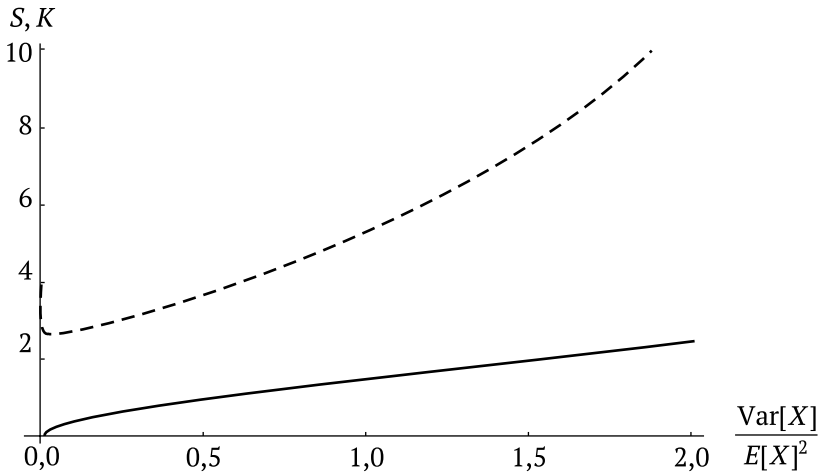


Рис. 1.6. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели CEV

Модель CEV – единственная из рассматриваемых здесь, у которой коэффициент эксцесса может принимать значение меньше 3 (коэффициента эксцесса нормального распределения).

Это происходит на интервале значений $-2,091 < \gamma < -0,225$, где в точке $\gamma = -0,766$ ($\omega = 0,145$) коэффициент эксцесса принимает свое минимальное значение $K = 2,610$. Модель CEV является также единственной моделью, у которой коэффициент асимметрии S может принимать отрицательные значения (левый хвост плотности тяжелее правого), это происходит для $\gamma < -0,927$ ($\omega < 0,120$).

МОДЕЛЬ CIR (1980)

Другой частной версией уравнения (1.2) является модель CIR (1980), которая получается, если положить, что $k = 0$:

$$dr = \sigma r^\gamma dw.$$

Когда стационарный режим в этой модели существует, плотность вероятностей процесса $r(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma^2 x^3 f(x)]}{\partial x^2} = 0.$$

Поскольку это уравнение второго порядка, нужно иметь два краевых условия для определения однозначного решения. В качестве таких условий естественно выбрать условие нормировки и величину нижней границы возможных значений процентной ставки, обозначим ее r_0 . Тогда решение уравнения $f(x)$ выразится в виде

$$f(x) = (\gamma - 1)(2\gamma - 1) \frac{2}{r_0} \left(\frac{x}{r_0} - 1 \right) \left(\frac{x}{r_0} \right)^{-2\gamma}, \quad x > r_0 > 0.$$

Эта плотность является, по существу, смесью двух распределений Парето, известных как распределения с тяжелыми хвостами. Для существования моментов $E[X^m]$ необходимы достаточно большие значения параметра γ , если это выполнено, моменты будут вычисляться по формуле

$$E[X^m] = \frac{2(\gamma - 1)(2\gamma - 1)r_0^m}{(2\gamma - m - 1)(2\gamma - m - 2)}, \quad \gamma > 1 + \frac{m}{2},$$

и важные числовые характеристики процесса $r(t)$ будут иметь вид

$$E[X] = \frac{2(\gamma - 1)(2\gamma - 1)r_0}{(2\gamma - 2)(2\gamma - 3)}, \quad \gamma > 1,5;$$

$$\text{Var}[X] = \frac{(2\gamma - 1)r_0^2}{(\gamma - 2)(2\gamma - 3)^2}, \quad \gamma > 2;$$

$$S = \frac{2(2\gamma + 1)}{(2\gamma - 5)} \sqrt{\frac{\gamma - 2}{2\gamma - 1}} > \sqrt{2}, \quad \gamma > 2,5;$$

$$K = \frac{6(\gamma - 2)(4\gamma^2 - 4\gamma + 3)}{(\gamma - 3)(2\gamma - 1)(2\gamma - 5)} > 6, \quad \gamma > 3.$$

В этой модели снова параметр волатильности γ играет роль параметра формы плотности вероятностей, при этом $\gamma = 0,25\left(5 + \sqrt{9 + 8/\omega}\right)$. Зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ для модели CIR (1980) представлены на рис. 1.7.

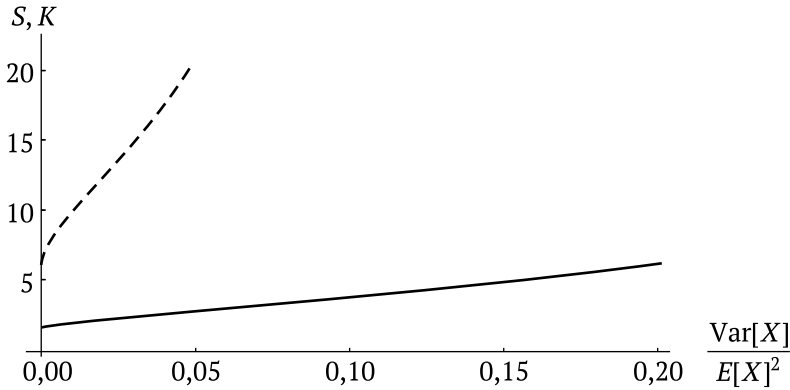


Рис. 1.7. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели CIR (1980)

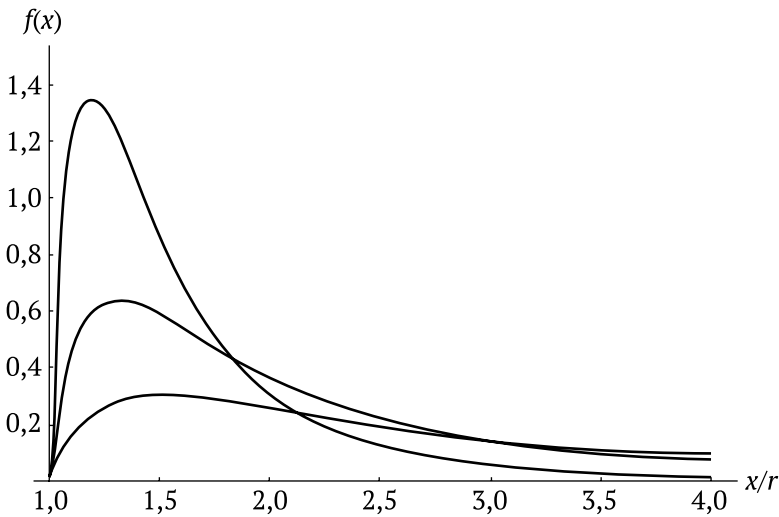


Рис. 1.8. Примеры плотностей вероятностей для значений параметра $\gamma = 1,5; 2; 3$

Заметим, что в оригинальной модели CIR (1980) предлагалось $\gamma = 1,5$, однако это не гарантирует существования даже математического ожидания. На рис. 1.8 представлены примеры плотностей вероятностей модели CIR (1980) для различных значений параметра γ . Для плотностей характерно: чем меньше γ , тем более тяжелый хвост; чем больше γ , тем выше максимум, который встречается в точке $x_{\max} = 2\gamma r_0 / (2\gamma - 1)$.

Во всех рассмотренных выше моделях существует стационарный режим. Однако встречаются такие модели, в которых такого режима не существует. К ним относятся следующие.

МОДЕЛЬ МЕРТОНА

Предложенная Р. Мертоном (Merton, 1973) модель

$$dr(t) = \alpha dt + \sigma dW(t)$$

порождает нестационарный гауссовский процесс

$$r(t) = r(0) + \alpha t + \sigma W(t)$$

с линейно изменяющимся математическим ожиданием и линейно возрастающей дисперсией

$$E[r | r(0)] = r(0) + \alpha t, \text{Var}[r] = \sigma^2 t.$$

МОДЕЛЬ ДОТАНА

Уравнение модели Дотана (Dothan, 1978)

$$dr = \sigma r dW$$

можно решить в явном виде

$$r(t) = r(0) \exp[-0,5\sigma^2 t + \sigma W(t)],$$

откуда следует, что порождаемый моделью случайный процесс имеет логарифмически нормальное распределение и является нестационарным. Математическое ожидание постоянно, но дисперсия экспоненциально возрастает со временем

$$E[r | r(0)] = r(0), \text{Var}[r | r(0)] = r(0)^2 (\exp[\sigma^2 t] - 1).$$

МОДЕЛЬ GBM

Модель GBM – модель процесса геометрического броуновского движения (*Geometric Brownian Motion*)

$$dr = \beta r dt + \sigma r dW$$

введена в современный финансовый анализ П. Самюэльсоном (Samuelson, 1965). Она порождает нестационарный процесс геометрического броуновского движения

$$r(t) = r(0) \exp[(\beta - 0,5\sigma^2)t + \sigma W(t)].$$

В этом случае плотность вероятностей процентной ставки логарифмически нормальная. В отличие от модели BDT, которая порождает тоже логарифмически нормальный процесс, моменты $r(t)$ в модели GBM не постоянные, а экспоненциально возрастают со временем, в частности

$$E[r | r(0)] = r(0) \exp[\beta t],$$

$$\text{Var}[r | r(0)] = r(0)^2(q - 1) \exp[2\beta t], \quad q = \exp[\sigma^2 t],$$

$$S = (q + 2)\sqrt{\lambda - 1}, \quad K = q^4 + 2q^3 + 3q^2 - 3.$$

Выражения для асимметрии и эксцесса совпадают с выражениями для этих характеристик модели BDT, но параметр q здесь не является константой, а экспоненциально возрастает со временем.

ВЫВОДЫ

Процесс краткосрочных ставок является основой для построения временной структуры доходности бескупонных облигаций. Это объясняет интерес к анализу процессов краткосрочных ставок. В литературе имеется много статей, где сделаны эмпирические попытки найти модель краткосрочной ставки, для которой получается временная структура, наиболее близкая к реально наблюдаемой структуре (CKLS, 1992; Ahn, Gao, 1999; Bali, 1999). В то же время в литературе имеются эмпирические факты о том, что известные модели краткосрочной ставки не обеспечивают этого на допустимом уровне согласия (Aït-Sahalia, 1996), поэтому есть необходимость в аналитических исследованиях, позволяющих определить степень риска при применении той или иной модели краткосрочной ставки доходности. В качестве основы для этого нужны сведения о вероятностных свойствах процессов краткосрочной ставки, выраженные аналитически, что и представлено в данной главе.

Глава 2

ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ДОХОДНОСТИ

В последние годы много внимания уделяется исследованию временной структуры процентных ставок (т. е. зависимости процентных ставок доходности от срока до погашения свободных от неуплаты ценных бумаг) и относящихся к ней таких величин, как номинальная кривая доходности и форвардная кривая. Эта зависимость играет важную роль при определении стоимости долговых инструментов и финансовых производных от процентных ставок (Fabozzi, 2000; Hull, White, 1994), исследовании влияния налогообложения и ликвидности на цены облигаций (Elton, Green, 1998; Green, Odegaard, 1997). Временная структура процентных ставок используется при управлении риском (см., напр., технологию RiskMetrics) в методах генерирования спот ставок, по которым конструируется матрица ковариации, а также при разработке монетарной стратегии, когда ожидаемые ставки разделяются на краткосрочные, среднесрочные и долгосрочные (Svensson, 1994). Известна попытка формализовать связь между кривой доходности и реальной экономической активностью. На основании этой связи выводятся формулы для временной структуры процентных ставок. При этом временная структура олицетворяет рыночные ожидания об изменениях макроэкономической основы – роста реального совокупного продукта экономики, что позволяет использовать рыночные данные об облигациях для предсказания роста внутреннего валового продукта в промышленных странах (Hu, 1993).

Временной структурой, интересной для практиков и исследователей, является номинальная кривая доходности, представляющая доходность до погашения на номинальные облигации (т. е. облигации, продающиеся по номинальной стоимости и имеющие купоны с такой же доходностью). Определение номинальной кривой доходности основывается на наблюдении находящихся в обращении государственных ценных бумаг, только что проданных на аукционе и наиболее ликвидных. Эти ценные бумаги в стра-

нах с развитой экономикой выпускаются для 10 начальных сроков погашения 0,25, 0,5, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20 и 30 лет. Они обычно продаются по номинальной стоимости, и их доходности называются доходностями номинальных облигаций. Определение временной структуры процентных ставок сводится к тому, что, имея только 10 находящихся в обращении номинальных доходностей, непосредственно наблюдаемых на рынке, и используя другую информацию, содержащуюся в описании этих ценных бумаг, необходимо сконструировать функцию, позволяющую вычислять доходность для любого срока до погашения. Заметим, что имеются методы, не основанные на номинальной кривой доходности, такие как метод кубических сплайнов (McCulloch, 1971) и сглаживающий метод (Fisher, Nychka, Zervos, 1995).

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МНОГОФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДОХОДНОСТЕЙ

Будем рассматривать номинальные облигации, продаваемые на аукционе в некоторый текущий момент времени t по цене $P(t, T, x)$, где T – дата погашения облигации, а $x = x(t)$ – в общем случае вектор переменных, характеризующих состояние финансового рынка в дату t , $t < T$. Считается, что облигация является свободной от неуплаты и в дату T погашается за одну денежную единицу, т. е. цена $P(T, T, x) = 1$ для любых состояний $x(T)$.

Процентной ставкой доходности до погашения (или просто доходностью) называется величина

$$y(t, T, x) = \frac{-\ln P(t, T, x)}{T - t}.$$

Временной структурой доходности называют зависимость $y(t, T, x)$ от срока до погашения $T - t$. Именно она представляет интерес для инвесторов, заботящихся об эффективности своих инвестиций в будущем.

Краткосрочная процентная ставка доходности (или просто краткосрочная (*short*) ставка) определяется как предел

$$y(t, x) = \lim_{T \rightarrow t} \frac{-\ln P(t, T, x)}{T - t} = \left. \frac{\partial \ln P(t, T, x)}{\partial t} \right|_{T=t}. \quad (2.1)$$

Эта ставка различными авторами называется также спот (*spot*) ставкой или безрисковой (*risk-free*) ставкой, поскольку она характеризует доходность в течение инфинитезимального интервала времени, на котором как бы ни изменялось состояние рынка, оно «не успеет» стать рискованным.

Наряду со ставкой доходности до погашения, характеризующей доходность облигации за весь период ее активности, инвесторов интересуют доходности облигаций на некотором временном интервале между будущими датами T_1 и T_2 на основе информации о доходности, имеющейся

в текущий момент времени t , $t < T_1 < T_2$. Такие ставки $f(t, T_1, T_2)$ называются форвардными. Форвардные ставки при $T_1 \rightarrow T_2 = T$ определяют краткосрочные ставки для будущих моментов времени T и называются мгновенными форвардными ставками $f(t, T, x)$. Именно они чаще интересуют инвесторов, и словосочетание «форвардные ставки» обычно относится именно к $f(t, T, x)$. Форвардная ставка $f(t, T, x)$ определяется соотношением (Hull, 1993)

$$f(t, T, x) = -\frac{\partial \ln P(t, T, x)}{\partial T}.$$

Между доходностью до погашения и форвардной ставкой имеются взаимно однозначные соотношения

$$y(t, T, x) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s, x) ds,$$

$$f(t, T, x) = y(t, T, x) + (T-t) \frac{\partial y(t, T, x)}{\partial T}.$$

Вектор состояния финансового рынка $X(t) = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t)$$

с n -вектором дрейфа $\mu(x)$, $(n \times m)$ -матрицей волатильности $\sigma(x)$ и m -вектором $W(t)$ независимых стандартных винеровских процессов.

Предполагается, что функция $P(t, T, x)$ цены облигации дифференцируема по первому аргументу и дважды дифференцируема по третьему аргументу. Согласно стохастическому анализу Ито цена облигации, как и функция времени, $P(t, T, X(t)) \equiv Z(t)$ тоже оказывается случайным процессом диффузионного типа и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dZ(t) = \mu_P(t, T, x) dt + \sigma_P(t, T, x)^T dW(t),$$

где $\mu_P(t, T, x)$ и $\sigma_P(t, T, x)$ – скалярная функция дрейфа и m -вектор волатильности, соответственно, определяемые соотношениями

$$\mu_P(t, T, x) = \frac{\partial P(t, T, x)}{\partial t} + \mu(x)^T \frac{\partial P(t, T, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\sigma(x)^T \frac{\partial^2 P(t, T, x)}{\partial x^2} \sigma(x) \right),$$

$$\sigma_P(t, T, x)^T = \sigma(x)^T \frac{\partial P(t, T, x)}{\partial x}.$$

Уравнение для определения функции $P(t, T, x)$ находится из условия отсутствия на финансовом рынке арбитражных возможностей (Vasiček,

1977), которое в рассматриваемом случае многофакторной модели сводится к тому, что должен существовать m -вектор $\lambda(t, x)$, не зависящий от даты погашения облигаций T , такой, чтобы выполнялось равенство

$$\mu_P(t, T, x) - y(x)P(t, T, x) = \sigma_P(t, T, x)^T \lambda(t, x).$$

Функция $\lambda(t, x)$ называется рыночной ценой риска. Таким образом, приходим к уравнению с частными производными для функции $P(t, T, x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t, T, x)}{\partial t} + \mu(x)^T \frac{\partial P(t, T, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\sigma(x)^T \frac{\partial^2 P(t, T, x)}{\partial x^2} \sigma(x) \right) - \\ - y(x)P(t, T, x) = \lambda(t, x)^T \sigma(x)^T \frac{\partial P(t, T, x)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Это уравнение должно решаться с краевым условием $P(T, T, x) = 1$ для любых состояний x .

Тот факт, что марковский процесс $X(t)$ является однородным по времени, приводит к следующему свойству функции $P(t, T, x)$: она зависит не от t и T в отдельности, а только от разности $T - t$, т. е. не от текущего времени и даты погашения, а только от оставшегося срока до погашения $\tau = T - t$. Так что $P(t, T, x) \leftrightarrow P(\tau, x)$, при этом $y(t, x) \leftrightarrow y(x)$, $\lambda(t, x) \leftrightarrow \lambda(x)$. В литературе часто предполагают, что вектор дрейфа $\mu(x)$ и матрица диффузии $\sigma(x)\sigma(x)^T$ состояний финансового рынка описываются аффинными функциями, а рыночные цены риска таковы, что $\sigma(x)\lambda(x) - n$ -вектор с аффинными компонентами:

$$\mu(x) = K(\theta - x), \quad \sigma(x)\sigma(x)^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i,$$

$$\sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i.$$

Здесь K , α и $\beta_i - (n \times n)$ -матрицы; θ , ξ и $\eta_i - n$ -вектора; $x_i -$ компоненты вектора x . Заметим, что указанные соотношения удовлетворяются при

$$\sigma(x) = \sigma \langle \sqrt{\gamma + \Gamma x} \rangle, \quad \lambda(x) = \langle \sqrt{\gamma + \Gamma x} \rangle \lambda,$$

где $\gamma, \lambda - m$ -вектора; $\sigma - (n \times m)$ -матрица; $\Gamma - (m \times n)$ -матрица, а $\langle \sqrt{\gamma + \Gamma x} \rangle -$ диагональная $(m \times m)$ -матрица, по диагонали которой стоят квадратные корни компонент вектора $\gamma + \Gamma x$. В этом случае $\alpha = \sigma \langle \gamma \rangle \sigma^T$, $\xi = \sigma \langle \gamma \rangle \lambda$, а элементы матрицы β_i и вектора η_i определяются равенствами

$$(\beta_i)_{kj} = \sum_{u=1}^m \sigma_{ku} \sigma_{ju} \Gamma_{ui}, \quad 1 \leq k, j \leq n;$$

$$(\eta_i)_k = \sum_{u=1}^m \sigma_{ku} \Gamma_{ui} \lambda_u, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Такие предположения приводят к аффинной временной структуре процентных ставок доходности. Перепишем уравнение для цены облигации $P(t, T, x)$ в этом случае

$$-\frac{\partial P(\tau, x)}{\partial \tau} + (\theta - x)^T K^T \frac{\partial P(\tau, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial^2 P(\tau, x)}{\partial x^2} (\alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i) \right) - y(x) P(\tau, x) = \left(\xi + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i \right)^T \frac{\partial P(\tau, x)}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$P(\tau, x) = \exp\{A(\tau) - x^T B(\tau)\},$$

где функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ удовлетворяют начальным условиям: $A(0) = 0$ и $B(0) = 0$. Заметим, что для цены облигации в таком виде краткосрочная процентная ставка (2.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{-\ln P(\tau, x)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau} = \\ &= x^T \left. \frac{dB(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} - \left. \frac{dA(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = x^T B'(0) - A'(0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

т. е. тоже является аффинной функцией вектора x . Штрих обозначает производную по τ . Заметим, что состояние финансового рынка обычно характеризуется значениями процентных ставок, иначе говоря, компонентами вектора x являются величины, имеющие смысл процентных ставок. Когда процентные ставки равны нулю, доходность облигации отсутствует, поэтому в выражении (2.3) следует положить $A'(0) = 0$. В дальнейшем это предположение будет приниматься во всех случаях. Обозначим $B'(0) = \phi$. Вектор ϕ можно рассматривать как вектор, составленный из весов, которые приписываются той или иной компоненте вектора состояния x при определении краткосрочной ставки $y(x) = x^T \phi = x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2 + \dots + x_n \phi_n$, $1 \leq i \leq n$. Если среди компонент вектора состояния x одной из компонент является безрисковая ставка r (положим, что $x_1 = r$), тогда согласно определению $y(x) = x^T \phi = r$. Поэтому в этом случае $\phi_1 = 1$, а остальные компоненты вектора $B'(0) = \phi$ должны быть равны нулю, иначе говоря, $\phi_i = B'_i(0) = 0$, $2 \leq i \leq n$.

Подстановка решения $P(\tau, x) = \exp\{A(\tau) - x^T B(\tau)\}$ в уравнение (2.2) для $P(t, T, x)$ приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции $A(\tau)$ и компонент вектора $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_n(\tau))$:

$$A'(\tau) = (\xi - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \alpha B(\tau)/2, \quad A(0) = 0, \quad (2.4)$$

$$B'_i(\tau) = \phi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau)/2, \quad B_i(0) = 0. \quad (2.5)$$

В уравнении для $B_i(\tau)$ символ K_i , $1 \leq i \leq n$, обозначает i -й столбец матрицы K .

Заметим, что, как следует из вышеприведенных определений, в рамках аффинной структуры ставка доходности и форвардная ставка определяются соотношениями

$$y(\tau, x) = \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, x) = x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}, \quad (2.6)$$

$$y(\tau, x) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(s, x) ds, \quad f(\tau, x) = y(\tau, x) + \tau \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau}. \quad (2.7)$$

Функции $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$, рассматриваемые как функции от переменной τ , обычно называются соответственно кривой доходности и форвардной кривой. Вид и свойства именно этих функций представляют интерес для инвесторов, поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться явным аналитическим выражением этих функций и определением их свойств. Выясним вначале их некоторые общие свойства.

Общим пределом обеих кривых на левом конце, т. е. при $\tau \rightarrow 0$, является краткосрочная процентная ставка доходности $y(x)$. Действительно, так как $A'(0) = 0$ и $B'(0) = \phi$,

$$y(x) = x^T \phi = \lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau, x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau, x).$$

Для малых сроков погашения согласно (2.7) справедливы представления

$$y(\tau, x) = y(x) + \tau \left(\frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} + o(\tau),$$

$$f(\tau, x) = y(x) + 2\tau \left(\frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} + o(\tau).$$

Отсюда видно, что, стартуя из одной точки $y(x)$, кривые $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$ с ростом τ расходятся. При этом форвардная кривая изменяется вдвое быстрее.

Если кривая доходности имеет экстремум для некоторого срока до погашения τ_* , т. е. $\left. \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_*} = 0$, тогда форвардная ставка и ставка доходности для этого срока совпадают по величине $f(\tau_*, x) = y(\tau_*, x)$.

Отсюда следует общий вывод о том, что если кривая доходности имеет максимум (минимум) $y(\tau_*, x)$, то наибольшее (наименьшее) значение форвардной ставки f^* всегда больше (меньше) этого значения $y(\tau_*, x)$.

Для выяснения того, как кривые $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$ ведут себя для длительных сроков погашения, требуется знать свойства функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$. Однако решить уравнения для этих функций в общем случае не удастся. Можно только сказать, что вектор $B(\tau)$ является решением многомерного уравнения Риккати. Если вектор $B(\tau)$ удастся найти, то функция $A(\tau)$ находится просто

интегрированием правой части уравнения для $A(\tau)$. Более детальные свойства функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$ можно выяснить только при конкретном задании $K, \alpha, \beta, \eta, \theta$ и ξ . Однако, используя некоторые ожидаемые свойства функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$, можно выяснить ожидаемые свойства кривых $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$.

Состояние финансового рынка может быть представлено набором ставок доходностей различных ценных бумаг, следовательно, компоненты вектора x могут иметь смысл процентных ставок (Duffie, Kan, 1996). В других случаях состояние финансового рынка может быть описано процентной ставкой и ее волатильностью (Fong, Vasiček, 1991). В связи с тем, что изменения процентной ставки и волатильности по-разному влияют на доходность до погашения, знаки компонент вектора $B(\tau)$, соответствующие им, должны быть согласованы с этими компонентами вектора состояния x . С ростом безрисковой ставки доходность до погашения (2.6) увеличивается, поэтому если x_1 – процентная ставка, то $B_1(\tau) > 0$. С ростом волатильности доходность до погашения (2.6) уменьшается, поэтому если x_k – волатильность, то $B_k(\tau) < 0$.

Понятно также, что с увеличением срока до погашения $\tau = T - t$ влияние состояния рынка $x \equiv X(t)$ в момент времени t на доходность до погашения (2.6) должно уменьшаться и в пределе при $\tau \rightarrow +\infty$ исчезать вовсе, т. е. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x^T B(\tau) / \tau = 0$. Это дает основание полагать, что пределы $B_k(\tau)$ при $\tau \rightarrow +\infty$ существуют и $\lim_{\tau \rightarrow \infty} B(\tau) = B(\infty)$, $\|B(\tau)\| < \infty$. В этих условиях естественно ожидать, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} B'(\tau) = 0$, а вектор $B(\infty)$ согласно (2.5) можно определить из системы уравнений

$$\phi_i = B(\infty)^T (\eta_i + K_i) + B(\infty)^T \beta_i B(\infty) / 2, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Уравнение Риккати (2.5) в одномерном случае определяет решение в виде монотонной функции. Когда фактором x является процентная ставка, $B(\tau)$ будет возрастающей функцией, изменяющейся от $B(0) = 0$ до $B(\infty) > 0$, т. е. $0 \leq B(\tau) \leq B(\infty)$. Для волатильности $B(\tau)$ – убывающая функция от $B(0) = 0$ до $B(\infty) < 0$, т. е. $0 \geq B(\tau) \geq B(\infty)$. Таким образом, можно ожидать, что определяемые из уравнений (2.5) компоненты вектора $B(\tau)$ – монотонные ограниченные функции (численные расчеты подтверждают это), т. е. для всех $i = 1, 2, \dots, n$ ожидается, что $0 < |B_i(\tau)| < |B_i(\infty)|$.

В этом случае имеют место следующие равенства:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{B(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dB(\tau)}{d\tau} = 0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dA(\tau)}{d\tau} = (\xi - K\theta)^T B(\infty) + B(\infty)^T \alpha B(\infty) / 2.$$

Из соотношений (2.6) также следует, что

$$y(\infty, x) = f(\infty, x) = (K\theta - \xi)^T B(\infty) - B(\infty)^T \alpha B(\infty) / 2.$$

Таким образом, кривая доходности $y(\tau, x)$ и форвардная кривая $f(\tau, x)$ совпадают для коротких сроков до погашения (при $\tau \rightarrow 0$), с увеличением τ кривые расходятся, но при продолжительных сроках (при $\tau \rightarrow \infty$) снова стремятся к одному и тому же пределу. Последнее свойство впервые было описано (Siegel, Nelson, 1988), однако до сих пор некоторые авторы часто изображают кривую доходности $y(\tau, x)$ и форвардную кривую $f(\tau, x)$ расходящимися кривыми. В дальнейшем рассмотрим конкретные модели, часто встречающиеся в литературе, чтобы при помощи строгого исследования выяснить, оправдан ли приведенный умозрительный анализ.

Компонента $B_1(\tau)$ вектора $B(\tau)$, соответствующая безрисковой процентной ставке, имеет размерность времени, и ее можно использовать для измерения продолжительности времени, поскольку она равна минус производной цены облигации по процентной ставке (Cox, Ingersoll, Ross, 1979; Brown, Schaefer, 1994), т. е. имеет размерность времени в преобразованном масштабе.

Такое использование привлекательно потому, что позволяет демонстрировать кривые доходности и форвардные кривые для всего диапазона сроков до погашения $0 \leq \tau < \infty$ на конечном интервале изменения новой временной переменной $B_1(\tau)$: $0 \leq B_1(\tau) \leq B_1(\infty)$.

ВЫВОДЫ

Для многофакторных моделей аффинной доходности найдены аналитические представления кривых доходности и форвардных кривых и предложено в качестве временной переменной использовать дюрацию безрисковой ставки. Поскольку дюрация принимает значения только на конечном интервале, это позволяет наблюдать поведение кривых на всем интервале изменения реального времени.

Глава 3

МОДЕЛЬ ВАСИЧЕКА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

КРИВЫЕ ДОХОДНОСТИ И ФОРВАРДНЫЕ КРИВЫЕ

В однофакторном случае в качестве состояния рынка принимается краткосрочная ставка $X(t) = r(t)$ и соответствующее стохастическое уравнение имеет вид

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t),$$

где k, θ, σ – скалярные константы, т. е. $K = k, \alpha = \sigma^2, \beta = 0, \eta = 0, \xi = \sigma\lambda$.

В этом случае также $y(r) = r$, т. е. $B'(0) = 1$. Уравнения (2.4) и (2.5) для определения функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$ превращаются в следующие:

$$\begin{aligned} A'(\tau) &= (\sigma\lambda - k\theta)B(\tau) + \sigma^2 B(\tau)^2/2, \quad A(0) = 0, \\ B'(\tau) &= 1 - kB(\tau), \quad B(0) = 0, \quad B(\tau) = (1 - \exp\{-k\tau\})/k. \end{aligned}$$

Функция $B(\tau)$ имеет простой вид и является монотонно возрастающей функцией от 0 до $1/k$; $B(\infty) = 1/k$. Поскольку $B(\tau)$ – монотонная функция, определяющая дюрацию процентной ставки, она может быть использована в качестве аргумента в кривой доходности $y(\tau, r)$ и форвардной кривой $f(\tau, r)$ вместо срока до погашения τ .

Преимущество такой замены заключается в том, что зависимость на всем интервале времени в виде графика представить невозможно из-за неограниченности интервала времени, $\tau \in (0, \infty)$, в то время как этому неограниченному интервалу соответствует конечный интервал изменения дюрации, $B(\tau) \in (0, 1/k)$. Тогда получим соответствия $y(\tau, r) \leftrightarrow Y(B, r)$, $f(\tau, r) \leftrightarrow F(B, r)$, $\tau = -\ln(1 - kB)/k$. При этом можно ожидать, что свойства функций $Y(B, r)$ и $F(B, r)$ могут оказаться проще. На рис. 3.1 и 3.2 сравнение этих двух представлений кривой доходности и форвардной кривой

иллюстрируется графиками для следующих значений параметров: $k = 0,5$; $\sigma = 0,1$; $\lambda = 0,01$; $\theta = 0,0721$; $r = 0,06$. В этом случае $B(\infty) = 2$, значению $\tau = 10$ соответствует $B = 1,9865$.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = \lim_{B \rightarrow 2} Y(B) = \lim_{B \rightarrow 2} F(B) = 0,0501.$$

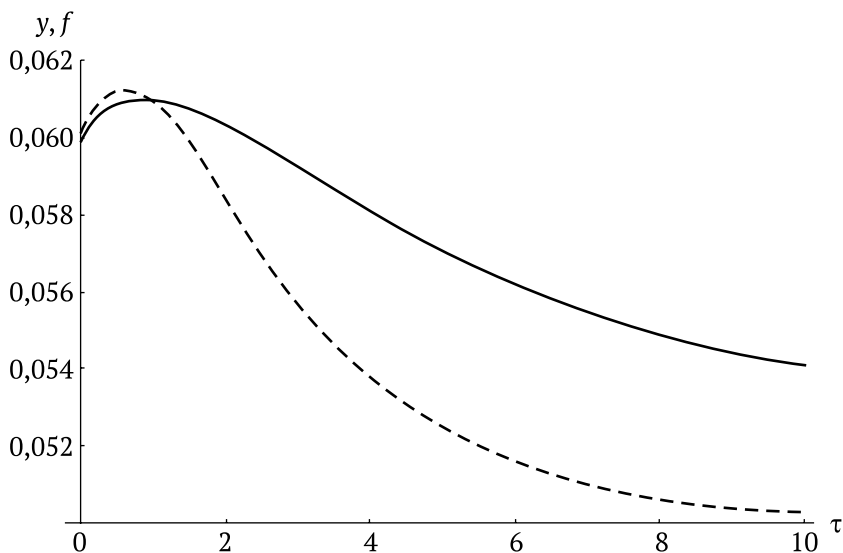


Рис. 3.1. Кривая доходности $y(\tau, r)$ (сплошная линия) и форвардная кривая $f(\tau, r)$ (пунктирная линия) для $\tau \leq 10$

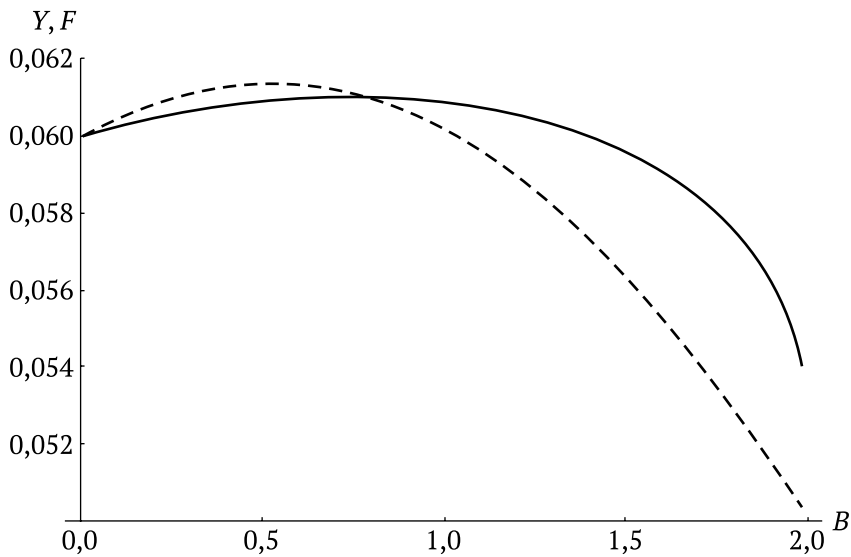


Рис. 3.2. Кривая доходности $Y(B, r)$ (сплошная линия) и форвардная кривая $F(B, r)$ (пунктирная линия) для $B \leq 1,9865$

Аналитические выражения кривой доходности $y(\tau, r)$ и форвардной кривой $f(\tau, r)$ как функций времени имеют вид (здесь аналитическое выражение функции $B(\tau)$ для краткости записи не выписывается):

$$\begin{aligned}
 y(\tau, r) &= \frac{r}{\tau} B(\tau) - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left((\sigma\lambda - k\theta)B(s) + \frac{\sigma^2}{2} B(s)^2 \right) ds = \\
 &= \left(\theta - \frac{\sigma\lambda}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) + \left(r - \theta + \frac{\sigma\lambda}{k} + \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) \frac{B(\tau)}{\tau} + \frac{\sigma^2 B(\tau)^2}{4k\tau} \rightarrow \\
 &\quad \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \theta - \frac{\sigma\lambda}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2} \equiv y(\infty), \\
 y(\tau, r) &= y(\infty) + (r - y(\infty)) \frac{B(\tau)}{\tau} + \frac{\sigma^2}{4k} \frac{B(\tau)^2}{\tau}, \\
 f(\tau, r) &= r(1 - kB(\tau)) - (\sigma\lambda - k\theta)B(\tau) - \sigma^2 B(\tau)^2 / 2 \rightarrow \\
 &\quad \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \theta - \frac{\sigma\lambda}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2} = y(\infty).
 \end{aligned}$$

В свою очередь аналитические выражения для функций $Y(B, r)$ и $F(B, r)$ получаются такими:

$$\begin{aligned}
 Y(B, r) &= y(\infty) - (r - y(\infty)) \frac{kB}{\ln(1 - kB)} - \frac{\sigma^2}{4k^2} \frac{(kB)^2}{\ln(1 - kB)} \xrightarrow{B \rightarrow 1/k} y(\infty), \\
 F(B, r) &= r + [k(\theta - r) - \sigma\lambda]B - \sigma^2 B^2 / 2 \xrightarrow{B \rightarrow 1/k} y(\infty).
 \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, видно, что функция $F(B, r)$ для любых значений параметров модели является вогнутой. Впервые этот факт был отмечен Брауном и Шейфером (Brown, Schaefer, 1994) для однофакторных моделей.

В многофакторном случае уравнение для состояния рынка приобретает вид

$$dX(t) = K(\theta - X(t))dt + \sigma dW(t).$$

Здесь считается, что матрица коэффициентов диффузии не зависит от состояния, $\gamma = \mathbf{1}$, $\Gamma = \mathbf{0}$, поэтому $\alpha = \sigma\sigma^T$, $\beta = 0$, $\eta = 0$, $\xi = \sigma\lambda$. При этих значениях параметров функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
 A'(\tau) &= (\sigma\lambda - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \sigma\sigma^T B(\tau)/2, \quad A(0) = 0, \\
 B'(\tau) &= \phi - K^T B(\tau), \quad B(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Обозначим через $U(\tau)$ фундаментальную матрицу решений однородного уравнения $B'(\tau) = -K^T B(\tau)$. Тогда решение уравнения для функции $B(\tau)$ записывается в виде

$$B(\tau) = \int_0^\tau U(\tau - s) \phi ds.$$

Матрицу $U(\tau)$ можно представить в виде матричного ряда

$$U(\tau) = e^{-K^T \tau} \equiv I + (-K^T)\tau + (-K^T)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \dots + (-K^T)^n \frac{\tau^n}{n!} + \dots,$$

где I – единичная матрица. Используя это разложение под интегралом, находим вектор $B(\tau)$

$$B(\tau) = \left[I\tau + (-K^T) \frac{\tau^2}{2!} + \dots + (-K^T)^n \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \right] \phi = (-K^{-1})^T (I - e^{-K^T \tau}) \phi.$$

Заметим, что для существования этого решения нужно, чтобы матрица K была невырожденной и ее собственные числа $\{\gamma_j\}$ были положительными. Нетрудно видеть, что в этом случае имеет место соотношение

$$B(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} B(\infty) = (K^{-1})^T \phi.$$

Кривая доходности $y(\tau, x)$ и форвардная кривая $f(\tau, x)$ вычисляются по формулам

$$y(\tau, x) = x^T \frac{B(\tau)}{\tau} - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left((\sigma\lambda - K\theta)^T B(s) + \frac{1}{2} B(s)^T \sigma \sigma^T B(s) \right) ds, \quad (3.1)$$

$$y(\tau, x) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} y(\infty) = \theta^T \phi - (K^{-1} \sigma \lambda)^T \phi - \phi^T (K^{-1} \sigma) (K^{-1} \sigma)^T \phi / 2,$$

$$f(\tau, x) = x^T (\phi - K^T B(\tau)) - (\sigma\lambda - K\theta)^T B(\tau) - B(\tau)^T \sigma \sigma^T B(\tau) / 2, \quad (3.2)$$

$$f(\tau, x) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} y(\infty).$$

Таким образом, ожидаемые свойства функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$ в рассматриваемом случае также подтверждаются. Однако для перехода от временной переменной τ к дюрации необходимо использовать только одну из компонент вектора $B(\tau)$. Для этого надо иметь больше информации о свойствах $B(\tau)$, т. е. о виде матрицы K . Для пояснения этого рассмотрим конкретный случай двухфакторной модели.

Предположим, что состояние рынка описывается не только краткосрочной ставкой, но также экспоненциально сглаженным ее средним значением (Cox, Ingersoll, Ross, 1985). Состояние рынка $X(t)$ в этом случае характеризуется двумя компонентами, одной из которых $r(t)$ является наблюдаемая краткосрочная ставка, а другой $s(t)$ – экспоненциально сглаженное ее среднее значение. Уравнения состояния рынка приобретают вид

$$\begin{pmatrix} dr(t) \\ ds(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(\theta - r(t)) \\ k_2(r(t) - s(t)) \end{pmatrix} dt + \sigma dW(t).$$

Параметры модели в этом случае задаются соотношениями: $\beta = 0, \eta = 0$,

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнения для функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$:

$$A'(\tau) = (\sigma_1 \lambda_1 - k_1 \theta) B_1(\tau) + \sigma_2 \lambda_2 B_2(\tau) + \sigma_1^2 B_1(\tau)^2/2 + \sigma_2^2 B_2(\tau)^2/2, \quad A(0) = 0.$$

$$B_1'(\tau) = \phi_1 - k_1 B_1(\tau) + k_2 B_2(\tau), \quad B_1(0) = 0.$$

$$B_2'(\tau) = \phi_2 - k_2 B_2(\tau), \quad B_2(0) = 0.$$

Функции $B_1(\tau)$ и $B_2(\tau)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} B_1(\tau) &= (\phi_1 + \phi_2) \frac{1 - e^{-k_1 \tau}}{k_1} - \phi_2 \frac{e^{-k_2 \tau} - e^{-k_1 \tau}}{k_1 - k_2}, \\ B_2(\tau) &= \phi_2 \frac{1 - e^{-k_2 \tau}}{k_2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя эти выражения в равенства (3.1) и (3.2), получим явные выражения для кривой доходности $y(\tau, x)$ и форвардной кривой $f(\tau, x)$. К сожалению, поскольку количество параметров в рассматриваемом примере двухфакторной модели достаточно большое, выражения для функций $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$ будут громоздкими. Для получения компактных выражений введем вспомогательные обозначения

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{k_1} - \frac{\phi_2}{k_1 - k_2}, \quad v = \frac{\phi_2}{k_1 - k_2}, \quad w = \frac{\phi_2}{k_2}; \\ I_1(\tau) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (1 - e^{-k_1 t}) dt = 1 - \frac{1}{k_1 \tau} (1 - e^{-k_1 \tau}), \\ I_2(\tau) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (1 - e^{-k_2 t}) dt = 1 - \frac{1}{k_2 \tau} (1 - e^{-k_2 \tau}), \\ I_3(\tau) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (1 - e^{-k_1 t})^2 dt = 1 - \frac{2}{k_1 \tau} (1 - e^{-k_1 \tau}) + \frac{1}{2k_1 \tau} (1 - e^{-2k_1 \tau}), \\ I_4(\tau) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (1 - e^{-k_2 t})^2 dt = 1 - \frac{2}{k_2 \tau} (1 - e^{-k_2 \tau}) + \frac{1}{2k_2 \tau} (1 - e^{-2k_2 \tau}), \\ I_5(\tau) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (1 - e^{-k_1 t})(1 - e^{-k_2 t}) dt = \\ &= 1 - \frac{1}{k_1 \tau} (1 - e^{-k_1 \tau}) - \frac{1}{k_2 \tau} (1 - e^{-k_2 \tau}) + \frac{1}{(k_1 + k_2) \tau} (1 - e^{-(k_1 + k_2) \tau}). \end{aligned}$$

Отметим, что функции $I_i(\tau)$, $1 \leq i \leq 5$, являются монотонно возрастающими от 0 до 1 с увеличением τ от 0 до ∞ . Напомним, что в рассматриваемом случае $x^T = (r, s)$. Использование принятых обозначений приводит к выражению, удобному для расчета кривой доходности

$$\begin{aligned} y(\tau, x) = & ruk_1(1 - I_1(\tau)) + (rv + sw)k_2(1 - I_2(\tau)) + \\ & + (\theta k_1 - \sigma_1 \lambda_1)uI_1(\tau) + [(\theta k_1 - \sigma_1 \lambda_1)v - \sigma_2 \lambda_2 w]I_2(\tau) - \\ & - (\sigma_1 u)^2 I_3(\tau)/2 - (\sigma_1^2 v^2 + \sigma_2^2 w^2)I_4(\tau)/2 - \sigma_1^2 uv I_5(\tau). \end{aligned}$$

Расчет форвардной кривой можно выполнить по формуле (3.2) с применением формул (3.3).

КРИВЫЕ ДОХОДНОСТИ В ДВУХФАКТОРНЫХ МОДЕЛЯХ ВАСИЧЕКА

При анализе аффинной временной структуры процентных ставок цена актива представляется в форме $P(\tau, x) = \exp\{A(\tau) - x^T B(\tau)\}$, где τ – срок до погашения; x – состояние финансового рынка в рассматриваемый момент времени. Кривые доходности и форвардные кривые будем рассматривать не как функции временных сроков до погашения τ , как это обычно делается, а в качестве переменной использовать величину u , определяемую не зависящим от параметров модели нелинейным преобразованием этих сроков $u = 1 - \exp[-\rho\tau]$, $\rho > 0$, позволяющим отображать всю положительную полуось сроков на интервал единичной длины.

В общем случае для n -факторной модели аффинной доходности предполагается, что вектор состояния финансового рынка $X(t) = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t))dW(t)$$

с n -вектором дрейфа $\mu(x)$, $(n \times m)$ -матрицей волатильности $\sigma(x)$ и m -вектором $W(t)$ независимых стандартных винеровских процессов. При этом вектор дрейфа $\mu(x)$ и матрица диффузии $\sigma(x)\sigma(x)^T$ должны быть аффинными функциями относительно переменных x , а рыночные цены риска такими, что $\sigma(x)\lambda(x)$ – n -вектор с аффинными компонентами относительно переменных x :

$$\mu(x) = K(\theta - x), \quad \sigma(x)\sigma(x)^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i. \quad (3.4)$$

Здесь K , α и β_i – $(n \times n)$ -матрицы; θ , ξ и η_i – n -вектора; x_i – компоненты вектора x . Эти свойства для n -факторной модели аффинной доходности приводят к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям

для функции $A(\tau)$ и компонент вектора $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_n(\tau))$, τ – срок до погашения:

$$A'(\tau) = (\xi - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \alpha B(\tau)/2, A(0) = 0, \quad (3.5)$$

$$B_i'(\tau) = \phi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau)/2, B_i(0) = 0. \quad (3.6)$$

В уравнении для $B_i(\tau)$ символ K_i обозначает i -й столбец матрицы K , $1 \leq i \leq n$. Кривая доходности $y(\tau, x)$ и форвардная кривая $f(\tau, x)$ определяются через функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ по формулам

$$y(\tau, x) = \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, x) = x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}. \quad (3.7)$$

Вектор ϕ составлен из компонент – весов, которые приписываются той или иной составляющей вектора состояния x при определении краткосрочной ставки $y(x)$:

$$y(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{-\ln P(\tau, x)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau} = x^T B'(0) - A'(0) = \sum_{i=1}^n \phi_i x_i,$$

так что $\phi_i = B_i'(0)$, а $A'(0) = 0$ согласно свойствам $P(0, x)$.

Согласно предположению переменные τ и u связаны соотношением $\tau = -\ln(1 - u)/\rho$. Относительно параметра ρ заметим, что при изображении кривых на рисунках с его помощью можно устанавливать долю интервала $[0, 1]$, которую желательно выделить для представления интересующих сроков погашения. Например, если желательно, чтобы на 90 % длины интервала $[0, 1]$ были представлены сроки до погашения, не превышающие t , значение параметра ρ следует выбирать равным $\ln 10/t$. Таким образом, используя преобразование переменной $\tau = -\ln(1 - u)/\rho$ в соотношениях (3.7), вместо функций доходностей $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$, заданных на неограниченном интервале $\tau \in [0, \infty]$, можно получить функции $Y(u, x)$ и $F(u, x)$, заданные на конечном интервале $u \in [0, 1]$. Функции $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ имеют практически те же свойства, что и доходности $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$, поэтому могут рассматриваться как их эквиваленты.

Для определения функций $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ естественно применить равенства (3.7), приспособленные для переменной u . Используем в (3.7) подстановку $\tau(u) = -\ln(1 - u)/\rho$, введя обозначения $a(u) \equiv A(\tau(u))$ и $b(u) \equiv B(\tau(u))$. Тогда получим

$$Y(u, x) = \rho \frac{a(u) + x^T b(u)}{\ln(1 - u)}, \quad F(u, x) = \rho(1 - u) \left(x^T \frac{db(u)}{du} - \frac{da(u)}{du} \right). \quad (3.8)$$

Для определения функций $a(u)$ и $b(u)$ можно использовать уравнения (3.5) и (3.6). В моделях Васичека считается, что матрица коэффициентов диффузии не зависит от состояния, т. е. в выражениях (3.4) принимается,

что $\alpha = \sigma\sigma^T$, $\beta = 0$, $\eta = 0$, $\xi = \sigma\lambda$. При этих значениях параметров функции $a(u)$ и $b(u)$ согласно (3.5) и (3.6) определяются из уравнений

$$\rho(1-u)a'(u) = (\xi - K\theta)^T b(u) + b(u)^T \alpha b(u)/2, \quad a(0) = 0, \quad (3.9)$$

$$\rho(1-u)b'(u) = \phi - K^T b(u), \quad b(0) = 0. \quad (3.10)$$

Для определения вектора функций $b(u)$ получается система линейных уравнений, которая в принципе может быть решена в явном виде. Рассмотрим один из наиболее распространенных случаев такого решения. Пусть матрица K^T имеет различные собственные числа $\{\pi_k\}$. Тогда существует такая матрица $Q = (Q_{ik})$, что имеют место равенства

$$QK^T Q^{-1} = \pi, \quad K^T = Q^{-1} \pi Q,$$

где π – диагональная матрица, элементами главной диагонали которой являются собственные числа $\{\pi_j\}$. Столбцами матрицы Q являются собственные вектора матрицы K . Определим вектор-функцию $q(u)$ и вектор ϕ соотношениями: $q(u) = Qb(u)$, $\phi = Q\phi$, соответственно с компонентами $\{q_k(u)\}$, $\{\phi_k\}$. Тогда, умножая уравнение для $b(u)$ на Q слева, можно перейти к следующему уравнению для $q(u)$:

$$\rho(1-u)q'(u) = \phi - \pi q(u), \quad q(0) = 0.$$

Поскольку матрица π диагональная, это векторное уравнение распадается на независимые скалярные уравнения

$$\rho(1-u)q'_k(u) = \phi_k - \pi_k q_k(u), \quad q_k(0) = 0,$$

решения которых имеют вид

$$q_k(u) = \phi_k \frac{1 - (1-u)^{\pi_k/\rho}}{\pi_k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Возвращаясь к вектору $b(u) \equiv Q^{-1}q(u)$, получаем следующие выражения для компонент $b_k(u)$:

$$b_k = \sum_{j=1}^n Q_{kj}^{-1} q_j(u) = \sum_{j=1}^n Q_{kj}^{-1} \phi_j \frac{1 - (1-u)^{\pi_j/\rho}}{\pi_j},$$

$$b'_k(u) = \sum_{j=1}^n Q_{kj}^{-1} \phi_j \frac{(1-u)^{-1+\pi_j/\rho}}{\rho}.$$

Кривая доходности $Y(u, x)$ и форвардная кривая $F(u, x)$ вычисляются по формулам

$$Y(u, x) = \frac{\rho}{\ln(1-u)} (a(u) - x^T b(u)),$$

$$Y(u, x) \xrightarrow{u \rightarrow 1} Y(1) \equiv \theta^T \phi - \xi^T Q^{-1} q(1) - q(1)^T \Theta q(1), \quad \Theta \equiv (Q^{-1})^T \alpha Q^{-1}/2,$$

$$F(u, x) = (x^T \phi - K^T Q^{-1} q(u)) - (\xi^T Q^{-1} - \theta^T Q^{-1} \pi) q(u) - q(u)^T \Theta q(u), \quad (3.11)$$

$$F(u, x) \xrightarrow{u \rightarrow 1} Y(1).$$

Отсюда видно, что при изменении u от 0 до 1 обе кривые стартуют из одной точки, $Y(0, x) = F(0, x) = x^T \phi$, и при $u \rightarrow 1$ имеют один предел:

$$\lim_{u \rightarrow 1} Y(u, x) = \lim_{u \rightarrow 1} F(u, x) = Y(1).$$

Наша цель – изучить свойства кривой доходности $Y(u, x)$ и форвардной кривой $F(u, x)$ для некоторых конкретных двухфакторных моделей Васичека.

Модель 1. Предположим, что состояние рынка описывается не только краткосрочной ставкой $r(t)$, но также ее локальным по времени средним значением $s(t)$, так что состояние рынка в этом случае характеризуется вектором $X(t) = (r(t), s(t))^T$.

Уравнения состояния рынка запишем в виде

$$\begin{pmatrix} dr(t) \\ ds(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_r(s(t) - r(t)) \\ k_s(\theta - s(t)) \end{pmatrix} dt + \sigma dW(t).$$

Параметры модели в этом случае задаются соотношениями

$$K = \begin{pmatrix} k_r & -k_r \\ 0 & k_s \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \sigma_1 \lambda_1 \\ \sigma_2 \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы K , $\pi_1 = k_r$, $\pi_2 = k_s$, – положительные. Вектор $b(u)$ определяется выражением

$$\begin{pmatrix} b_r(u) \\ b_s(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\phi_1[1 - (1-u)^{k_r/\rho}]}{k_r} \\ \frac{1}{k_s} \left(\phi_2 + \frac{\phi_1 k_r}{k_r - k_s} \right) [1 - (1-u)^{k_s/\rho}] - \frac{\phi_1[1 - (1-u)^{k_r/\rho}]}{k_r - k_s} \end{pmatrix} \xrightarrow{u \rightarrow 1} \begin{pmatrix} \frac{\phi_1}{k_r} \\ \frac{1}{k_s} \end{pmatrix}.$$

Функция $a(u)$ определяется уравнением (3.9), которое приводится к виду

$$\rho(1-u)a'(u) = \lambda_1 \sigma_1 b_r(u) + (\lambda_2 \sigma_2 - k_s \theta) b_s(u) + [\sigma_1^2 b_r^2(u) + \sigma_2^2 b_s^2(u)]/2,$$

имеющему аналитическое, но громоздкое решение. Приведем лишь явный вид предельного при $u \rightarrow 1$ значения кривых доходности:

$$\lim_{u \rightarrow 1} Y(u | s, r) = \lim_{u \rightarrow 1} F(u | s, r) = \theta - \frac{\lambda_1 \sigma_1 \phi_1}{k_r} - \frac{\lambda_2 \sigma_2}{k_s} - \frac{\sigma_1^2 \phi_1^2}{2k_r^2} - \frac{\sigma_2^2}{2k_s^2}.$$

Модель 2. Коксом, Россом и Ингерсоллом (CIR, 1985) предлагалось вместо второй компоненты $s(t)$ состояния рынка принять экспоненциально сглаженное среднее значение краткосрочной процентной ставки

$$s(t) = k \int_{-\infty}^t e^{-k(t-s)} r(s) ds, \text{ тогда уравнения состояния рынка приобрели бы вид}$$

$$dr(t) = k_1(\theta - r(t))dt + \sigma_1 dW_1(t),$$

$$ds(t) = k_2(r(t) - s(t))dt + \sigma_2 dW_2(t).$$

(В отличие от указанного предложения здесь в уравнении для $s(t)$ добавлена случайная возмущающая диффузионная компонента, имеющая смысл случайной ошибки; отсутствие ошибки соответствует нулевой волатильности $\sigma_2 = 0$.)

Заметим, что в этом случае уравнение для ставки $r(t)$ является независимым от уравнения для среднего $s(t)$. Параметры модели в этом случае задаются соотношениями

$$K = \begin{pmatrix} k_r & 0 \\ -k_s & k_s \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \sigma(r, s) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda(r, s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \sigma_1 \lambda_1 \\ \sigma_2 \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Винеровские процессы $W_1(t)$ и $W_2(t)$ предполагаются независимыми.

Система уравнений (3.10) – линейная, поэтому ее можно решить в аналитическом виде

$$b(u) = \begin{pmatrix} \frac{k_s}{k_r - k_s} \left(\phi_2 + \frac{1 - (1-u)^{k_r/\rho}}{k_s} - \left(1 - \frac{k_r}{k_s} \phi_1 \right) \frac{1 - (1-u)^{k_r/\rho}}{k_r} \right) \\ \phi_2 \frac{1 - (1-u)^{k_s/\rho}}{k_s} \end{pmatrix} \xrightarrow{u \rightarrow 1} \begin{pmatrix} \frac{1}{k_r} \\ \frac{\phi_2}{k_s} \end{pmatrix}.$$

Здесь учтено, что $\phi_1 + \phi_2 = 1$. Функция $a(u)$ находится подстановкой этих результатов в уравнение (3.9) и последующим интегрированием. Из-за громоздкости получающееся в результате выражение $a(u)$ здесь не приводится. Затем используются выражения (3.8) для вычисления кривой доходности $Y(u | r, s)$ и форвардной кривой $F(u | r, s)$.

В этом случае предельные доходности вычисляются по формулам

$$\lim_{u \rightarrow 0} Y(u | s, r) = \lim_{u \rightarrow 0} F(u | s, r) = r\phi_1 + s\phi_2,$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} Y(u | s, r) = \lim_{u \rightarrow 1} F(u | s, r) = \theta - \frac{\lambda_1 \sigma_1}{k_r} - \frac{\lambda_2 \sigma_2 \phi_2}{k_s} - \frac{\sigma_1^2}{2k_r^2} - \frac{\sigma_2^2 \phi_2^2}{2k_s^2}.$$

Когда весовые коэффициенты заданы так, что $\phi_1 = 1$ и $\phi_2 = 0$, то этот вариант двухфакторной модели сводится к однофакторной, так как при $\phi_2 = 0$ уравнение (3.10) для компоненты $b_s(u)$ имеет нулевое решение и поэтому $b_s(u) = 0, 0 \leq u \leq 1$.

Модель 3. Е. Шью и Й. Яо (Shiu, Yao, 1999) использовали идею модели 2, но в другой интерпретации. Предложенная ими двухфакторная модель описывается уравнениями

$$\begin{pmatrix} dr(t) \\ ds(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_r(s(t) - r(t)) \\ k_s(r(t) - s(t)) \end{pmatrix} dt + \sigma dW(t).$$

Параметры модели в этом случае задаются соотношениями

$$K = \begin{pmatrix} k_r & -k_r \\ -k_s & k_s \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \sigma_1 \lambda_1 \\ \sigma_2 \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы K , $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = k_r + k_s$, – неотрицательные. Особенность этой модели состоит в том, что одно из собственных чисел, π_1 , равно нулю, и поэтому функции $b(u)$ при $u \rightarrow 1$ неограниченно возрастают. Действительно, вектор $b(u)$ имеет компоненты

$$b(u) = \begin{pmatrix} \frac{-k_s}{k_r + k_s} \left(\left(\phi_2 - \phi_1 \frac{k_r}{k_s} \right) \frac{1 - (1-u)^{(k_r+k_s)/\rho}}{k_r + k_s} + \frac{\ln(1-u)}{\rho} \right) \\ \frac{k_s}{k_r + k_s} \left(\left(\phi_2 - \phi_1 \frac{k_r}{k_s} \right) \frac{1 - (1-u)^{(k_r+k_s)/\rho}}{k_r + k_s} - \frac{k_r}{k_s} \frac{\ln(1-u)}{\rho} \right) \end{pmatrix} \xrightarrow{u \rightarrow 1} \begin{pmatrix} +\infty \\ +\infty \end{pmatrix}.$$

Это означает, что кривые доходности $Y(u | r, s)$ и $F(u | r, s)$ при $u \rightarrow 1$ также будут неограниченно возрастать по абсолютной величине. Например, форвардная кривая $F(u | r, s)$ вычисляется по формуле

$$F(u | r, s) = x^T \phi - (\xi + K(x - \theta))^T b(u) - b(u)^T \alpha b(u) / 2, \quad x^T = (r, s),$$

откуда видно, что поскольку α – положительно определенная матрица, при $u \rightarrow 1$ кривая $F(u | r, s) \rightarrow -\infty$. Так что эта версия двухмерной модели не отображает реальные зависимости и не может быть использована для моделирования реальной доходности.

В заключение приведем численный пример, иллюстрирующий сходство и различие кривых доходности, получаемых рассмотренными тремя моделями. В качестве исходных данных выберем оценки параметров процесса краткосрочной ставки $r(t)$, полученные в статье (Ahn, Gao, 1999) при обработке временного ряда годовой ставки доходности одномесечных бумаг Казначейства США с декабря 1946 г. по февраль 1991 г.:

$$k_r = 0,1283, \quad k_s = 0,0484, \quad \theta = 0,0827, \quad \sigma_1 = 0,01333, \quad \sigma_2 = 0,00333.$$

В качестве других параметров возьмем следующие: $\phi_1 = 1 - \phi_2 = 0,8$, $\rho = 0,076753$, $\lambda_1 = 0,1$, $\lambda_2 = 0,1$, $s = 0,085$, $r = 0,03$. Результаты численных расчетов приведены на рис. 3.3 и 3.4.

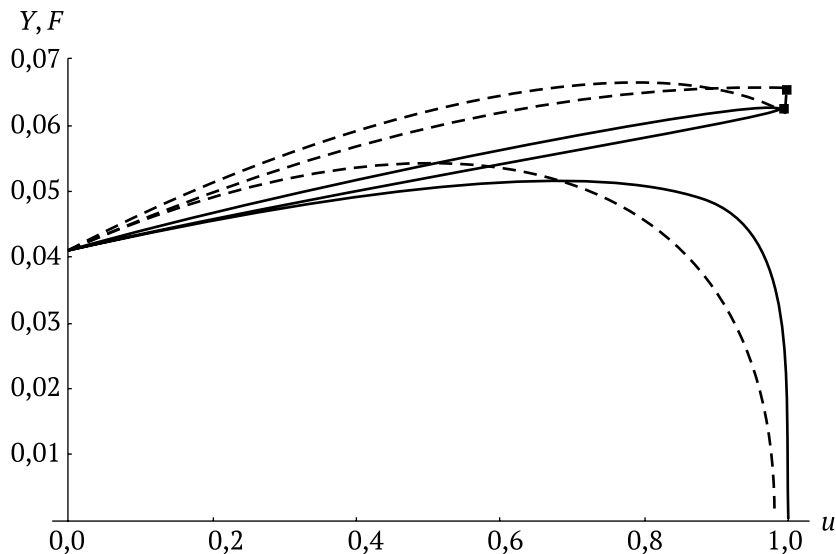


Рис. 3.3. Кривые доходности $Y(u)$ и форвардные кривые $F(u)$ для моделей 1–3

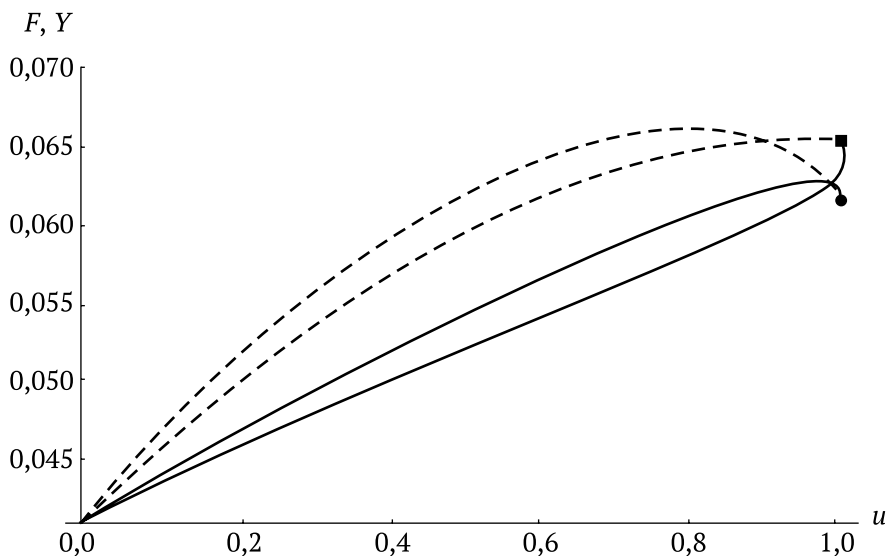


Рис. 3.4. Кривые доходности $Y(u)$ и форвардные кривые $F(u)$ для моделей 1 и 2

На рис. 3.3 представлены кривые доходности $Y(u|r, s)$ и форвардные кривые $F(u|r, s)$ для всех трех моделей. Пунктирные линии показывают форвард-

ные кривые $F(u)$, а сплошные линии – кривые доходности $Y(u)$. Все шесть кривых стартуют из одной и той же точки $Y(0) = F(0) = r\phi_1 + s\phi_2 = 0,041$. Однако предельные значения кривых при $u \rightarrow 1$ различные: $Y_1(1) = F_1(1) = 0,061687$, $Y_2(1) = F_2(1) = 0,065442$, $Y_3(1) = F_3(1) = -\infty$. Модели 1 и 2 дают похожие результаты. Для того чтобы можно было рассмотреть их детально, они приведены на рис. 3.4 в другом более подходящем масштабе.

Во всех случаях кривые имеют свойство выпуклости (в одном случае – кривая доходности для модели 2 – выпуклость книзу, в остальных случаях – кверху). Модель 3 имеет не характерные для реального финансового рынка свойства: долгосрочные ставки оказываются, во-первых, отрицательными и, во-вторых, в пределе $u \rightarrow 1$ принимают неограниченные значения. Модель 2 в наиболее часто встречающемся на практике случае $\phi_2 = 0$ сводится к однофакторной модели.

Глава 4

МОДЕЛЬ КОКСА – ИНГЕРСОЛЛА – РОССА

Исторически первой популярной моделью динамики процентной ставки является модель Васичека (1977 г.), рассмотренная в предыдущей главе. Она предполагает, что стохастическая процентная ставка следует процессу Орнштейна – Уленбека, в финансовом анализе обычно называемому «процессом с возвращением к среднему». В этой модели процентная ставка имеет нормальное распределение, что очевидно является экономически несостоятельным, так как по смыслу процентная ставка не может принимать отрицательных значений. Вместе с тем эта модель использовалась по той причине, что во многих случаях соотношение между средним значением и дисперсией реальных ставок таково, что вероятность появления их отрицательных значений оказывается очень малой. В то же время анализ модели Васичека и цен активов, основанных на ней, очень прост, так как приводит к линейным задачам. Позже, в 1985 г., Коксом, Ингерсоллом и Россом была предложена другая модель, называемая еще «моделью с квадратным корнем», в условиях которой процентная ставка принимает только неотрицательные значения и имеет распределение гамма. Однако анализ процентных ставок и цен активов, основанных на этой модели, хотя и приводит к аналитическим результатам, но они существенно сложнее, так как предполагают решение нелинейных задач. Возможность получения аналитических результатов – главное преимущество аффинных моделей. Аналитические результаты важны, потому что иначе доходности должны вычисляться либо методами Монте-Карло, либо методами решения уравнений с частными производными. Оба эти подхода являются в вычислительном отношении трудоемкими, особенно когда параметры модели нужно оценивать, используя выборочные данные доходностей облигаций, поэтому литература по определению цен облигаций, начиная с работ Васичека и Кокса, Ингерсолла и Росса (далее – CIR), сосредоточивала внимание на решениях в замкнутой форме. Безрисковая процентная

ставка в этих первых однофакторных постановках была единственным параметром состояния финансового рынка, а это приводило к тому, что доходности облигаций всех сроков погашения были полностью коррелированы. Последовали многие расширения этих постановок как с точки зрения числа переменных состояния, так и с точки зрения процессов, порождающих эти переменные. Д. Даффи и Р. Каном (Duffie, Kan, 1996) предложена полная характеристика моделей с аффинными доходностями облигации. С практической точки зрения интересно рассмотреть проблему, насколько сильно различаются результаты, полученные с помощью этих моделей. Основной целью настоящей главы является получение аналитических решений при анализе временной структуры процентных ставок доходности бескупонных облигаций, использующей модель Кокса – Ингерсолла – Росса в однофакторном и многофакторном вариантах, а также сравнение кривых доходности и форвардных кривых, вытекающих из описанных выше моделей поведения краткосрочной процентной ставки.

ОДНОФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ КОКСА – ИНГЕРСОЛЛА – РОССА

В однофакторном случае в качестве состояния рынка обычно принимается краткосрочная ставка $X(t) = r(t)$, а соответствующее стохастическое уравнение имеет вид (Cox, Ingersoll, Ross, 1985)

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad (4.1)$$

где k, θ, σ – скалярные константы, т. е. $K = k, \alpha = 0, \beta = \sigma^2, \xi = 0, \eta = \sigma\lambda$.

В этом случае принимается, что $y(r) = r$, т. е. $\phi = 1$. Уравнения для определения функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$ (см. формулы (2.4) и (2.5)) приобретают вид

$$\begin{aligned} A'(\tau) &= -k\theta B(\tau), \quad A(0) = 0, \\ B'(\tau) &= 1 - (\sigma\lambda + k)B(\tau) - \sigma^2 B(\tau)^2/2, \quad B(0) = 0. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений выражаются в виде

$$A(\tau) = \frac{2k\theta}{\sigma^2} [v\tau - \ln(1 + vB(\tau))], \quad B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon\tau} - 1} + V \right)^{-1}, \quad (4.2)$$

где для краткости обозначено

$$\varepsilon = \sqrt{(k + \sigma\lambda)^2 + 2\sigma^2}, \quad v = (\varepsilon - \sigma\lambda - k)/2, \quad V = (\varepsilon + \sigma\lambda + k)/2.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} v + V &= \varepsilon, \quad vV = \sigma^2/2, \quad V - v = \sigma\lambda + k, \\ \tau &= [\ln(1 + vB) - \ln(1 - vB)]/\varepsilon. \end{aligned}$$

Кривая доходности $y(\tau, r)$ и форвардная кривая $f(\tau, r)$ определяются соответственно выражениями

$$y(\tau, r) = r \frac{B(\tau)}{\tau} + \frac{k\theta}{V} \left(1 - \frac{\ln(1 + vB(\tau))}{\tau v} \right) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} y(\infty) = \frac{k\theta}{V},$$

$$f(\tau, r) = r + [k\theta - (V - v)r]B(\tau) - vVr[B(\tau)]^2 \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{k\theta}{V} = y(\infty).$$

Функция $B(\tau)$ в этом случае является монотонно возрастающей функцией от 0 до $1/V$ при увеличении τ от 0 до ∞ . $B(\infty) = 1/V$. Поскольку $B(\tau)$ – монотонная функция, определяющая дюрацию процентной ставки, ее значения и в этом случае могут быть использованы в качестве значений аргумента для кривой доходности $y(\tau, r)$ и форвардной кривой $f(\tau, r)$ вместо срока до погашения τ так, чтобы

$$y(\tau, r) \leftrightarrow Y(B, r), f(\tau, r) \leftrightarrow F(B, r).$$

Аналитические выражения для функций $Y(B, r)$ и $F(B, r)$ имеют вид (Медведев, 2005)

$$Y(B, r) = \frac{k\theta}{V} + \varepsilon \frac{rB - k\theta \ln(1 + vB)/vV}{\ln(1 + vB) - \ln(1 - VB)},$$

$$F(B, r) = r + [k\theta - (V - v)r]B - vVrB^2.$$

Как видно, выражения для функций $y(\tau, r)$ и $f(\tau, r)$, а следовательно, и для $Y(B, r)$ и $F(B, r)$ рассматриваемой модели Кокса – Ингерсолла – Росса (модели CIR) существенно отличаются по внешнему виду от соответствующих выражений в модели Васичека. В связи с этим интересно сравнить поведение этих функций для согласованных процессов безрисковой процентной ставки (4.1), которые, как в модели Васичека, так и в модели CIR, задаются тремя параметрами: k , θ и σ . В обоих процессах параметр θ – стационарное математическое ожидание процесса, а параметр k определяет функцию корреляции процесса $r(t)$ $\rho(\tau) = \exp\{-k|\tau|\}$. Волатильностью σ определяется стационарная дисперсия D процессов по следующим формулам: для модели Васичека $D = \sigma^2/2k$, для модели CIR $D = \sigma^2\theta/2k$. Согласованными процессами безрисковой процентной ставки будем называть такие, у которых стационарные математические ожидания θ , стационарные дисперсии D , а также функции корреляции $\rho(\tau)$ одинаковы. Чтобы сами модели были согласованы, к этому добавим требование: значения функции рыночной цены риска $\lambda(r)$ для обеих моделей должны быть одинаковы при $r = \theta$.

Можно сразу указать на следующее очевидное различие в моделях Васичека и CIR. Предельные ставки доходности $y(\infty)$ в рассматриваемых моделях различные: для модели Васичека $y(\infty) = \theta - \sigma\lambda/k - \sigma^2/2k^2$, а для модели CIR $y(\infty) = 2k\theta/(\varepsilon + \sigma\lambda + k)$. Поскольку по определению $\varepsilon > 0$ предельная доходность в модели CIR всегда положительна, в то время как при достаточно большой волатильности $\sigma > k(\sqrt{\lambda^2 + 2\theta} - \lambda)$ предельная доходность в модели Васичека становится отрицательной, что противоречит экономическому смыслу доходности. На рис. 4.1 это иллюстрируется численными расчетами.

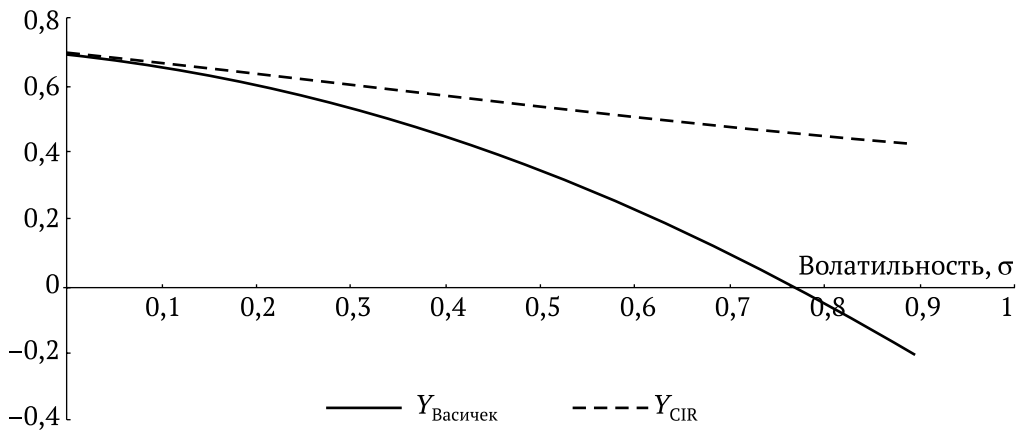


Рис. 4.1. Поведение предельной доходности в зависимости от волатильности для моделей Васичека и CIR при $\theta = 0,7$; $k = 0,8$; $\lambda = 0,25$

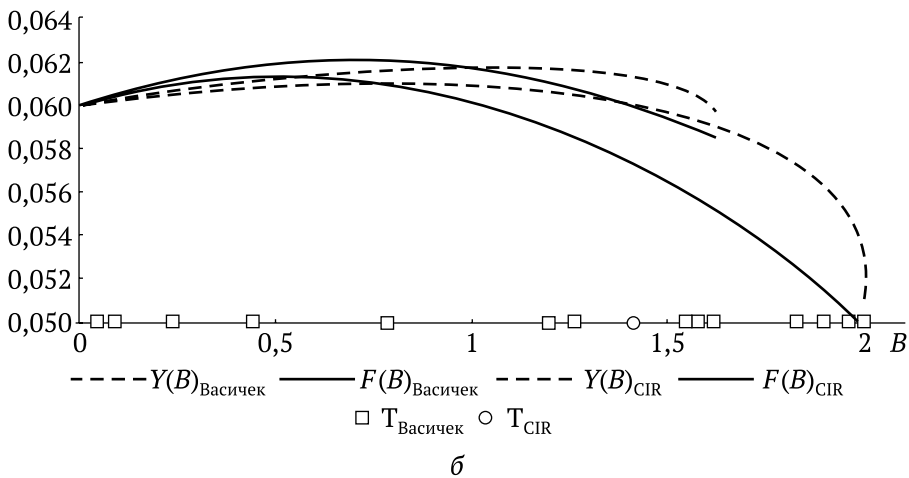
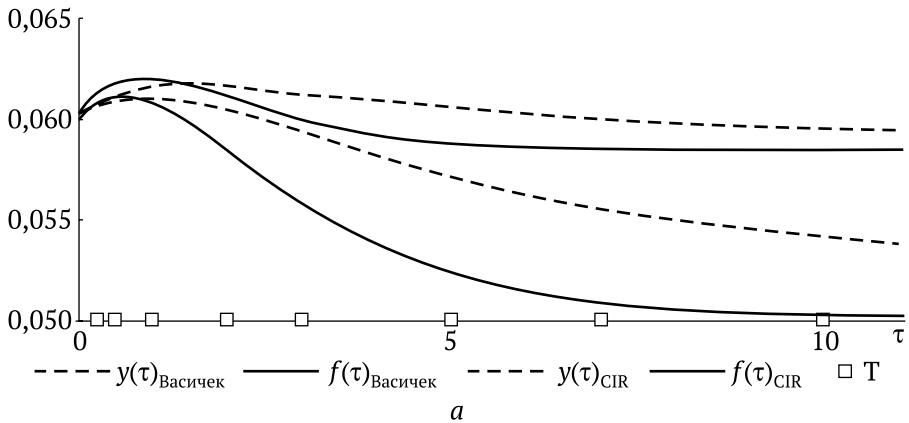


Рис. 4.2. Графики функций в случае однофакторных моделей Васичека и CIR для согласованных процессов безрисковой ставки:
а – $y(\tau, r)$ и $f(\tau, r)$; б – $Y(B, r)$ и $F(B, r)$

На рис. 4.2, а, б для сравнения представлены два способа изображения кривой доходности $y(\tau, r)$ и форвардной кривой $f(\tau, r)$ как функций от срока до погашения τ (рис. 4.2, а) и как функций $Y(B, r)$ и $F(B, r)$ от дюрации $B(\tau)$ процентной ставки r (рис. 4.2, б). Из рисунков видно, что первый способ позволяет изображать функции только для ограниченного интервала времени (на рисунках до 10 лет), в то время как второй способ показывает зависимости для всего интервала сроков до погашения от 0 до ∞ . Для выбранных параметров на рисунках кривые, соответствующие модели CIR, располагаются выше, чем соответствующие кривые модели Васичека.

При построении графиков на рис. 4.2, а, б были выбраны следующие значения параметров: $k = 0,5$; $\sigma_{\text{Васичек}} = 0,1$; $\sigma_{\text{CIR}} = 0,3724$; $\lambda = 0,01$; $\theta = 0,0721$; $r = 0,06$. Маркерами на горизонтальной оси рисунков отмечены обычно используемые сроки до погашения бескупонных облигаций: 0,25, 0,5, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20 и 30 лет (на рис. 4.2, б квадратные метки соответствуют модели Васичека, а круглая – модели CIR). На рис. 4.2, а по горизонтальной оси показаны сроки до погашения τ в годах; на рис. 4.2, б по горизонтальной оси отложена дюрация $B(\tau)$. Заметим, что предельные значения дюраций безрисковой процентной ставки $B(\tau)$ для различных моделей различаются. В частности, из выражения (4.2) следует, что для модели CIR при $\tau \rightarrow \infty$ дюрация $B(\tau) \rightarrow B(\infty) = 1/V$, в то время как для модели Васичека при $\tau \rightarrow \infty$ дюрация $B(\tau) \rightarrow B(\infty) = 1/k$. Если $\sigma_{\text{CIR}} + k\lambda > 0$, то $V > k$, и интервал изменения дюрации безрисковой процентной ставки для модели CIR будет короче, чем у модели Васичека. Для выбранных параметров на рисунках $B_{\text{CIR}}(\infty) = 1,623$, в то время как $B_{\text{Васичек}}(\infty) = 2$.

ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ CIR НА МНОГОФАКТОРНЫЙ СЛУЧАЙ

В многофакторном случае при $m = n$ (размерность вектора винеровских процессов m совпадает с размерностью вектора состояния n) уравнение для состояния рынка приобретает вид

$$dX(t) = K(\theta - X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t).$$

Здесь предполагается, что $K - (n \times n)$ -матрица, $\theta - n$ -вектор, матрица волатильности $\sigma(x) = \sigma \langle \sqrt{x} \rangle$, $\sigma - (n \times n)$ -матрица, а вектор рыночных цен риска тоже зависит от состояния рынка $\lambda(x) = \langle \sqrt{x} \rangle \lambda$, $\langle \sqrt{x} \rangle -$ диагональная $(n \times n)$ -матрица, по диагонали которой стоят квадратные корни компонент вектора x . Таким образом,

$$\sigma(x)\sigma(x)^T = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \sigma(x)\lambda(x) = \sum_{i=1}^n \eta_i x_i.$$

Дифференциальные уравнения для функции $A(\tau)$ и компонент вектора $B(\tau)$ будут иметь вид

$$A'(\tau) = -(K\theta)^T B(\tau), A(0) = 0, \quad (4.3)$$

$$B_i'(\tau) = \phi_i - B(\tau)^T(\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau)/2, B_i(0) = 0; 1 \leq i \leq n. \quad (4.4)$$

В системе уравнений (4.5) символ K_i обозначает i -й столбец матрицы K , $1 \leq i \leq n$, а элементы вектора η_i и матрицы β_i определяются выражениями

$$(\beta_i)_{kj} = \sigma_{ki} \sigma_{ji}, 1 \leq k, j \leq n; (\eta_i)_k = \sigma_{ki} \lambda_i, 1 \leq k \leq n; 1 \leq i \leq n.$$

Функция $A(\tau)$ достаточно просто определяется из уравнения (4.3), если вектор $B(\tau)$ известен. Однако решение системы уравнений (4.4) для $B(\tau)$ в аналитическом виде получить не удастся, и $B(\tau)$ определяется только численно. Рассмотрим эту проблему для частного случая $n = 2$ в предположении, что состояние рынка описывается не только краткосрочной ставкой, но также экспоненциально сглаженным ее средним значением (CIR, 1985). Состояние рынка $X(t)$ в этом случае характеризуется двумя компонентами, одной из которых $r(t)$ является наблюдаемая краткосрочная ставка, а другой $s(t)$ – экспоненциально сглаженное ее среднее значение. Уравнения состояния рынка приобретают вид

$$dr(t) = k_1(\theta - r(t))dt + \sigma_1 \sqrt{r(t)} dW_1(t),$$

$$ds(t) = k_2(r(t) - s(t))dt + \sigma_2 \sqrt{s(t)} dW_2(t).$$

Параметры модели в этом случае задаются соотношениями

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Винеровские процессы $W_1(t)$ и $W_2(t)$ предполагаются независимыми. Уравнения (4.3) и (4.4) для функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ получаются такими:

$$A'(\tau) = -k_1 \theta B_1(\tau), A(0) = 0. \quad (4.5)$$

$$B_1'(\tau) = \phi_1 - (\sigma_1 \lambda_1 + k_1) B_1(\tau) + k_2 B_2(\tau) - \sigma_1^2 B_1^2(\tau)/2, B_1(0) = 0. \quad (4.6)$$

$$B_2'(\tau) = \phi_2 - (\sigma_2 \lambda_2 + k_2) B_2(\tau) - \sigma_2^2 B_2^2(\tau)/2, B_2(0) = 0. \quad (4.7)$$

Решение этой системы следует реализовывать в следующей последовательности. Сначала решается уравнение Риккати (4.7), его решение можно представить в явной форме, подобной (4.2):

$$B_2(\tau) = \left(\frac{\varepsilon_2}{e^{\varepsilon_2 \tau} - 1} + V_2 \right)^{-1},$$

где для краткости обозначено

$$\varepsilon_2 = \sqrt{(k_2 + \sigma_2 \lambda_2)^2 + 2\phi_2 \sigma_2^2}, V_2 = (\varepsilon_2 + \sigma_2 \lambda_2 + k_2)/2.$$

Затем следует решать уравнение Риккати (4.6) относительно дюрации $B_1(\tau)$, которое отличается от уравнения (4.7) тем, что не все его параметры являются константами, а это не позволяет представить решение в явном виде. Однако для вычисления $B_1(\tau)$ может быть использована следующая приближенная формула:

$$\tilde{B}_1(\tau) = \left(\frac{\varepsilon_1(\tau)}{e^{\tau\varepsilon_1(\tau)} - 1} + V_1(\tau) \right)^{-1}, \quad (4.8)$$

где использованы обозначения

$$\varepsilon_1(\tau) = \sqrt{(k_1 + \sigma_1\lambda_1)^2 + 2(\phi_1 + k_2B_2(\tau))\sigma_1^2}, \quad V_1(\tau) = (\varepsilon_1(\tau) + \sigma_1\lambda_1 + k_1)/2.$$

Определим относительную точность $\delta(\tau)$ аппроксимации функции $B_1(\tau)$, вычисляемой по формуле (4.8) соотношением $\delta(\tau) = (\tilde{B}_1(\tau) - B_1(\tau))/B_1(\tau)$. На рис. 4.3 представлен пример относительной точности $\delta(\tau)$, вычисленной для следующих значений параметров:

$$\begin{aligned} \phi_1 = 0,8; \phi_2 = 0,2; k_1 = 1,2; k_2 = 0,36; \lambda_1 = 0,05; \lambda_2 = 0,05; \\ \theta = 0,0721; \sigma_1 = 0,09; \sigma_2 = 0,045. \end{aligned}$$

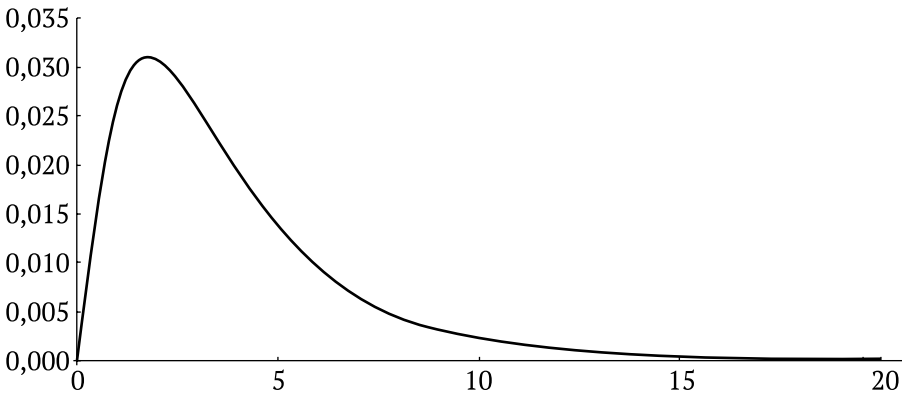


Рис. 4.3. Относительная точность $\delta(\tau)$ аппроксимации функции $B_1(\tau)$

При известной функции $B_1(\tau)$ третье уравнение (4.5) может быть проинтегрировано.

Получив таким образом функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$, для определения кривой доходности $y(\tau, r)$ и форвардной кривой $f(\tau, r)$ можно использовать формулы (Медведев, 2012)

$$y(\tau, x) = \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, x) = x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}.$$

Затем, переходя к новой временной переменной $B_1(\tau)$, получаем функции $F(B_1, r, s)$ и $Y(B_1, r, s)$.

На рис. 4.4 представлены графики этих функций для двухфакторных моделей Васичека и CIR.

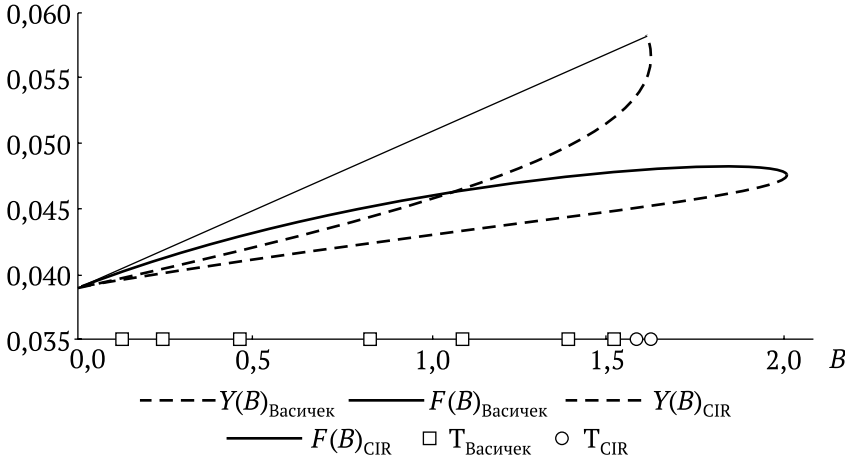


Рис. 4.4. Графики функций $F(B, r, s)$ и $Y(B, r, s)$ в случае двухфакторных моделей Васичека и CIR для согласованных процессов безрисковой ставки, $r < \theta$

При построении графиков на рис. 4.4 выбраны следующие числовые значения параметров: $\phi_1 = 0,5$; $\phi_2 = 0,5$; $k_1 = 0,5$; $k_2 = 0,4$; $\lambda_1 = 2\lambda_2 = 0,02$; $\theta = 0,0721$; $r = 0,02$; $s = 0,058$; из условия согласования процессов безрисковой ставки для модели Васичека: $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 0,01$; для модели CIR: $\sigma_1 = 0,3724$; $\sigma_2 = 0,0372$. По горизонтальной оси отложена дюрация $B_1(\tau)$. Маркерами на горизонтальной оси отмечены обычно используемые сроки до погашения бескупонных облигаций (квадратные метки соответствуют модели Васичека, а круглые – модели CIR). Видно, что предельные значения дюраций безрисковой процентной ставки $B_1(\tau)$ для различных моделей различаются. В частности, для модели Васичека при $\tau \rightarrow \infty$ дюрация $B_1(\tau) \rightarrow B_1(\infty) = 1/k_1$. Однако для модели CIR предельное значение при $\tau \rightarrow \infty$ дюрация $B_1(\tau)$ стремится к значению $B_1(\infty)$, которое выражается через параметры довольно громоздко:

$$B_1(\infty) = \left[\sqrt{(\sigma_1 \lambda_1 + k_1)^2 + 2(\phi_1 + k_2 B_2(\infty)) \sigma_1^2} - \sigma_1 \lambda_1 - k_1 \right] / \sigma_1^2,$$

где в свою очередь $B_2(\infty)$ определяется формулой

$$B_2(\infty) = \left[\sqrt{(\sigma_2 \lambda_2 + k_2)^2 + 2\phi_2 \sigma_2^2} - \sigma_2 \lambda_2 - k_2 \right] / \sigma_2^2.$$

Для выбранных параметров рис. 4.4 дюрация $B_{1CIR}(\infty) = 1,6123$, в то время как $B_{1Васичек}(\infty) = 2$.

На рис. 4.5 представлены графики функций $F(B, r, s)$ и $Y(B, r, s)$ для таких же значений параметров, что и в случае рис. 4.4, за одним исключением: значение безрисковой процентной ставки в дату определения цены бескупонной облигации $r = 0,12$ больше среднего значения безрисковой процент-

ной ставки $\theta = 0,0721$ (для рис. 4.3 эта ставка $r = 0,02$). Как видно, изменение процентной ставки r может существенным образом изменять картину поведения кривой доходности и форвардной кривой.

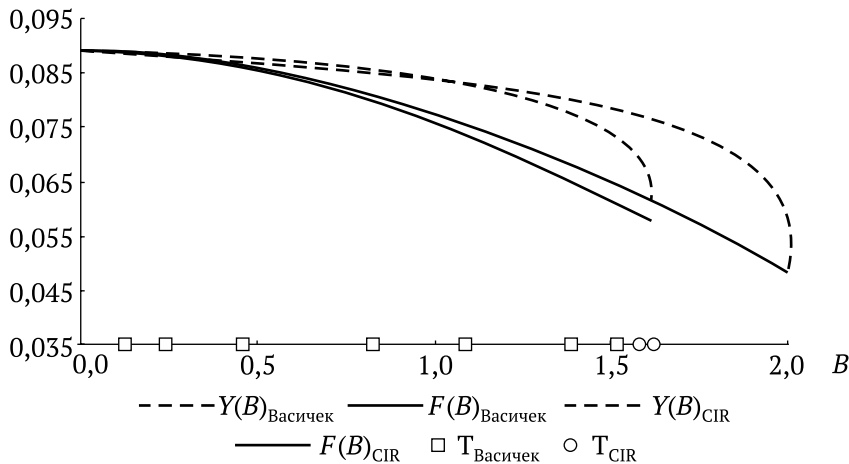


Рис. 4.5. Графики функций $F(B, r, s)$ и $Y(B, r, s)$ в случае двухфакторных моделей Васичека и CIR для согласованных процессов безрисковой ставки, $r > \theta$

Не анализируя подробно полученные с помощью численных расчетов графики функций $F(B)$ и $Y(B)$, отметим их особенности. Кривая доходности $Y(B)$ в окрестности предельной доходности при $B_1(\infty)$ имеет неограниченную по абсолютной величине производную. Для использованных значений параметров модели можно отметить следующее. При малых значениях безрисковой процентной ставки в момент определения цены бескупонной облигации, например, когда $r < \theta$, форвардная ставка $F(B)$ больше ставки доходности до погашения $Y(B)$ для любых значений дюрации безрисковой ставки B_1 . При больших значениях безрисковой процентной ставки в момент определения цены бескупонной облигации, когда $r > \theta$, форвардная ставка $F(B)$, наоборот, меньше ставки доходности до погашения $Y(B)$ также для любых значений дюрации безрисковой ставки B_1 . Кроме того, в первом случае ($r < \theta$) доходности для модели CIR больше соответствующих доходностей модели Васичека, а во втором случае ($r > \theta$), наоборот, доходности для модели Васичека больше соответствующих доходностей модели CIR. Эти особенности функций $F(B)$ и $Y(B)$ можно уточнить аналитически, но это займет много места.

Заметим, что, используя систему уравнений (4.3) и (4.4), форвардную кривую для модели CIR можно записать в векторной форме:

$$f(\tau, x) = x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} = \\ = x^T \phi - B(\tau)^T [\sigma(x)\lambda(x) - K(\theta - x)] - B(\tau)^T \sigma(x)\sigma(x)^T B(\tau)/2 \equiv F(B, x).$$

Отсюда следует, что вторая производная форвардной кривой $F(B, x)$ по составляющим вектора дюраций компонент состояния B является отрицательно определенной матрицей (вектор состояний здесь рассматривается как вектор параметров):

$$\frac{d^2 F(B, x)}{dB^2} = -\sigma(x)\sigma(x)^T.$$

Это, в частности, означает, что форвардные кривые в моделях CIR всегда являются вогнутыми функциями.

МОДЕЛЬ ЛОНГСТАФФА – ШВАРЦА И ЕЕ РАСШИРЕНИЕ

Известной версией двухфакторной модели CIR является модель Лонгстаффа – Шварца (Longstaff, Schwartz, 1992). В этой модели в качестве исходных переменных состояния выбираются два независимых процесса CIR, имеющих смысл неких ненаблюдаемых экономических факторов:

$$\begin{aligned} dx &= (a - bx)dt + \sqrt{x}dW_1, \\ dy &= (d - ey)dt + \sqrt{y}dW_2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В дальнейшем считается, что взвешенная сумма этих факторов образует краткосрочную процентную ставку

$$r(t) = \alpha x(t) + \beta y(t), \quad (4.10)$$

где α и β – неотрицательные константы. Использование исходных уравнений и формулы Ито позволяет написать, что

$$\begin{aligned} dr(t) &= \alpha dx(t) + \beta dy(t) = \\ &= [\alpha a + \beta d - \alpha x(t) - \beta y(t)]dt + \alpha \sqrt{x(t)}dW_1(t) + \beta \sqrt{y(t)}dW_2(t). \end{aligned}$$

Заметим, что стационарные математические ожидания процессов $x(t)$ и $y(t)$ определяются равенствами $E[x(t)] = a/b$ и $E[y(t)] = d/e$. По тем же причинам квадрат $dr(t)$ имеет вид

$$(dr(t))^2 = \alpha^2 x(t)dt + \beta^2 y(t)dt.$$

Локальная (по времени) дисперсия изменения процентной ставки за интервал времени $(t, t + dt)$ на единицу времени равна

$$V(t) = \alpha^2 x(t) + \beta^2 y(t). \quad (4.11)$$

Из (4.10) и (4.11) следует, что между парами (x, y) и (r, V) имеется взаимно однозначная связь, определяемая соотношениями

$$r = \alpha x + \beta y, \quad V = \alpha^2 x + \beta^2 y,$$

$$x = \frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}, \quad y = \frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}. \quad (4.12)$$

Поэтому более естественно рассматривать в качестве переменных состояния не ненаблюдаемые неопределенные «экономические факторы» (x, y) , а имеющие вполне определенный смысл процентную ставку r и ее локальную дисперсию V . Однако следует заметить, что если областью задания переменных (x, y) является весь первый квадрант плоскости (X, Y) , то переменные (r, V) принимают значения только в ограниченной области первого квадранта, определяемой неравенствами $\alpha r < V < \beta r$ (или $V/\beta < r < V/\alpha$), $0 < \alpha < \beta$, в которой малым ставкам могут соответствовать только малые дисперсии (или малые дисперсии имеют только малые процентные ставки). Имея в виду существующее линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} r \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

вместо системы уравнений (4.9) по формуле Ито получим соответствующую систему для (r, V) :

$$d \begin{pmatrix} r \\ V \end{pmatrix} = K \left(\theta - \begin{pmatrix} r \\ V \end{pmatrix} \right) dt + \sigma(r, V) d \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

где

$$K = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} e\alpha - b\beta & b - e \\ \alpha\beta(e - b) & b\alpha - e\beta \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/b \\ d/e \end{pmatrix},$$

$$\sigma(r, V) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(\beta r - V)}{\alpha(\beta - \alpha)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{(V - \alpha r)}{\beta(\beta - \alpha)}} \end{pmatrix}.$$

Для определения дифференциальных уравнений для функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ применим технику, описанную в главе 2. Для получения системы уравнений (2.4) и (2.5) воспользуемся разложением по переменным r и V элементов стохастического дифференциального уравнения (4.14). При составлении уравнений (2.5) следует весовые коэффициенты ϕ_i выбирать таким образом, чтобы было выполнено необходимое условие $\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau, x) = r$. Так что если в качестве переменных состояния принимают (r, V) , то $\phi_r = 1$, а $\phi_V = 0$. Если в качестве переменных состояния используются (x, y) , то $\phi_x = \alpha$, а $\phi_y = \beta$. Заметим, что

$$K\theta = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta d \\ \alpha^2 a + \beta^2 d \end{pmatrix}, \quad K_r = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} e\alpha - b\beta \\ \alpha\beta(e - b) \end{pmatrix}, \quad K_V = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} b - e \\ b\alpha - e\beta \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\sigma(r, V)\sigma(r, V)^T &= \beta_0 + \beta_r r + \beta_V V, \\ \beta_0 &= 0, \quad \beta_r = -\alpha\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha + \beta \end{pmatrix}, \quad \beta_V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \beta \\ \alpha + \beta & \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \end{pmatrix}, \\ \sigma(r, V)\lambda(r, V)^T &= \xi + \eta_r r + \eta_V V, \\ \xi &= 0, \quad \eta_r = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta\lambda_r - \alpha\lambda_V \\ \alpha\beta(\lambda_r - \lambda_V) \end{pmatrix}, \quad \eta_V = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \lambda_r - \lambda_V \\ \alpha\lambda_r - \beta\lambda_V \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Здесь предполагается, что рыночные цены риска определяются соотношением $\lambda(r, V) = (\lambda_r, \lambda_V)\sigma(r, V)$, где λ_r и λ_V – константы. Подставляя полученные разложения в уравнения (2.4) и (2.5), находим систему уравнений для функций временной структуры $A(\tau)$, $B_r(\tau)$ и $B_V(\tau)$:

$$A'(\tau) = -(\alpha a + \beta d)B_r(\tau) - (\alpha^2 a + \beta^2 d)B_V(\tau), \quad A(0) = 0, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}B_r'(\tau) &= 1 - B(\tau)^T(\eta_r + K_r) - B(\tau)^T\beta_r B(\tau)/2 = \\ &= 1 - \frac{1}{\alpha - \beta}((e\alpha - b\beta - \beta\lambda_r + \alpha\lambda_V)B_r(\tau) + \alpha\beta(e - b - \lambda_r + \lambda_V)B_V(\tau)) + \\ &\quad + \alpha\beta B_V(\tau)(B_r(\tau) + (\alpha + \beta)B_V(\tau)/2), \quad B_r(0) = 0, \quad (4.16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_V'(\tau) &= -B(\tau)^T(\eta_V + K_V) - \frac{1}{2}B(\tau)^T\beta_V B(\tau) = \\ &= -\frac{1}{\alpha - \beta}((b - e + \lambda_r - \lambda_V)B_r(\tau) + (b\alpha - e\beta + \alpha\lambda_r - \beta\lambda_V)B_V(\tau)) - \\ &\quad - \frac{1}{2}B_r(\tau)^2 - (\alpha + \beta)B_r(\tau)B_V(\tau) - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)B_V(\tau)^2, \quad B_V(0) = 0. \quad (4.17)\end{aligned}$$

К сожалению, полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений для (B_r, B_V) относится к системам уравнений Риккати, является нелинейной, и не известно какого-либо способа для получения ее аналитического решения. Вместе с тем задача определения временной структуры рассматриваемой модели при использовании исходных ненаблюдаемых переменных состояния (x, y) имеет аналитическое решение. Действительно, для системы (4.9) получаются следующие данные для составления уравнений (2.4) и (2.5):

$$\begin{aligned}K &= \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} a/b \\ d/e \end{pmatrix}, \quad K\theta = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}, \\ \sigma(x, y)\sigma^T(x, y) &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}y, \\ \beta_0 &= 0, \quad \beta_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Если положить, что рыночные цены риска определяются соотношением $\lambda(x, y) = (\lambda_x, \lambda_y)\sigma(x, y)$, где λ_x и λ_y – константы, тогда

$$\sigma(x, y)\lambda^T(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda_x x \\ \lambda_y y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_x \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_y \end{pmatrix} y,$$

$$\xi = 0, \quad \eta_x = \begin{pmatrix} \lambda_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_y = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_y \end{pmatrix}.$$

Система дифференциальных уравнений (2.4) и (2.5) для этих данных имеет вид

$$A'(\tau) = -aB_x(\tau) - dB_y(\tau), \quad A(0) = 0,$$

$$B_x'(\tau) = \alpha - (\lambda_x + b)B_x(\tau) - B_x^2(\tau)/2, \quad B_x(0) = 0, \quad (4.18)$$

$$B_y'(\tau) = \beta - (\lambda_y + e)B_y(\tau) - B_y^2(\tau)/2, \quad B_y(0) = 0. \quad (4.19)$$

Два последних уравнения уже не составляют систему, а являются независимыми скалярными уравнениями Риккати, имеющими аналитическое решение:

$$B_x(\tau) = \alpha \left(\frac{\varepsilon_x}{e^{\varepsilon_x \tau} - 1} + J_x \right)^{-1}, \quad \varepsilon_x = \sqrt{(b + \lambda_x)^2 + 2\alpha}, \quad J_x = (\varepsilon_x + \lambda_x + b)/2, \quad (4.20)$$

$$B_y(\tau) = \beta \left(\frac{\varepsilon_y}{e^{\varepsilon_y \tau} - 1} + J_y \right)^{-1}, \quad \varepsilon_y = \sqrt{(e + \lambda_y)^2 + 2\beta}, \quad J_y = (\varepsilon_y + \lambda_y + e)/2. \quad (4.21)$$

Подстановка этих выражений в уравнение для функции $A(\tau)$ приводит к следующему результату:

$$A(\tau) = -a\alpha \frac{J_x \tau - \ln[1 + (e^{\varepsilon_x \tau} - 1)J_x/\varepsilon_x]}{J_x(J_x - \varepsilon_x)} - d\beta \frac{J_y \tau - \ln[1 + (e^{\varepsilon_y \tau} - 1)J_y/\varepsilon_y]}{J_y(J_y - \varepsilon_y)}. \quad (4.22)$$

Наконец, кривая доходности вычисляется в аналитическом виде

$$\begin{aligned} y(\tau | x, y) &= \frac{x B_x(\tau) + y B_y(\tau) - A(\tau)}{\tau} = \frac{x\alpha}{\tau} \left(\frac{\varepsilon_x}{e^{\varepsilon_x \tau} - 1} + J_x \right)^{-1} + \frac{y\beta}{\tau} \left(\frac{\varepsilon_y}{e^{\varepsilon_y \tau} - 1} + J_y \right)^{-1} + \\ &+ a\alpha \frac{J_x \tau - \ln[1 + (e^{\varepsilon_x \tau} - 1)J_x/\varepsilon_x]}{J_x(J_x - \varepsilon_x)\tau} + d\beta \frac{J_y \tau - \ln[1 + (e^{\varepsilon_y \tau} - 1)J_y/\varepsilon_y]}{J_y(J_y - \varepsilon_y)\tau}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для получения форвардной кривой можно воспользоваться формулой (2.6), что дает

$$\begin{aligned} f(\tau | x, y) &= x \frac{dB_x(\tau)}{d\tau} + y \frac{dB_y(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} = x\alpha + y\beta + (a - xb - x\lambda_x)B_x(\tau) + \\ &+ (d - ye - y\lambda_y)B_y(\tau) - xB_x^2(\tau)/2 - yB_y^2(\tau)/2, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где функции $B_x(\tau)$ и $B_y(\tau)$ явно вычисляются по формулам (4.20) и (4.21).

Заметим, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau | x, y) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau | x, y) = x\alpha + y\beta = r, \quad (4.25)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau | x, y) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau | x, y) = \frac{a\alpha}{J_x} + \frac{d\beta}{J_y}.$$

Вместе с тем, какими бы переменными состояния ни описывалось поведение процесса процентных ставок в рассматриваемой модели, доходность до погашения для некоторого срока до погашения τ должна быть одинаковой для любых способов описания процесса процентных ставок, если преобразование переменных состояний задает взаимно однозначное соответствие переменных. В нашем случае для переменных состояния (x, y) и (r, V) это имеет место, поскольку матрица линейного преобразования (4.13) является невырожденной. Следовательно, имеет место следующее равенство:

$$y(\tau | x, y) = y(\tau | r, V),$$

поэтому для получения аналитического выражения для доходности до погашения $y(\tau | r, V)$ достаточно преобразовать в формуле (4.20) переменные состояния x и y через r и V по формуле (4.12). Тогда после упрощения получим

$$y(\tau | r, V) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\alpha^2 B_y(\tau) - \beta^2 B_x(\tau)}{\alpha\beta(\alpha - \beta)} r - \frac{\alpha B_y(\tau) - \beta B_x(\tau)}{\alpha\beta(\alpha - \beta)} V - A(\tau) \right), \quad (4.26)$$

где функции временной структуры $A(\tau)$, $B_x(\tau)$ и $B_y(\tau)$ вычисляются по формулам (4.20)–(4.22). Выражение доходности до погашения (4.26) предпочтительнее формулы (4.23), поскольку в нем используются переменные r и V , которые можно наблюдать или оценивать, в то время как в (4.23) используются ненаблюдаемые переменные x и y , не имеющие явной финансовой трактовки.

Аналогично для получения аналитического выражения для форвардной кривой $f(\tau | r, V)$ достаточно в формуле (4.24) переменные состояния x и y выразить через r и V по формулам (4.12). Это дает

$$\begin{aligned} f(\tau | r, V) = & a B_x(\tau) + d B_y(\tau) + \\ & + \left(1 + \beta \frac{(b + \lambda_x) B_x(\tau) + B_x(\tau)^2/2}{\alpha(\alpha - \beta)} - \alpha \frac{(e + \lambda_y) B_y(\tau) + B_y(\tau)^2/2}{\beta(\alpha - \beta)} \right) r - \\ & - \left(\frac{(b + \lambda_x) B_x(\tau) + B_x(\tau)^2/2}{\alpha(\alpha - \beta)} - \frac{(e + \lambda_y) B_y(\tau) + B_y(\tau)^2/2}{\beta(\alpha - \beta)} \right) V. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Таким образом, кривые доходности в пространстве (r, V) могут быть рассчитаны по формулам (4.26) и (4.27) в аналитическом виде или чис-

ленно с помощью «аналитически неразрешимых» нелинейных уравнений (4.15)–(4.17). Вычисления показывают, что оба этих способа приводят к полностью совпадающим кривым, поэтому функции $B_r(\tau)$ и $B_V(\tau)$, удовлетворяющие системе уравнений (4.16) и (4.17), можно записать в следующем аналитическом виде:

$$B_r(\tau) = \frac{\alpha^2 B_y(\tau) - \beta^2 B_x(\tau)}{\alpha\beta(\alpha - \beta)}, \quad B_V(\tau) = \frac{\beta B_x(\tau) - \alpha B_y(\tau)}{\alpha\beta(\alpha - \beta)}, \quad (4.28)$$

где функции $B_x(\tau)$ и $B_y(\tau)$ вычисляются по формулам (4.20)–(4.22). Справедливость этого утверждения легко проверяется путем подстановки выражений (4.28) в уравнения (4.16) и (4.17).

Заметим, что аналитические выражения для кривой доходности до погашения для рассматриваемой модели были найдены Ф. Лонгстаффом и Э. Шварцем (1992) в другом, более громоздком виде.

На рис. 4.6 кривые $y(\tau|r, V)$ и $f(\tau|r, V)$ представлены для нейтральной к риску среды ($\lambda_x = \lambda_y = 0$) при следующих значениях параметров:

$$r = 0,06, V = 0,03, a = 0,3, b = 4, d = 0,5, e = 1,7, \alpha = 0,3, \beta = 0,7.$$

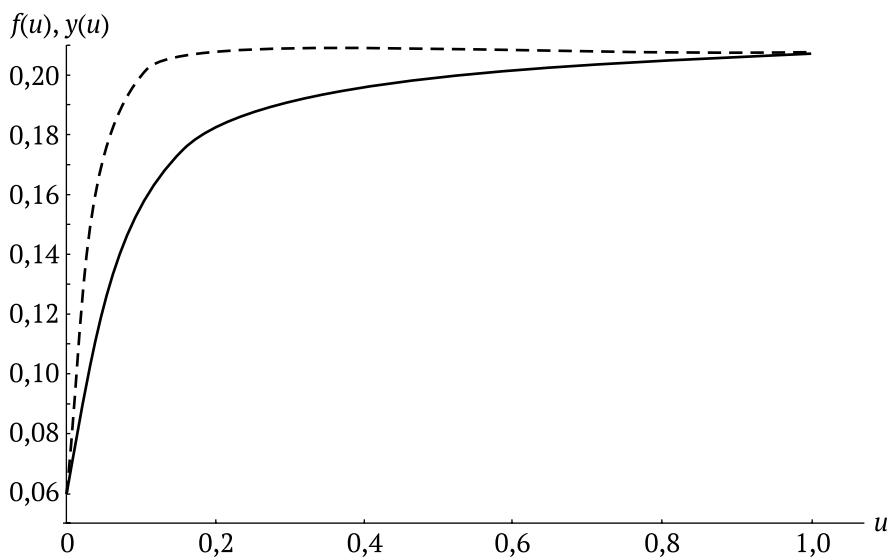


Рис. 4.6. Кривая доходности до погашения $Y(u)$ и кривая форвардных ставок $F(u)$

При представлении кривых «целиком» для всего интервала возможных значений сроков до погашения $\tau \in (0, \infty)$ использовано нелинейное преобразование сроков до погашения: $u = 1 - e^{-\rho\tau}$, которое отображает положительную полуось $(0, \infty)$ в единичный интервал $(0, 1)$. Принятое при расчетах численное значение $\rho = \ln 10/30 = 0,07675$ соответствует тому, что сроки до

погашения от 0 до 30 лет отображаются в интервал (0, 0,9). Кривые стартуют из точки $Y(0 | r, V) = F(0 | r, V) = r = 0,06$ и при $u \rightarrow 1$ стремятся к одному и тому же пределу $Y(1 | r, V) = F(1 | r, V) = 0,2079$. Сплошной линией показана кривая доходности до погашения $y(u)$, а пунктирной – кривая форвардных ставок $F(u)$.

Рассмотренную модель Лонгстаффа – Шварца можно отнести к классу двухфакторных моделей Кокса – Ингерсолла – Росса. Полученные результаты позволяют расширить эту модель на случай n факторов. Действительно, пусть $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ обозначает n -мерный вектор неких латентных переменных состояния рынка. Тогда уравнения динамики этих переменных состояния, соответствующее (4.9), запишутся в виде

$$dx_i = \kappa_i(a_i - x_i)dt + \sqrt{x_i}dW_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.29)$$

Предположим, что латентные переменные X связаны невырожденным линейным преобразованием

$$Z = HX \quad (4.30)$$

с вектором других переменных состояния $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$, компоненты которого имеют вполне определенный экономический или статистический смысл. Например, z_1 – это краткосрочная процентная ставка, z_2 – ее мгновенная дисперсия и т. д. H – невырожденная матрица с компонентами h_{is} , $1 \leq i, s \leq n$. Тогда в соответствии со стохастическим анализом Ито для динамики вектора переменных состояния Z получается уравнение, аналогичное уравнению (4.14),

$$dZ = K(\theta - Z)dt + HD(\sqrt{H^{-1}Z})dW, \quad (4.31)$$

где $K = HD(\kappa)H^{-1}$; $\theta = Ha$; κ – вектор с компонентами κ_i ; a – вектор с компонентами a_i ; $D(\kappa)$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются элементы вектора κ ; $D(\sqrt{H^{-1}Z})$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются квадратные корни элементов вектора $H^{-1}Z$.

Относительно матрицы преобразования H сделаем следующие предположения. Удобно компоненту z_1 вектора состояний Z отождествлять с краткосрочной процентной ставкой r . Так что согласно представлению (4.30) первая строка матрицы H должна состоять из элементов, обеспечивающих равенство $z_1 \equiv r = \sum_{i=1}^n h_{1i}x_i$. Кроме того, элементы матрицы H должны быть такими, чтобы было выполнено необходимое условие (4.25) для кривых доходности $\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau | X) = r$.

Обозначим кривую доходности до погашения в случае, когда переменные состояния определяются вектором X как $y(\tau | X)$, и соответствен-

но кривую доходности до погашения в случае, когда переменные состояния определяются вектором Z как $y(\tau | Z)$. Характер динамики переменных состояния в обоих случаях обеспечивает тот факт, что кривые доходности будут относиться к аффинному классу, т. е. $\tau y(\tau | X) = A(\tau) + X^T B(\tau)$ и $\tau y(\tau | Z) = a(\tau) + Z^T b(\tau)$. Очевидно, что, в каких бы координатах ни описывалось текущее состояние какого-либо конкретного процесса краткосрочной процентной ставки, кривые доходности для этого процесса должны совпадать, т. е. $\tau y(\tau | X) = \tau y(\tau | Z)$ или $A(\tau) + X^T B(\tau) = a(\tau) + Z^T b(\tau)$. Поскольку эти равенства должны иметь место для любых сроков до погашения τ и любых значений переменных состояния X и Z (и нулевых тоже), то имеем $a(\tau) = A(\tau)$, $X^T B(\tau) = Z^T b(\tau) = X^T H^T b(\tau)$. Таким образом, если функции временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ для кривой доходности $y(\tau | X)$ известны, для кривой доходности $y(\tau | Z)$ они находятся из соотношений

$$a(\tau) = A(\tau), b(\tau) = (H^T)^{-1} B(\tau). \quad (4.32)$$

Для определения дифференциальных уравнений относительно функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ снова применим технику из главы 2. Для системы (4.29) получаются следующие данные для составления уравнений (2.4) и (2.5):

$$K = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \kappa_n \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad K\theta = \begin{pmatrix} \kappa_1 a_1 \\ \dots \\ \kappa_n a_n \end{pmatrix},$$

$$\sigma(X)\sigma^T(X) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} x_n,$$

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \beta_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если положить, что рыночные цены риска определяются соотношением $\lambda(X) = (\lambda_1 \lambda_2, \dots, \lambda_n) \sigma(X)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – константы, тогда

$$\sigma(X)\lambda^T(X) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \dots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} x_n,$$

$$\xi = 0, \quad \eta_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система дифференциальных уравнений (2.4) и (2.5) в этом случае имеет вид

$$A'(\tau) = -\sum_{i=1}^n a_i \kappa_i B_i(\tau), \quad A(0) = 0, \quad (4.33)$$

$$B_i'(\tau) = h_{1i} - (\kappa_i + \lambda_i) B_i(\tau) - B_i^2(\tau)/2, \quad B_i(0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Полученные уравнения с точностью до параметров совпадают с уравнениями (4.18) и (4.19), поэтому их решения имеют тот же вид, что (4.20):

$$B_i(\tau) = h_{1i} \left(\frac{\varepsilon_i}{e^{\varepsilon_i \tau} - 1} + J_i \right)^{-1}, \quad \varepsilon_i = \sqrt{(\kappa_i + \lambda_i)^2 + 2h_{1i}}, \quad J_i = (\varepsilon_i + \lambda_i + \kappa_i)/2. \quad (4.34)$$

Таким образом,

$$y(\tau|X) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n h_{1i} \left(x_i \left(\frac{\varepsilon_i}{e^{\varepsilon_i \tau} - 1} + J_i \right)^{-1} + a_i \kappa_i \frac{J_i \tau - \ln[1 + (e^{\varepsilon_i \tau} - 1)J_i/\varepsilon_i]}{J_i(J_i - \varepsilon_i)} \right). \quad (4.35)$$

Форвардная кривая $f(\tau|X)$ определяется по формуле (2.6) следующим выражением:

$$f(\tau|X) = \sum_{i=1}^n x_i (h_{1i} - (\kappa_i + \lambda_i) B_i(\tau) - B_i^2(\tau)/2) + \sum_{i=1}^n a_i \kappa_i B_i(\tau), \quad (4.36)$$

где функции $B_i(\tau)$ вычисляются по формулам (4.34).

Кривые $y(\tau|X)$ и $f(\tau|X)$ обладают следующими предельными свойствами:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau|X) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau|X) = \sum_{i=1}^n h_{1i} x_i = r, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau|X) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau|X) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i \kappa_i h_{1i}}{J_i}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Таким образом, после того как определены кривые доходности $y(\tau|X)$ и $f(\tau|X)$ в пространстве переменных X , кривые доходности $y(\tau|Z)$ и $f(\tau|Z)$ в пространстве переменных Z определяются с помощью соотношений (4.32) по формулам

$$\begin{aligned} y(\tau|Z) &= Z^T (H^T)^{-1} B(\tau)/\tau - A(\tau)/\tau, \\ f(\tau|Z) &= (H^{-1}Z)^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

где функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ определяются соотношениями (4.33) и (4.34).

Таким образом, если наблюдаемые (или оцениваемые) переменные состояния рынка Z имеют динамику, описываемую уравнением (4.31),

то уравнение временной структуры бескупонных доходностей будет иметь вид

$$-\frac{dA(\tau)}{d\tau} + Z^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} + (Z^T - \theta^T)K^T B(\tau) + \\ + \frac{1}{2} B(\tau)^T HD(H^{-1}Z)H^T B(\tau) - Z^T H_1^T = -\lambda^T D(H^{-1}Z)B(\tau),$$

где $D(H^{-1}Z)$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются элементы вектора $H^{-1}Z$; H_1 – первая строка матрицы H . Считая компоненты вектора Z независимыми переменными, из этого равенства можно получить следующую систему уравнений для функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$:

$$A'(\tau) = -(K\theta)^T B(\tau), A(0) = 0, \\ B_i'(\tau) = h_{1i} - \xi_i B(\tau) - B^T(\tau)\zeta_i B(\tau)/2, B_i(0) = 0, 1 \leq i \leq n, \quad (4.39)$$

где $\xi_i = (K_i - D(G_i)\lambda)^T$, а K_i и G_i – i -е столбцы матриц K и H^{-1} соответственно; $\zeta_i = HD(G_i)H^T$; $D(G_i)$ – по-прежнему диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются элементы вектора G_i . Никаких прямых методов аналитического решения системы уравнений (4.39) не известно. Однако, как следует из вышеприведенного анализа, переход к переменным состояния $X = H^{-1}Z$ позволяет аналитически решить задачу определения кривых доходности $y(\tau | X)$ и $f(\tau | X)$ в виде (4.35) и (4.36), а затем выразить кривые доходности $y(\tau | Z)$ и $f(\tau | Z)$ в аналитическом виде по формулам (4.37) и (4.38).

ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

В заключение рассмотрим числовой пример. Для простоты будем решать задачу в риск-нейтральной постановке, когда рыночные цены риска $\lambda = 0$. Пусть наблюдение за процессами на финансовом рынке позволяет сформировать для описания динамики наблюдаемых переменных состояния $Z = (z_1, z_2, z_3)^T$, для которых $z_1 = r$ – краткосрочная процентная ставка, следующую систему стохастических дифференциальных уравнений типа (4.14):

$$dZ = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 - z_1 \\ 2 - z_2 \\ 3 - z_3 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{z_1 - z_3} & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ \sqrt{z_1 - z_3} & 0 & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ 0 & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \end{pmatrix} dW. \quad (4.40)$$

Для составления уравнений относительно функций временной структуры $a(\tau)$ и $b(\tau)$ выпишем необходимые элементы системы

$$K\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, K_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(Z)\sigma(Z)^T = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_2 & z_3 + z_2 - z_1 \\ z_3 & z_3 + z_2 - z_1 & z_3 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставив эти выражения в систему уравнений (2.4) и (2.5), получим уравнения для $a(\tau)$ и $b(\tau)$ в виде

$$a'(\tau) = -8b_1(\tau) - 4b_2(\tau) - 5b_3(\tau), a(0) = 0,$$

$$b_1'(\tau) = 1 - 4b_1(\tau) - 2b_2(\tau) - b_3(\tau) - 0,5b_1(\tau)^2 + b_2(\tau)b_3(\tau), b_1(0) = 0.$$

$$b_2'(\tau) = b_1(\tau) - b_2(\tau) + b_3(\tau) - 0,5b_2(\tau)^2 - b_1(\tau)b_2(\tau) - b_2(\tau)b_3(\tau), b_2(0) = 0. \quad (4.41)$$

$$b_3'(\tau) = 2b_1(\tau) + 2b_2(\tau) - b_3(\tau) + 0,5b_3(\tau)^2 - b_1(\tau)b_3(\tau) - b_2(\tau)b_3(\tau), b_3(0) = 0.$$

Система дифференциальных уравнений для компонент векторной функции $b(\tau)$ нелинейна, и методов получения ее решения в аналитическом виде не известно, хотя численное ее решение можно найти просто, используя, например, программу Wolfram Mathematica.

Для получения аналитического решения, следуя указанной выше идее описания динамики рыночных процессов в другом пространстве переменных состояния, рассмотрим следующее линейное преобразование

$$Z = HX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - z_3 \\ z_1 - z_2 \\ z_3 + z_2 - z_1 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Экономический смысл переменных X мы не определяем, а пользуемся этим преобразованием только при получении аналитических решений для кривых доходностей, в итоговых выражениях кривых доходностей, в которых сами переменные X не используются. При таком преобразовании со-

гласно стохастическому анализу Ито функция дрейфа в уравнении (4.40) для переменных состояния X приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 - z_1 \\ 2 - z_2 \\ 3 - z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ 2 - x_2 \\ 1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицу волатильности в уравнении (4.40) можно записать как

$$\begin{pmatrix} \sqrt{z_1 - z_3} & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ \sqrt{z_1 - z_3} & 0 & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ 0 & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{z_1 - z_3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{z_1 - z_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \end{pmatrix}.$$

Значит, с учетом соотношений (4.42) при преобразовании переменных состояния к X матрица волатильности преобразуется к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{z_1 - z_3} & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ \sqrt{z_1 - z_3} & 0 & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ 0 & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{x_3} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в пространстве состояний X уравнение динамики рыночных процессов (4.40) приобретает вид трехфакторной модели Лонгстаффа – Шварца (4.9)

$$dX = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ 2 - x_2 \\ 1 - x_3 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} dW_1 \\ \sqrt{x_2} dW_2 \\ \sqrt{x_3} dW_3 \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Это означает, что система (4.40) превращается в набор независимых уравнений:

$$dx_1 = 3(1 - x_1)dt + \sqrt{x_1}dW_1,$$

$$dx_2 = 2(2 - x_2)dt + \sqrt{x_2}dW_2,$$

$$dx_3 = (1 - x_3)dt + \sqrt{x_3}dW_3.$$

С учетом того, что $z_1 = x_1 + x_2 + x_3 = r$, а также используя свойства системы (4.43) для построения уравнений (2.4) и (2.5) для функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau) = (B_1(\tau)B_2(\tau)B_3(\tau))^T$ в пространстве переменных состояния X , получим также набор независимых уравнений для функций $B(\tau)$ типа (4.18) и (4.19):

$$\begin{aligned}A'(\tau) &= -3B_1(\tau) - 4B_2(\tau) - B_3(\tau), A(0) = 0; \\B_1'(\tau) &= 1 - 3B_1(\tau) - B_1(\tau)^2/2, B_1(0) = 0; \\B_2'(\tau) &= 1 - 2B_2(\tau) - B_2(\tau)^2/2, B_2(0) = 0; \\B_3'(\tau) &= 1 - B_3(\tau) - B_3(\tau)^2/2, B_3(0) = 0,\end{aligned}$$

которые имеют аналитические решения типа (4.20) и (4.21):

$$\begin{aligned}B_1(\tau) &= \left(\frac{\sqrt{11}}{e^{\tau\sqrt{11}} - 1} + \frac{3 + \sqrt{11}}{2} \right)^{-1}, \quad B_2(\tau) = \left(\frac{\sqrt{6}}{e^{\tau\sqrt{6}} - 1} + \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \right)^{-1}, \\B_3(\tau) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{e^{\tau\sqrt{3}} - 1} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^{-1}.\end{aligned}\tag{4.44}$$

Наконец, на основании равенств (4.32) получаем следующие выражения для $a'(\tau)$, $b_1(\tau)$, $b_2(\tau)$ и $b_3(\tau)$, которые являются аналитическими решениями нелинейных уравнений (4.39):

$$\begin{aligned}a'(\tau) &= -3B_1(\tau) - 4B_2(\tau) - B_3(\tau), \\b_1(\tau) &= B_1(\tau) + B_2(\tau) - B_3(\tau), \\b_2(\tau) &= -B_2(\tau) + B_3(\tau), \\b_3(\tau) &= -B_1(\tau) + B_3(\tau),\end{aligned}$$

где $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ и $B_3(\tau)$ вычисляются по формулам (4.44). Справедливость этих решений проверяется просто подстановкой таким образом найденных $b_1(\tau)$, $b_2(\tau)$ и $b_3(\tau)$ в уравнения (4.41). После определения функций временной структуры по формулам (4.38) можно построить кривые доходности до погашения $y(\tau | Z)$ и форвардные кривые $f(\tau | Z)$. Аналитические выражения $y(\tau | Z)$ и $f(\tau | Z)$ здесь не выписываются ввиду их громоздкости. На рис. 4.7 они представлены в виде графиков для стартовых значений компонент вектора Z : $z_1 = r = 10$ (в %), $z_2 = 0$, $z_3 = 0$. Для графиков рис. 4.7 переменная срока до погашения преобразована так же, как и на рис. 4.6, только значение параметра ρ здесь равно 0,2303.

Заметим, что согласно свойствам (4.37) кривые $Y(u | Z)$ и $F(u | Z)$ стартуют из общей точки $Y(0 | Z) = F(0 | Z) = r = 10$ и при $u \rightarrow 1$ стремятся к общему значению

$$Y(1 | Z) = F(1 | Z) = \frac{3}{J_1} + \frac{4}{J_2} + \frac{1}{J_3} = \frac{6}{3 + \sqrt{11}} + \frac{8}{2 + \sqrt{6}} + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 3,4799.$$

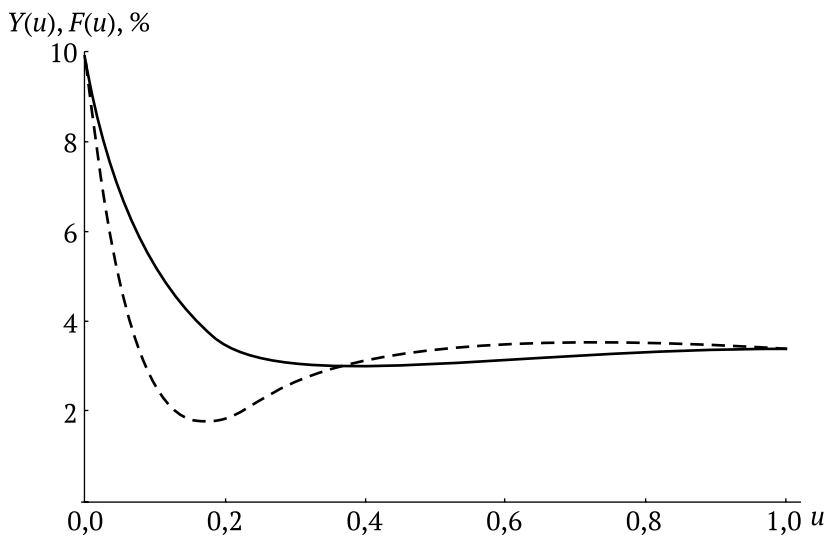


Рис. 4.7. Кривая доходности до погашения $Y(u)$ и кривая форвардных ставок $F(u)$ для случая, когда динамика переменных состояния определяется уравнением (4.40)

Форвардная кривая $F(u | Z)$ в окрестности стартовой точки изменяется быстрее, чем кривая доходности до погашения $Y(u | Z)$ (по теории ее производная по абсолютной величине в два раза больше производной кривой доходности до погашения). Кривые имеют минимумы, причем кривая доходности до погашения $Y(u | Z)$ имеет минимум в точке пересечения с кривой $F(u | Z)$, как это и соответствует теории.

ВЫВОДЫ

В известной литературе по моделям временной структуры доходности обычно констатируется, что кривая доходности и форвардная кривая расходятся с увеличением времени до погашения. Однако это имеет место только для области малых сроков до погашения. В главах 3 и 4 показано, что для больших сроков до погашения эти кривые стремятся к одному общему предельному значению. Это предельное значение определено в явной аналитической форме.

Как следует из аналитического вида кривой доходности и форвардной кривой, эти кривые при $\tau = 0$ стартуют из точки, которую находят состоянием рынка в момент определения цены бескупонной облигации. Для однофакторных моделей – это значение безрисковой процентной ставки, для многофакторных моделей – это взвешенная сумма компонент вектора состояния. В свою очередь, предельное значение этих кривых при $\tau \rightarrow \infty$ совершенно не зависит от состояния рынка в момент определения цены бескупонной облигации, а зависит только от параметров модели и в пер-

вую очередь от математических ожиданий компонент вектора состояния. По этой причине можно было бы ожидать, что на доходность долгосрочных облигаций состояние рынка в момент определения цены бескупонной облигации практически не влияет. Однако это не так. Как показали численные результаты, проведенные для моделей Васичека и Кокса – Ингерсолла – Росса, состояние рынка в момент определения цены бескупонной облигации может существенным образом изменить картину поведения этих кривых даже в области продолжительных сроков до погашения.

В заключительной части главы на основе анализа модели Лонгстаффа – Шварца предложена ее расширенная версия для произвольного числа переменных состояния, которую можно использовать для получения аналитического решения уравнений относительно функций временной структуры доходности, что позволяет получать аналитические выражения для кривых доходности до погашения и форвардных кривых процентных ставок. При этом использован очевидный принцип, заключающийся в том, что если задан процесс краткосрочной процентной ставки, то выражения для кривых доходности, соответствующих этому процессу, не зависят от того, каким способом описывается пространство переменных состояния финансового рынка. Показано, что применение этого принципа в расширении модели Лонгстаффа – Шварца позволяет получить аналитические решения системы нелинейных уравнений Риккати произвольного порядка, аналитические методы решения которых в литературе не описаны. Предложенное расширение модели Лонгстаффа – Шварца свободно от недостатка, присущего этой модели и заключающегося в том, что при переходе от латентных переменных к реальным наблюдаемым переменным ограничивается область возможных значений реальных переменных состояний. В расширении модели такого эффекта нет.

Глава 5

ОДНОФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ДАФФИ – КАНА

Известно, что аффинные модели временной структуры доходности требуют, чтобы краткосрочная процентная ставка $r(t)$ следовала случайному процессу, описываемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr(t) = (\alpha r(t) + \beta)dt + \sqrt{\gamma r(t) + \delta}dW(t), \quad \gamma r(0) + \delta > 0, \quad (5.1)$$

где α , β , γ и δ – константы; а $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. При этом рыночная цена риска $\lambda(r)$ должна быть такова, чтобы $\lambda(r)\sqrt{\gamma r + \delta} = \xi r + \eta$ являлась аффинной функцией. Предполагается, что значения констант α , β , γ и δ обеспечивают существование стационарного решения уравнения (5.1). Если в уравнении (5.1) $\gamma = 0$, то получающуюся модель временной структуры доходности называют моделью Васичека. Если же в уравнении (5.1) $\delta = 0$, то аффинную модель временной структуры называют моделью Кокса – Ингерсолла – Росса (модель CIR). Различие этих моделей состоит в том, что в первом случае процесс $r(t)$ является гауссовым, а во втором случае $r(t)$ имеет распределение гамма. Свойства временных структур доходности в этих моделях были представлены в главах 2 и 3. Здесь мы рассмотрим общий случай, когда все четыре параметра α , β , γ и δ отличаются от нуля. Статистический смысл параметров уравнения (5.1) сразу не виден, поэтому вместо этих параметров мы введем другие, при которых уравнение с практической точки зрения трактуется удобнее:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kD \frac{r(t) - x}{\theta - x}}dW(t), \quad r(0) > x. \quad (5.2)$$

Параметры уравнения (5.2) имеют следующий конкретный статистический смысл: θ – стационарное математическое ожидание краткосрочной процентной ставки $r(t)$; D – ее стационарная дисперсия; x – параметр,

имеющий смысл нижней границы процесса $r(t)$, так что $r(t) \geq x$ для всякого t ; согласно результатам В. Феллера (Feller, 1951) эта граница является недостижимой сверху при $(\theta - x)^2 > D$; k – параметр, определяющий коэффициент автокорреляции процесса в виде

$$\rho(\tau) = E[(r(t) - \theta)(r(t + \tau) - \theta)]/D = \exp\{-k|\tau|\}.$$

Заметим, что в случае $x = -\infty$ уравнение (5.2) порождает модель Васичека, а в случае $x = 0$ уравнение (5.2) порождает модель CIR. На модель с произвольным (допустимым) значением параметра x при необходимости будем ссылаться как на однофакторную модель Даффи – Кана (модель DK), которые рассмотрели ее многофакторный аналог (Duffie, Kan, 1996). Функции временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ для однофакторной модели DK были найдены С. Коксом и Г. Медведевым (Cox, Medvedev, 1996); детальный анализ однофакторной модели DK содержится также в книге Г. А. Медведева (2005).

Соотношение между параметрами уравнений (5.1) и (5.2) устанавливается очевидным образом при сопоставлении уравнений

$$k = -\alpha > 0, \quad \theta = -\frac{\beta}{\alpha} > 0, \quad D = \frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{2\alpha^2} > 0, \quad x = -\frac{\delta}{\gamma} < 0.$$

Коэффициенты аффинной структуры, связанные с рыночной ценой риска, определяются соотношением $\lambda(r)\sqrt{\gamma r + \delta} = \xi r + \eta$. Используя это, можно написать, что $\lambda(r) = \frac{\xi r + \eta}{\sigma(r)} = \frac{\xi}{\gamma} \sigma(r) + \frac{\eta\gamma - \xi\delta}{\gamma\sigma(r)}$. Очевидно, если волатильность краткосрочной процентной ставки $\sigma(r)$ стремится к нулю, то переходим к детерминированному рынку, поэтому рыночная цена риска $\lambda(r)$ (и премия за риск) должна стремиться к нулю. Из приведенного равенства видно, что этот факт будет иметь место тогда и только тогда, когда справедливо равенство $\eta\gamma - \xi\delta = 0$. Кроме того, в различных моделях при анализе одной и той же реализации процесса краткосрочной процентной ставки необходимо также установить значения коэффициентов ξ и η аффинной структуры в этих моделях так, чтобы они обеспечивали, насколько это возможно, одинаковый уровень рыночной цены риска. Естественно ожидать, что рискованная премия при краткосрочной процентной ставке, равной среднему ее уровню в установившемся режиме, будет одинаковой для всех сравниваемых моделей. Кроме того, чтобы рискованная премия была положительной, необходимо выполнение условия $\lambda(r) < 0$ (CIR, 1985), поэтому потребуем, чтобы для всех трех рассматриваемых моделей $\lambda(\theta) = -\lambda$, $\lambda > 0$. И выражение для $\lambda(r)$ получается следующим:

$$\lambda(r) = \frac{\xi}{\gamma} \sigma(r) = \frac{\xi}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{r + \frac{\delta}{\gamma}} = \frac{\eta}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{\gamma}{\delta} r + 1} = -\lambda \sqrt{\frac{r - x}{\theta - x}}.$$

ФОРВАРДНАЯ КРИВАЯ И КРИВАЯ ДОХОДНОСТИ В ОДНОФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ДАФФИ – КАНА

В текущий момент времени t , когда $r(t) = r$, цена $P(t, r, T)$ бескупонной облигации, по которой в дату погашения T выплачивается одна денежная единица, определяется формулой

$$P(t, r, T) = \exp\{A(T - t) - rB(T - t)\}. \quad (5.3)$$

В дальнейшем для краткости срок до погашения облигации будем обозначать $\tau = T - t$. Модели процентных ставок доходности, позволяющие выразить цену облигации $P(t, r, T)$ в виде (5.3), относятся к классу аффинных временных структур процентных ставок. Функции временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$B' = 1 - (k + \lambda\sigma)B(\tau) - \frac{kD}{\theta - x}[B(\tau)]^2, \quad B(0) = 0, \quad (5.4)$$

$$A' = -(k\theta + \lambda\sigma x)B(\tau) - \frac{kDx}{\theta - x}[B(\tau)]^2, \quad A(0) = 0. \quad (5.5)$$

Решения этих уравнений выражаются в виде

$$B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon\tau} - 1} + V \right)^{-1}, \quad (5.6)$$

$$A(\tau) = x[B(\tau) - \tau] - \frac{(\theta - x)^2}{D}[\nu\tau - \ln(1 + \nu B(\tau))], \quad (5.7)$$

где для краткости записи обозначено

$$\sigma = \frac{\sqrt{2kD}}{\theta - x}, \quad \varepsilon = \sqrt{(k + \lambda\sigma)^2 + \frac{4kD}{\theta - x}},$$

$$\nu = (\varepsilon - k - \lambda\sigma)/2, \quad V = (\varepsilon + k + \lambda\sigma)/2.$$

Заметим, что $\nu + V = \varepsilon$, $\nu V = kD/(\theta - x)$.

Доходность до погашения $y(\tau)$ бескупонной облигации в рамках аффинной структуры выражается в виде

$$y(\tau) \equiv \frac{rB(\tau) - A(\tau)}{\tau}. \quad (5.8)$$

Для определенности заметим, что функции аффинной временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ являются функциями одного аргумента только в рассматриваемом случае постоянных коэффициентов уравнения (5.1). Форвардная ставка $f(\tau)$ определяется выражением

$$f(\tau) = r \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} = y(\tau) + \tau \frac{dy(\tau)}{d\tau}. \quad (5.9)$$

В дальнейшем взаимные свойства форвардной ставки и доходности до погашения будем исследовать как функции срока погашения τ в рамках аффинной структуры в зависимости от величин r , x и λ , которые будут рассматриваться как параметры: $r = r(t)$ – параметр состояния рынка в момент времени t ; x – параметр модели краткосрочной ставки; λ – параметр модели доходности. С практической точки зрения имеет смысл исследовать свойства функций $f(\tau)$ и $y(\tau)$ только для неотрицательных сроков погашения $\tau \geq 0$, неотрицательных значений краткосрочной ставки $r \geq 0$ и при выполнении условия Феллера о недостижимости нижней границы процесса $r(t)$: $\theta - x > \sqrt{D}$, т. е. $x < \theta - \sqrt{D}$.

Для того чтобы получить явный вид функции $y(\tau)$, определяющей зависимость доходности от срока до погашения, достаточно подставить функции (5.6) и (5.7) в (5.8). Это приводит к выражению

$$y(\tau) = x + (\theta - x) \left[\frac{B(\tau)}{\tau} \frac{r - x}{\theta - x} + \frac{k}{V} \left(1 - \frac{\ln(1 + vB(\tau))}{\tau v} \right) \right]. \quad (5.10)$$

Здесь уместно отметить, что функция $B(\tau)$, зависящая также от параметра x , играет основную роль при определении как функций $A(\tau)$ и $y(\tau)$, так и функции $f(\tau)$. Согласно формуле (5.6) функция $B(\tau)$ является монотонно возрастающей и такой, что

$$B(0) = 0 \leq B(\tau) \leq B(\infty) = V^{-1}, \quad 0 \leq \tau \leq \infty. \quad (5.11)$$

Используя формулу (5.9) для форвардной ставки и уравнения (5.4) и (5.5) для функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$, получаем следующее выражение для $f(\tau)$:

$$f(\tau) = r + (\theta - x) [kB(\tau) - B(\tau)(V - v)(r - x)/(\theta - x) - vVB(\tau)^2(r - x)/(\theta - x)]. \quad (5.12)$$

Функции $y(\tau)$ и $f(\tau)$, которые определяются формулами (5.10) и (5.12) соответственно, называются далее кривой доходности и форвардной кривой. Заметим, что форвардная кривая для модели Васичека и модели CIR была получена в другой форме в статье Е. Шлегла и Д. Соммера (Schlogl, Sommer, 1997) и там приведены некоторые свойства для форвардных кривых. В некоторых литературных источниках дается информация о совместном поведении кривой доходности и форвардной кривой. Например, в книгах J. Hull (1993), Z. Bodie, A. Kane и A. Marcus (1996), J. Campbell, A. Lo и A. MacKinlay (1997), K. Kortanek и V. Medvedev (2001) представлены графики поведения кривой доходности и форвардной кривой на отдельных периодах времени конечной продолжительности. Однако по этим примерам нельзя установить в полной мере характер изменения кривых. Из этих графиков, например, можно видеть, что с увеличением времени до погашения различие между кривыми доходности и форвардными кривыми увеличивается. Ниже будет показано, что это невозможно, по крайней мере, для моделей временных структур аффинного класса.

СВОЙСТВА ФОРВАРДНОЙ КРИВОЙ И КРИВОЙ ДОХОДНОСТИ

Заметим, что параметр r в выражениях (5.10) и (5.12) входит только в сочетании с другими параметрами в виде $(r - x)/(\theta - x)$, поэтому для дальнейшего изложения удобно вместо r ввести другой параметр

$$\zeta = (r - x)/(\theta - x).$$

По определению ζ можно назвать нормированным значением краткосрочной процентной ставки в момент времени t , при этом $0 \leq \zeta \leq \infty$.

Доходность до погашения $y(\tau)$ и форвардная ставка $f(\tau)$ принимают одинаковые значения для крайних сроков погашения $\tau = 0$ и $\tau = \infty$:

$$f(0) = y(0) = r,$$

$$f(\infty) \equiv f^*(x) \equiv y(\infty) \equiv y^*(x) \equiv x + v \frac{(\theta - x)^2}{D} \equiv \frac{k}{V} \theta + \left(1 - \frac{k}{V}\right) x. \quad (5.13)$$

Поскольку $0 < k/V < 1$, то $x < f(\infty) \equiv f^*(x) = y(\infty) \equiv y^*(x) < \theta$. Из этого следует, в частности, что при $\tau \rightarrow \infty$ предельные значения кривой доходности и форвардной кривой всегда меньше стационарного среднего θ краткосрочной процентной ставки $r(t)$.

При малых сроках погашения кривые $y(\tau)$ и $f(\tau)$ имеют представления

$$y(\tau) = r + \frac{1}{2} (\theta - x) [k - (V - v)\zeta] \tau + O(\tau^2),$$

$$f(\tau) = r + (\theta - x) [k - (V - v)\zeta] \tau + O(\tau^2).$$

Эти формулы показывают, что кривые $y(\tau)$ и $f(\tau)$ при $\tau = 0$ стартуют из одной точки $y(0) = f(0) = r$, причем форвардная кривая $f(\tau)$ убывает (возрастает) в 2 раза быстрее, чем кривая доходности $y(\tau)$.

Модель Васичека ($x = -\infty$) часто критикуется за то, что допускает отрицательные значения краткосрочных ставок $r(t)$. Это приводит к тому, что кривые доходности $y(\tau)$ и форвардные ставки $f(\tau)$ также могут принимать отрицательные значения. Вместе с тем в модели CIR ($x = 0$) гарантируется неотрицательность краткосрочных ставок $r(t)$, а следовательно, и кривых $y(\tau)$ и $f(\tau)$. Поэтому желательно выяснить, каким является минимальное значение границы x в модели ДК, которое обеспечивает положительность кривых доходности $y(\tau)$ и форвардных ставок $f(\tau)$. Необходимыми условиями для этого являются, например, такие: положительный наклон кривых $y(\tau)$ и $f(\tau)$ в окрестности точки $\tau = 0$ при $r = 0$ и положительность предельного при $\tau \rightarrow \infty$ значения ставки $f(\infty) = y(\infty) \equiv f^*(x) \equiv y^*(x)$, определяемого равенством (5.13).

Предельное при $\tau \rightarrow \infty$ значение $f^*(x)$ форвардной кривой (и кривой доходности), определяемое формулой (5.13), является монотонно возрастающей функцией границы x и на интервале $[-\infty, \theta]$ принимает значения

$$f^*(-\infty) = \theta - (D + \lambda \sqrt{2kD})/k \leq f^*(x) \leq f^*(\theta) = \theta.$$

Таким образом, если $k\theta \geq D + \lambda\sqrt{2kD}$, то предельное значение форвардной кривой $f^*(x)$ – положительное для всякого $x < \theta$. Если выполняется неравенство $k\theta \leq D + \lambda\sqrt{2kD}$, минимальное значение $x = x^*$, при котором $f^*(x) \geq 0$, определяется выражением

$$x^* = -\theta \frac{k\theta + \sqrt{k\theta D + \lambda^2 kD/2} - \lambda\sqrt{kD/2}}{D - k\theta + \lambda\sqrt{2kD}}.$$

Многие авторы при анализе кривых доходности и форвардных кривых отмечали, что эти кривые могут иметь максимумы. Найдем условия, при которых существуют максимумы этих кривых, и определим их характеристики.

Заметим, что из формулы (5.6) следует, что обратная функция $B(\tau)$ имеет вид

$$\tau(B) = [\ln(1 + vB) - \ln(1 - VB)]/\varepsilon. \quad (5.14)$$

В дальнейшем удобно рассматривать форвардную кривую $f(\tau)$ и кривую доходности $y(\tau)$ как сложные функции, зависящие от срока погашения τ только через функцию аффинной структуры $B(\tau)$, т. е. $y(\tau) \equiv Y(B(\tau))$ и $f(\tau) \equiv F(B(\tau))$. Во-первых, это удобно, потому что интервал возможных значений функции $B(\tau)$ является конечным согласно (5.11), в связи с чем свойства функций $Y(B)$ и $F(B)$ можно иллюстрировать наглядно с помощью графиков на всем интервале возможных значений сроков погашения τ . Во-вторых, как отмечалось в CIR (1979), функцию $B(\tau)$ можно рассматривать как меру дюрации, поскольку подобно стандартной дюрации цены облигации по отношению к процентной ставке (в этом случае по отношению к спот ставке) она определяется формулой $[\partial P/\partial r]/P = -B(\tau)$.

Из выражений (5.10), (5.12) и (5.14) получается, что

$$Y(B) \equiv x + (\theta - x) \left(\frac{k}{V} + \varepsilon \frac{B\zeta - k \ln(1 + vB)/vV}{\ln(1 + vB) - \ln(1 - VB)} \right),$$

$$F(B) \equiv r + (\theta - x)[kB - B(V - v)\zeta - vVB^2\zeta]. \quad (5.15)$$

Если ζ удовлетворяет неравенствам

$$k/(V + v) \leq \zeta \leq k/(V - v),$$

то форвардная кривая $F(B)$ на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$ имеет максимум в точке $B^* = (k\zeta - V + v)/2vV$, а максимальное значение функции $F(B)$ вычисляется по формуле

$$F(B^*) = r + (\theta - x)[k - (V - v)\zeta]^2/4vV\zeta.$$

Если параметр ζ удовлетворяет неравенству

$$\zeta < k/(V + v), \quad (5.16)$$

то кривая $F(B)$ строго возрастает на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$. Если параметр ζ удовлетворяет неравенству

$$\zeta > k/(V - v), \quad (5.17)$$

то форвардная кривая $F(B)$ строго убывает на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$. Так что для значения краткосрочной процентной ставки r , определяемого равенством $\zeta = k/(V - v)$, максимум форвардной кривой встречается при $B = 0$ (при $\tau = 0$), из чего следует, что форвардная ставка максимальна для коротких сроков погашения. Для значения краткосрочной процентной ставки r , определяемого равенством $\zeta = k/(V - v)$, максимум форвардной кривой встречается при $B = V^{-1}$ (т. е. при $\tau = \infty$), из чего следует, что в этом случае форвардная ставка максимальна для длительных сроков погашения. Форвардная кривая $F(B)$, определяемая выражением (5.15), является вогнутой функцией. Ранее свойство вогнутости форвардной кривой было отмечено Р. Брауном и С. Шейфером (Brown, Schaefer, 1994).

Характер изменения кривой доходности $y(\tau) \equiv Y(B(\tau))$ в зависимости от $B(\tau)$ является более сложным.

Если параметр ζ удовлетворяет неравенству $\zeta \geq (k/v) \ln(1 + v/V)$, тогда кривая доходности $Y(B)$ – вогнутая на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$. Если значение ζ удовлетворяет неравенству (5.16), тогда кривая доходности $Y(B)$ – выпуклая на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$. Если значение параметра ζ удовлетворяет неравенствам

$$k/(V + v) \leq \zeta \leq (k/v) \ln(1 + v/V), \quad (5.18)$$

тогда кривая доходности $Y(B)$ на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$ имеет точку перегиба B_{π} . Причем кривая доходности $Y(B)$ – вогнутая на интервале $0 \leq B < B_{\pi}$ и выпуклая на интервале $B_{\pi} < B \leq V^{-1}$.

Заметим, что при $\tau \rightarrow \infty$ для предельного значения кривой доходности (5.13) можно записать неравенство

$$\frac{y(\infty) - x}{\theta - x} \equiv \frac{Y(V^{-1}) - x}{\theta - x} = \frac{k}{V} > \frac{k}{v} \ln\left(1 + \frac{v}{V}\right) > \zeta.$$

При выполнении этого неравенства кривая доходности $Y(B)$ возрастает на интервале $0 \leq B \leq V^{-1}$.

Кривая доходности $Y(B)$ имеет максимум на интервале $0 < B < V^{-1}$, если ζ удовлетворяет неравенствам

$$(k/v) \ln(1 + v/V) < \zeta < k/(V - v). \quad (5.19)$$

В этом случае кривая доходности $Y(B)$ пересекает форвардную кривую $F(B)$ в точке B_0 (т. е. $Y(B_0) = F(B_0)$) и точка B_0 является точкой максимума кривой доходности $Y(B)$. При этом

$$\begin{aligned} Y(B) &< F(B), \text{ если } 0 < B < B_0; \\ Y(B) &> F(B), \text{ если } B_0 < B < V^{-1}. \end{aligned}$$

Другими словами, кривая доходности $Y(B)$ пересекает форвардную кривую $F(B)$ в точке B_0 своего максимума. Из этого, в частности, следует, что если максимум кривой доходности $Y(B)$ существует, то максимальное значение $Y(B_0)$ всегда меньше максимального значения форвардной кривой $F(B^*)$, так как $B^* < B_0$.

Взаимные свойства кривых $Y(B)$ и $F(B)$ сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Формы кривой доходности $Y(B)$ и форвардной кривой $F(B)$ в зависимости от величины процентной ставки

	Параметры модели удовлетворяют неравенствам			
	(5.17)	(5.19)	(5.18)	(5.16)
$F(B)$	Вогнутая			
	Убывает	Имеет максимум в точке B^*		Возрастает
$Y(B)$	Вогнутая		Имеет перегиб	Выпуклая
	Убывает	Имеет максимум в точке B_0 , $B_0 > B^*$	Возрастает	
	$Y(B) > F(B)$	Имеется пересечение в точке B_0 , $B_0 > B^*$		$Y(B) < F(B)$

На рис. 5.1 иллюстрируются взаимные свойства кривых $F(B)$ и $Y(B)$. Кривые на рис. 5.1 рассчитывались для значений параметров, представленных в табл. 5.2. Сплошными толстыми линиями изображены форвардные кривые $F(B)$, а сплошными тонкими линиями – кривые доходности $Y(B)$. Круглые маркеры отмечают предельные точки. Пунктирной линией изображен отрезок прямой, соединяющий предельные точки. Интересно отметить, что производная $dY(B)/dB$ по абсолютной величине при $B \rightarrow V^{-1}$ стремится к бесконечности, причем она положительная, если $\zeta > (k/v) \ln(1 + v/V)$, и отрицательная в обратном случае.

Таблица 5.2

Значения параметров для кривых рис. 5.1

k	θ	D	x	λ
0,05	0,06	0,001	0,02	0,01

Параметр $r = r(t)$, вообще говоря, является случайным. Остальные параметры детерминированные. В книге Г. А. Медведева (2005) показано, что процесс $r(t)$ имеет стационарную плотность вероятностей $p(r)$, которая является сдвинутой плотностью гамма с параметром сдвига x , параметром формы q и параметром масштаба c , т. е.

$$p(r) = c^q (r - x)^{q-1} e^{-c(r-x)} / \Gamma(q), \quad x < r < \infty,$$

где $q = (\theta - x)^2 / D$; $c = (\theta - x) / D > 0$. Поэтому имеется возможность рассчитать вероятности появления той или иной формы кривых доходности при наблюдаемом процессе краткосрочной ставки.

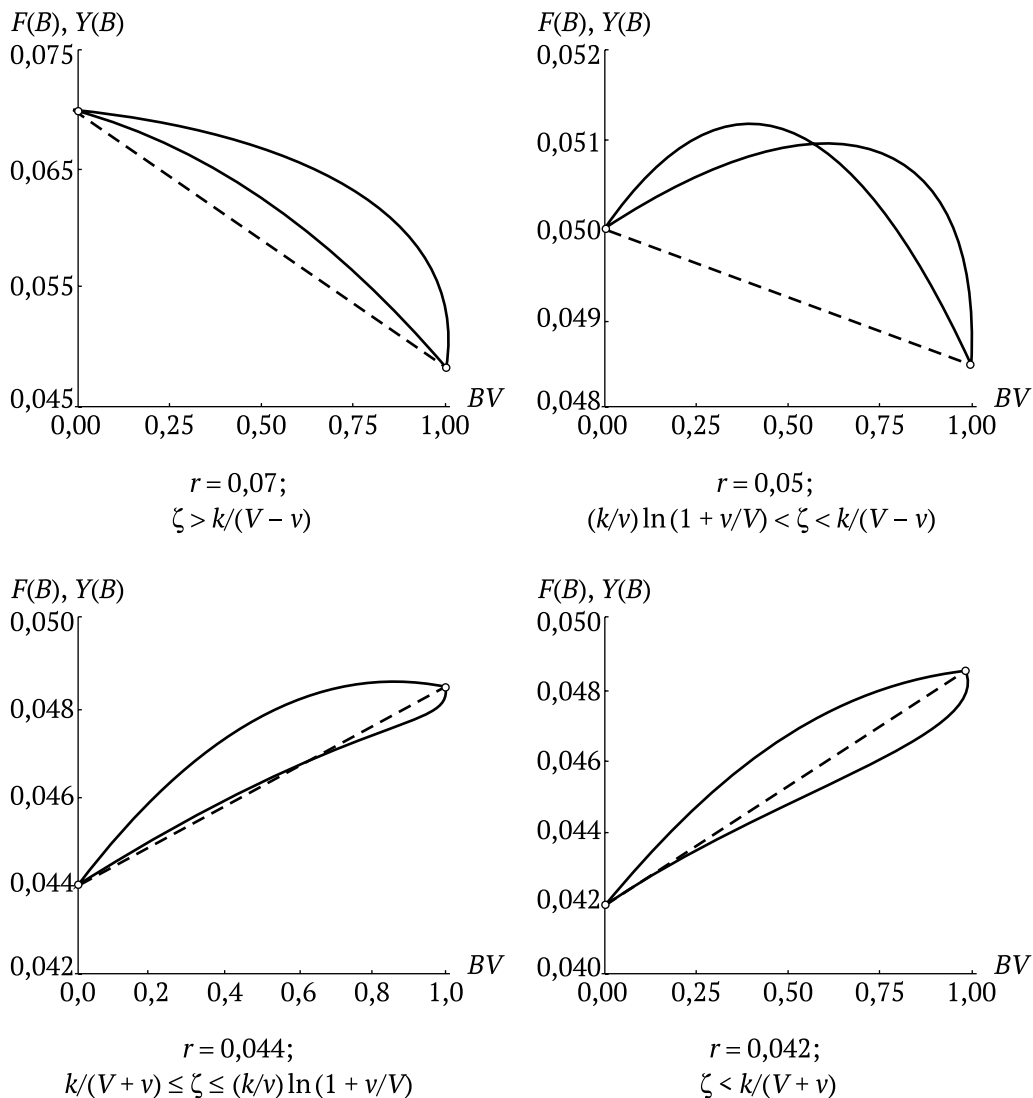


Рис. 5.1. Четыре возможных вида кривых доходности $Y(B)$ в сравнении с поведением форвардной кривой $F(B)$

На рис. 5.2 представлена иллюстрация того, каким образом нижний предельный уровень влияет на характер взаимного положения форвардной кривой $F(B)$ и кривой доходности $Y(B)$. На рис. 5.2 сплошными толстыми линиями изображены форвардные кривые $F(B)$, а сплошными тонкими линиями – кривые доходности $Y(B)$.

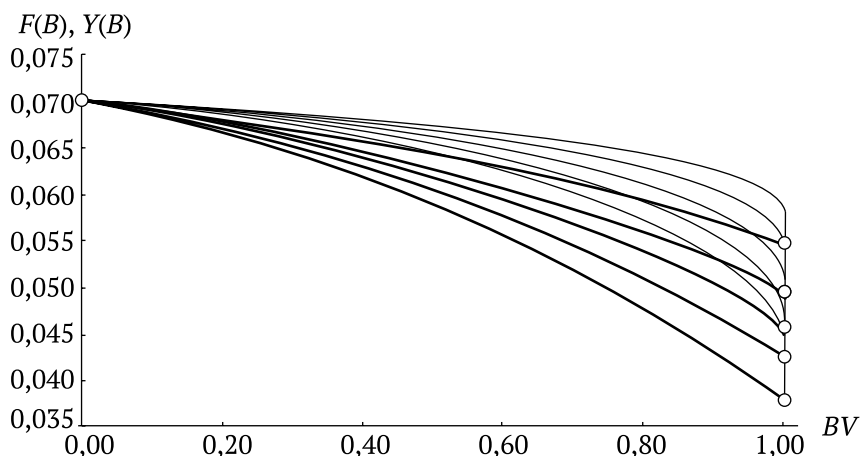


Рис. 5.2. Влияние нижнего предельного уровня на поведение форвардной кривой $F(B)$ и кривой доходности $Y(B)$

Значения параметров для кривых рис. 5.2 выбраны те же, что и в табл. 5.2, за исключением параметра x , который принимает пять различных значений, соответственно каждой паре кривых. Параметр $r = 0,07$. Нижняя пара кривых соответствует значению $x = -\infty$ (модель Васичека). Выше показана пара кривых для $x = -0,01$. Третья снизу пара кривых рассчитана для $x = 0$ (модель CIR). Далее следуют кривые для $x = 0,03$ и $x = 0,05$. Таким образом, для выбранных значений параметров с повышением нижнего предельного уровня x доходности увеличиваются.

ВЫВОДЫ

Для однофакторной модели аффинной доходности Даффи – Кана найдены аналитические представления кривых доходности и форвардных кривых и исследованы их свойства, когда в качестве временной переменной используется мера дюрации безрисковой ставки. Показано, что для всего многообразия параметров существует только четыре возможных вида кривой доходности. Для малых сроков погашения актива доходность определяется в основном текущим уровнем безрисковой ставки, в то время как для очень продолжительных сроков до погашения доходность определяется стационарным математическим ожиданием безрисковой ставки. В связи с этим можно было бы ожидать, что влияние текущего уровня безрисковой ставки на доходность будет с увеличением времени затухать. Однако это не так. Оказалось, что текущий уровень безрисковой ставки существенным образом влияет на вид всей кривой доходности и форвардной кривой. Отметим также, что кривая доходности и форвардная кривая стартуют при $\tau = 0$ из одной точки и при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к одному и тому же пределу, это отличается от обычно принятой точки зрения, что с увеличением τ эти кривые расходятся.

Глава 6

ДВУХФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ДАФФИ – КАНА

Обычно рассматриваются модели процентной ставки, в которых краткосрочная ставка $r(t)$ является единственной переменной состояния. Эти модели привлекательны тем, что часто дают возможность получать аналитические решения и обеспечивают относительно простой вычислительный анализ. Однако однофакторные модели имеют определенные недостатки. Основной из них состоит в том, что вся временная структура управляется только единственным значением краткосрочной ставки, зафиксированным в начальный момент построения временной структуры. Это представляется неразумным с экономической точки зрения.

Для того чтобы избежать данного недостатка авторы предлагают для моделирования неопределенности процентной ставки использовать более чем одну переменную состояния. При переходе от единственного фактора к нескольким должно быть улучшение аппроксимации временной структуры. Цена за это в общем случае – потеря возможности получения аналитических решений, получение уравнений с частными производными с повышенной размерностью и усложнение процедуры получения результатов.

Выбор подходящих факторов также важен. Здесь снова возникает проблема выполнения условий отсутствия арбитража и построения равновесных моделей. Большинство известных многофакторных моделей основываются на двух факторах. Дж. Кокс, Дж. Ингерсолл и С. Росс (CIR, 1985) и С. Ричард (1978) использовали спот ставку и ставку инфляции, Ф. Лонгстафф и Э. Шварц (1991) – спот ставку и ее волатильность, Д. Даффи и Р. Кан (1996) – доходность на фиксированный набор облигаций, М. Бреннан и Э. Шварц (1979) – долгосрочную и краткосрочную ставки, С. Шейфер и Э. Шварц (1987) – краткосрочную ставку и спред, Г. Фонг и О. Васичек (1991) – краткосрочную ставку и ее волатильность, С. Дас и С. Фореси (1996) – краткосрочную ставку и ее среднее и т. д. В последнее время были разработаны трехфакторные модели, из которых наиболее известными являются модель Л. Чена (1996) и мо-

дель П. Балдуччи, С. Даса, С. Фореси и Р. Сандарама (BDFS, 1996). В этих моделях в качестве переменных состояния используются краткосрочная ставка, ее локальное среднее и ее волатильность. Некоторые модели получаются расширением однофакторных арбитражных моделей путем предположения о том, что параметры модели могут изменяться со временем, такой параметр включается в число переменных состояния, и добавляется соответствующее уравнение его динамики. Как и в случае их однофакторных версий, многофакторные арбитражные модели создают безрисковый портфель в текущем времени относительно всех рассматриваемых факторов для получения из арбитражных рассуждений уравнения в частных производных, которому должна удовлетворять стоимость актива.

Общие свойства многофакторных моделей временной структуры доходностей были представлены в главе 2. Там предполагалось, что динамика переменных состояния рынка может описываться многомерным стохастическим уравнением

$$dX(t) = K(\theta - X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t),$$

где $X(t)$ – n -вектор состояния; θ – n -вектор математических ожиданий $E[X]$; $\sigma(X)$ – $(n \times m)$ -матрица волатильности; K – $(n \times n)$ -матрица коэффициентов возвращения к среднему; $W(t)$ – m -вектор независимых стандартных винеровских процессов. Чтобы временная структура доходности была аффинной, матрица волатильности и m -вектор рыночных цен риска $\lambda(x)$ должны обладать свойствами

$$\sigma(x)\sigma(x)^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i,$$

где α и β_i – $(n \times n)$ -матрицы; ξ и η_i – n -вектора; x_i – компоненты вектора x . Указанные соотношения удовлетворяются при

$$\sigma(x) = \sigma \langle \sqrt{\gamma + \Gamma x} \rangle, \quad \lambda(x) = \langle \sqrt{\gamma + \Gamma x} \rangle \lambda,$$

где γ, λ – m -вектора; σ – $(n \times m)$ -матрица; Γ – $(m \times n)$ -матрица; $\langle \sqrt{\gamma + \Gamma x} \rangle$ – диагональная $(m \times m)$ -матрица, по диагонали которой стоят квадратные корни компонент вектора $\gamma + \Gamma x$. В этом случае $\alpha = \sigma \langle \gamma \rangle \sigma^T$, $\xi = \sigma \langle \gamma \rangle \lambda$, а элементы матрицы β_i и вектора η_i определяются равенствами

$$(\beta_i)_{kj} = \sum_{u=1}^m \sigma_{ku} \sigma_{ju} \Gamma_{ui}, \quad 1 \leq k, j \leq n; \quad (\eta_i)_k = \sum_{u=1}^m \sigma_{ku} \Gamma_{ui} \lambda_u, \quad 1 \leq k \leq n.$$

В этом случае скалярная функция временной структуры $A(\tau)$ и n -вектор $B(\tau)^T = (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_n(\tau))$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} A'(\tau) &= (\sigma \langle \gamma \rangle \lambda - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \sigma \langle \gamma \rangle \sigma^T B(\tau)/2, \quad A(0) = 0, \\ B_i'(\tau) &= \phi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau)/2, \quad B_i(0) = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

В уравнениях для дюраций $B_i(\tau)$ символ K_i обозначает i -й столбец матрицы K , $1 \leq i \leq n$; $\phi_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$; $\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n = 1$. Заметим также, что матрицы β_i , $1 \leq i \leq n$, по определению являются симметрическими.

Основную трудность при определении функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ представляет решение системы уравнений (6.1), которая, по существу, является системой уравнений Риккати и не имеет аналитического решения. Проблема решений таких уравнений обсуждалась Д. Даффи и Р. Каном (Duffie, Kan, 1996), которые предложили численный метод решения с помощью конечно-разностных алгоритмов. Они проиллюстрировали свой подход на примере двухфакторной модели стохастической волатильности, являющейся двухфакторным расширением модели Кокса – Ингерсолла – Росса. Этот пример показал, что такой подход требует довольно громоздких преобразований, большого опыта при выборе параметров сетки и при оценке точности решения. Кроме того, такой метод, естественно, является приближенным, как и все конечно-разностные методы решения дифференциальных уравнений. Наряду с этим можно использовать другой приближенный метод, основанный на том, что для моделей процентных ставок, приводящих к аффинным временным структурам доходности, оценки параметров на основе реальных рыночных данных показывают, что волатильность в этих моделях обычно мала (Hu, 1993; Svensson, 1994; RiskMetrics; Green, Odegaard, 1997; Elton, Green, 1998). Тогда для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (6.1) можно использовать метод малого параметра А. Пуанкаре (1892), рассматривая в качестве малого параметра коэффициент, определяющий порядок малости элементов матрицы волатильности. Идея метода заключается в следующем. В правой части дифференциального уравнения выделяют часть, которую можно считать малой по сравнению с оставшейся. Считая, что эта «малая часть» несущественно влияет на решение уравнения, отбрасывают ее и получают, таким образом, более простое уравнение. Решение этого уравнения принимается за нулевое приближение к решению исходного уравнения. После этого возвращаются к решению исходного уравнения, в правой части которого в «малую часть» подставляется найденное нулевое приближение. Решение получающегося уравнения принимается за первое приближение, и процедура повторяется, пока не будет достигнута необходимая точность. Используем метод малого параметра для определения временных структур доходности для многомерных моделей динамики процентных ставок.

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ДВУХФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ «СТАВКА – ЕЕ ЛОКАЛЬНОЕ СРЕДНЕЕ»

Идея распространения однофакторных моделей динамики процентных ставок на многофакторный случай состоит в том, что некоторый параметр, который был постоянным в однофакторном случае, считают слу-

чайно изменяющимся и при этом предположении добавляют уравнение его стохастической динамики. Так получается двухфакторная модель. Если в качестве этого параметра выбран уровень θ , к которому возвращается процентная ставка, имеем следующую двухфакторную модель

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D_r \frac{r(t) - x}{\theta_0 - x}} dW_r(t), \quad r(0) > x, \quad (6.2)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta D_\theta \frac{\theta(t) - x}{\theta_0 - x}} dW_\theta(t), \quad \theta(0) > x. \quad (6.3)$$

Здесь вектор переменных состояния $x(t)^T = (r(t), \theta(t))$, вектор математических ожиданий $\theta^T = (\theta_0, \theta_0)$. Остальные элементы модели:

$$K = \begin{pmatrix} k_r & -k_r \\ 0 & k_\theta \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2k_r D_r / (\theta_0 - x)} & 0 \\ 0 & \sqrt{2k_\theta D_\theta / (\theta_0 - x)} \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} -x \\ -x \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом, если обозначить для краткости

$$\sigma_{11} = \sqrt{2k_r D_r / (\theta_0 - x)}, \quad \sigma_{22} = \sqrt{2k_\theta D_\theta / (\theta_0 - x)},$$

имеем

$$\eta_r = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \lambda_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{22} \lambda_\theta \end{pmatrix}, \quad \beta_r = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^2 \end{pmatrix}, \quad K_r = \begin{pmatrix} k_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_\theta = \begin{pmatrix} -k_r \\ k_\theta \end{pmatrix}.$$

Параметр x определяет нижнюю границу изменения процентной ставки, поэтому он имеет одинаковое значение как в уравнении для краткосрочной процентной ставки $r(t)$, так и в уравнении для ее локального среднего $\theta(t)$. Таким образом, уравнения (6.1) для функций временной структуры $B(\tau)^T = (B_r(\tau), B_\theta(\tau))$ приобретают вид

$$B_r'(\tau) = \phi_r - (k_r + \sigma_{11} \lambda_r) B_r(\tau) - \sigma_{11}^2 B_r(\tau)^2 / 2, \quad B_r(0) = 0, \quad (6.4)$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta + k_r B_r(\tau) - (k_\theta + \sigma_{22} \lambda_\theta) B_\theta(\tau) - \sigma_{22}^2 B_\theta(\tau)^2 / 2, \quad B_\theta(0) = 0. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.4) – это уравнение Риккати с постоянными коэффициентами, и его решение имеет вид

$$B_r(\tau) = \phi_r \left(\frac{\varepsilon_r}{e^{\varepsilon_r \tau} - 1} + V_r \right)^{-1}, \quad (6.6)$$

где для краткости обозначено

$$\varepsilon_r = \sqrt{(k_r + \sigma_{11}\lambda_r)^2 + 2\phi_r\sigma_{11}^2}, \quad V_r = (\varepsilon_r + \sigma_{11}\lambda_r + k_r)/2.$$

Уравнение (6.5) – это тоже уравнение Риккати, у которого один из коэффициентов, $\phi_\theta + k_r B_r(\tau)$, зависит от τ . Его решение в аналитическом виде записать не удастся, хотя при помощи преобразования

$$B_\theta(\tau) = \frac{2}{\sigma_{22}^2} \frac{1}{Y} \frac{dY}{d\tau}$$

его можно свести к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменным коэффициентом:

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} + (k_\theta + \sigma_{22}\lambda_\theta) \frac{dY}{d\tau} - \sigma_{22}^2 (\phi_\theta + k_r B_r(\tau)) Y = 0.$$

Решение этого уравнения в аналитическом виде, к сожалению, тоже не получается из-за сложного вида $B_r(\tau)$. Воспользуемся методом малого параметра, предполагая, что величины σ_{11}^2 и σ_{22}^2 являются малыми. Поскольку процесс $\theta(t)$ имеет смысл локального среднего процесса $r(t)$, то естественно предполагать, что $k_\theta d_\theta < k_r d_r$, поэтому в качестве малого параметра δ можно принять величину $\delta = \sigma_{11}^2/2$. Введем также обозначения $\omega = \sigma_{22}^2/\sigma_{11}^2 < 1$, $\psi_r = k_r + \sigma_{11}\lambda_r$, $\psi_\theta = k_\theta + \sigma_{22}\lambda_\theta$. Уравнения (6.4) и (6.5) можно записать в виде

$$B_r'(\tau) = \phi_r - \psi_r B_r(\tau) - \delta B_r(\tau)^2, \quad B_r(0) = 0, \quad (6.7)$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta - \psi_\theta B_\theta(\tau) + k_r B_r(\tau) - \delta \omega B_\theta(\tau)^2, \quad B_\theta(0) = 0. \quad (6.8)$$

Для успешного применения метода малого параметра обычно требуется, чтобы выражения в правых частях уравнений были аналитическими функциями, тогда последовательность приближений будет сходиться к истинному решению. В нашем случае это выполняется. Представим функции $B_r(\tau)$ и $B_\theta(\tau)$ в виде рядов по малому параметру

$$B_r(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i G_i(\tau), \quad B_\theta(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i H_i(\tau), \quad (6.9)$$

где $G_i(\tau)$ и $H_i(\tau)$ – i -е приближения функций $B_r(\tau)$ и $B_\theta(\tau)$ соответственно. Подставляя выражения (6.9) в уравнения (6.7) и (6.8), получаем уравнения для определения последовательных приближений:

$$G_0'(\tau) = \phi_r - \psi_r G_0(\tau), \quad G_1'(\tau) = -\psi_r G_1(\tau) - G_0(\tau)^2,$$

$$G_i'(\tau) = -\psi_r G_i(\tau) - \sum_{j=0}^{i-1} G_j(\tau) G_{i-j-1}(\tau), \quad i \geq 2.$$

$$H_0'(\tau) = \phi_\theta - \psi_\theta H_0(\tau) + k_r G_0(\tau),$$

$$H_1'(\tau) = -\psi_0 H_1(\tau) + k_r G_1(\tau) - \omega H_0(\tau)^2,$$

$$H_i'(\tau) = -\psi_0 H_i(\tau) + k_r G_i(\tau) - \omega \sum_{j=0}^{i-1} H_j(\tau) H_{i-j-1}(\tau), \quad i \geq 2.$$

Начальные условия для всех приближений нулевые: $G_i(0) = 0$ и $H_i(0) = 0$, $i \geq 0$. Как видно, уравнения для приближений всех порядков – это неоднородные линейные уравнения первого порядка, решение которых не представляет труда. При этом однородные части всех уравнений одинаковые, что тоже облегчает процедуру нахождения решений. Приведем первые приближения

$$G_0(\tau) = \frac{\phi_r}{\psi_r} (1 - e^{-\psi_r \tau}), \quad G_1(\tau) = -\frac{\phi_r^2}{\psi_r^3} (1 - 2\psi_r \tau e^{-\psi_r \tau} - e^{-2\psi_r \tau}),$$

$$H_0(\tau) = \left(\frac{\phi_\theta}{\psi_\theta} + \frac{k_r \phi_r}{\psi_r \psi_\theta} \right) (1 - e^{-\psi_\theta \tau}) + \frac{k_r \phi_r}{\psi_r (\psi_\theta - \psi_r)} (e^{-\psi_\theta \tau} - e^{-\psi_r \tau}).$$

Оказывается, что все приближения представляются в виде взвешенной суммы экспонент такой, что i -е приближение является суммой экспонент с показателями $0, -\psi\tau, -2\psi\tau, \dots, -(i+1)\psi\tau$, причем громоздкость взвешивающих коэффициентов с ростом i быстро растет, поэтому приближения в аналитическом виде приводить здесь представляется неудобным. Продемонстрировать характер приближений удобнее на численном примере. Д. Ан и Б. Гао (Ahn, Gao, 1999) приспособивали модель Даффи – Кана для описания динамики процесса годовой ставки доходности одномесечных бумаг Казначейства США для периода наблюдения с января 1960 г. по февраль 1991 г. Они получили такой результат:

$$dr(t) = 0,1347 \cdot (0,0762 - r(t))dt + \sqrt{0,0181r(t) - 0,0006} dW(t).$$

В наших обозначениях это показывает, что $k_r = 0,1347$, $\theta_0 = 0,0762$, $D_r = 0,002892$, $\sigma_{11} = 0,134536$, $\chi = 0,033149$. Локальное среднее $\theta(t)$ по смыслу является сглаженной процентной ставкой, поэтому коэффициент возвращения k_θ и дисперсия D_θ локального среднего $\theta(t)$ должны быть меньше, чем k_r и D_r соответственно. Выберем их равными $k_\theta = 0,1k_r = 0,01347$, $D_\theta = 0,1D_r = 0,0002892$. Выберем также $\lambda_r = \lambda_\theta = 0,1$, $\phi_r = \phi_\theta = 0,5$. Тогда $\psi_r = 0,148154$, $\psi_\theta = 0,014815$, $\sigma_{22} = 0,013454$. В качестве малого параметра выбираем $\delta = \sigma_{11}^2/2 = 0,009050$, $\omega = \sigma_{22}^2/\sigma_{11}^2 = 0,01$. Первые три приближения функции $B_r(\tau)$ имеют вид

$$G_0(\tau) = 3,3749 \cdot (1 - e^{-0,1482\tau}),$$

$$\delta G_1(\tau) = -0,6957 \cdot (1 - e^{-0,2964\tau}) + 0,2062\tau e^{-0,1482\tau},$$

$$\delta^2 G_2(\tau) = 0,2867 - 0,1434e^{-0,4446\tau} - (0,2866 + 0,08497\tau)e^{-0,2964\tau} +$$

$$+ (0,1432 - 0,04250\tau - 0,006296\tau^2)e^{-0,1482\tau}.$$

Поскольку функция $B_r(\tau)$ определяется формулой (6.6) точно, можно сравнить полученные приближения с точными значениями. На рис. 6.1 представлены графики относительной погрешности приближений. На рис. 6.1 использованы обозначения

$$G0 = \frac{G_0(\tau) - B_r(\tau)}{B_r(\tau)}; \dots;$$

$$G01234 = \frac{G_0(\tau) + \delta G_1(\tau) + \delta^2 G_2(\tau) + \delta^3 G_3(\tau) + \delta^4 G_4 - B_r(\tau)}{B_r(\tau)}.$$

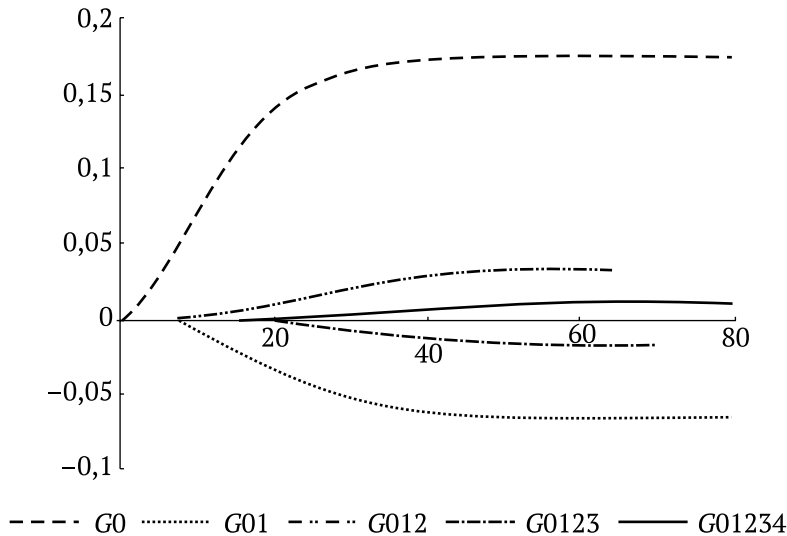


Рис. 6.1. Относительная погрешность первых приближений функции $B_r(\tau)$ по методу малого параметра

Обозначим через $B_r^{(j)}(\tau)$ аппроксимацию функции $B_r(\tau)$ с помощью приближений $\{G_i(\tau), 0 \leq i \leq j\}$ и через $B_\theta^{(j)}(\tau)$ аппроксимацию функции $B_\theta(\tau)$ с помощью приближений $\{H_i(\tau), 0 \leq i \leq j\}$, т. е.

$$B_r^{(j)}(\tau) = \sum_{i=0}^j \delta^i G_i(\tau), \quad B_\theta^{(j)}(\tau) = \sum_{i=0}^j \delta^i H_i(\tau).$$

Как видно из рис. 6.1, максимальные отклонения приближения от истинного значения достигаются в предельной точке при $\tau \rightarrow \infty$, поэтому точность аппроксимации $B_r^{(j)}(\tau)$ можно оценить сверху неравенством

$$|B_r^{(j)}(\tau) - B_r(\tau)| < |B_r^{(j)}(\infty) - B_r(\infty)|.$$

Как следует из формулы (6.6), $B_r(\infty) = \phi_r V_r^{-1}$. Определим $B_r^{(j)}(\infty)$. Поскольку $B_r'(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ для любых допустимых значений параметров, то это

свойство будет иметь место и для приближений $G_i(\tau)$. Иначе говоря, их производные также стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Это значит, что предельные значения $G_i(\infty)$ будут удовлетворять системе соотношений

$$\begin{aligned}\phi_r &= \psi_r G_0(\infty), \quad \psi_r G_1(\infty) = -G_0(\infty)^2, \\ \psi_r G_i(\infty) &= -\sum_{j=0}^{i-1} G_j(\infty) G_{i-j-1}(\infty), \quad i \geq 2.\end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что $G_i(\infty) = (-1)^i a_i \frac{\phi_r^{i+1}}{\psi_r^{2i+1}}$, где коэффициенты a_i находятся следующим образом. Из первого соотношения имеем $a_0 = 1$. Остальные коэффициенты a_i , $i \geq 1$, последовательно определяются по формуле $a_i = p_i q_i^T$, где p_i и q_i – вектора, определяемые равенствами $p_i = (a_0, a_1, \dots, a_{i-1})$, $q_i = (a_{i-1}, a_{i-2}, \dots, a_0)$, $i \geq 1$. Так что $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ и т. д. Поэтому

$$\begin{aligned}B_r^{(j)}(\infty) &= \sum_{i=0}^j (-\delta)^i a_i \frac{\phi_r^{i+1}}{\psi_r^{2i+1}}, \\ |B_r^{(j)}(\tau) - B_r(\tau)| &< \left| \frac{\phi_r}{V_r} - \frac{\phi_r}{\psi_r} \sum_{i=0}^j a_i \left(-\frac{\delta \phi_r}{\psi_r^2} \right)^i \right|.\end{aligned}$$

Таким образом, точность можно контролировать, если определить предельное значение $B_r(\infty)$ из уравнений (6.7) и (6.8) при $\tau \rightarrow \infty$. Аппроксимация функции $B_0(\tau)$ в виде (6.9) производится аналогичным способом.

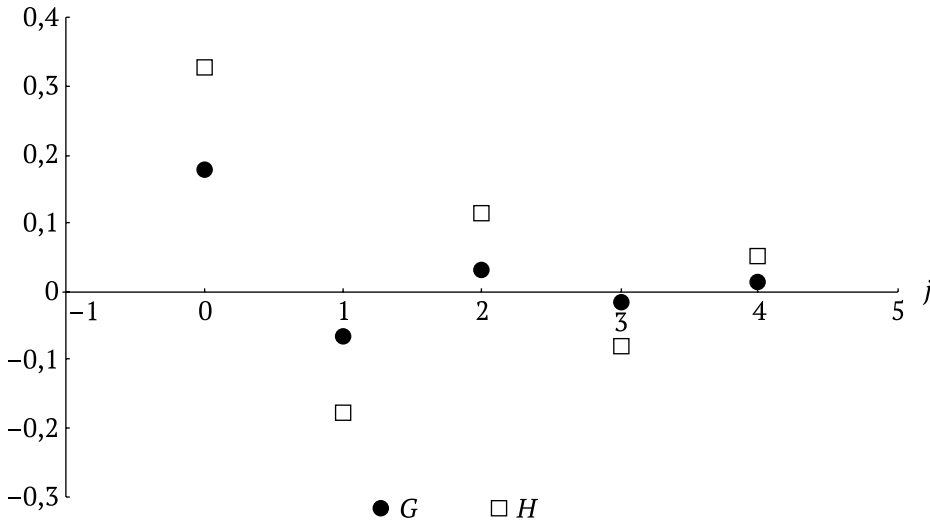


Рис. 6.2. Предельные относительные погрешности аппроксимации функций $B_r(\tau)$ и $B_0(\tau)$

Свойства аппроксимирующих функций $H_i(\tau)$ аналогичны свойствам функций $G_i(\tau)$, только в связи с тем, что уравнение (6.8) для функции $B_\theta(\tau)$ немного сложнее, чем уравнение (6.7) для $B_r(\tau)$, функции $H_i(\tau)$ более громоздки по сравнению с функциями $G_i(\tau)$. Обозначим предельные при $\tau \rightarrow \infty$ относительные погрешности аппроксимации

$$G_j = \frac{B_r^j(\infty) - B_r(\infty)}{B_r(\infty)}, \quad H_j = \frac{B_\theta^j(\infty) - B_\theta(\infty)}{B_\theta(\infty)}.$$

На рис. 6.2 представлены G_j и H_j для нескольких значений порядка приближения j .

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ ДВУХФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ «СТАВКА – ЕЕ МГНОВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ»

Если в качестве второй переменной состояния выбрана мгновенная дисперсия краткосрочной процентной ставки, уравнения двухфакторной модели переменных состояния приобретают вид

$$\begin{aligned} dr(t) &= k_r(\theta - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} \frac{r(t) - x_r}{\theta - x_r} dW_r(t), \quad r(0) > x_r, \\ dD(t) &= k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_D S} \frac{D(t) - x_D}{V - x_D} dW_D(t), \quad D(0) > x_D. \end{aligned}$$

Однако в таком виде эти уравнения не приводят к аффинной временной структуре из-за того, что в первом уравнении под корнем появляется произведение процессов $r(t)$ и $D(t)$. Чтобы остаться в рамках аффинной доходности, приходится нижнюю границу процентной ставки x_r удалить на бесконечность, $x_r \rightarrow -\infty$. Тогда уравнения двухфакторной модели краткосрочной процентной ставки получаются в виде

$$\begin{aligned} dr(t) &= k_r(\theta - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t), \\ dD(t) &= k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_D S} \frac{D(t) - x}{V - x} dW_D(t), \quad D(0) > x \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь V и S – соответственно среднее и дисперсия процесса $D(t)$, $x = x_D$ – нижняя граница процесса $D(t)$. В этом случае вектор переменных состояния $X(t)^T = (r(t), D(t))$, вектор математических ожиданий $\theta^T = (\theta, V)$. Остальные элементы модели могут быть определены следующим образом

$$K = \begin{pmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_D \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ -2k_D S x / (V - x) \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2k_r \\ 0 & 2k_D S / (V - x) \end{pmatrix}.$$

Уравнения (6.1) для функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)^T = (B_r(\tau), B_D(\tau))$ приобретают вид

$$A'(\tau) = k_r \theta B_r(\tau) + k_D V B_D(\tau) + \frac{2\lambda_D S x}{V - x} k_D B_D(\tau) - \frac{k_D S x}{V - x} B_D(\tau)^2, \\ B_r'(\tau) = \phi_r - k_r B_r(\tau), B_r(0) = 0, \quad (6.10)$$

$$B_D'(\tau) = \phi_D - \left(1 + \frac{2\lambda_D S}{V - x}\right) k_D B_D(\tau) - 2\lambda_r B_r(\tau) - \\ - k_r B_r(\tau)^2 - \frac{k_D S}{V - x} B_D(\tau)^2, B_D(0) = 0. \quad (6.11)$$

В этой версии двухфакторной модели функция $B_r(\tau)$ легко находится из уравнения (6.10):

$$B_r(\tau) = \phi_r (1 - e^{-k_r \tau}) / k_r,$$

а в уравнении для функции $B_D(\tau)$ в качестве малого параметра можно использовать параметр $\delta = \frac{k_D S}{V - x}$, где S – дисперсия процесса $D(t)$, определяя $B_D(\tau)$ в виде разложения $B_D(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i B_{Di}(\tau)$. При этом нулевое приближение $B_{D0}(\tau)$ находится в виде

$$B_{D0}(\tau) = f_1 (1 - e^{-\psi \tau}) + f_2 (e^{-k_r \tau} - e^{-\psi \tau}) + f_3 (e^{-\psi \tau} - e^{-2k_r \tau}),$$

где $\psi = k_D (1 + 2\lambda_D S / (V - x))$, $f_1 = (\phi_D - \phi_r^2 / k_r - 2\lambda_r \phi_r) / \psi$, $f_2 = 2(\lambda_r \phi_r + \phi_r^2 / k_r) / (\psi - k_r)$, $f_3 = \phi_r^2 / (k_r (\psi - 2k_r))$. Следующие приближения $B_{Di}(\tau)$ находятся последовательно из линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$B_{Di}'(\tau) = -\psi B_{Di}(\tau) - \delta \sum_{j=0}^{i-1} B_{Dj}(\tau) B_{D,i-1-j}(\tau), B_{Di}(\tau) = 0, i \geq 1. \quad (6.12)$$

Говоря о функции временной структуры $B_D(\tau)$, следует обратить внимание на то, что с ростом дисперсии процентной ставки доходность облигации уменьшается, как это можно увидеть из анализа однофакторной доходности (Медведев, 2012). Поэтому функция $B_D(\tau)$ должна быть отрицательной. Краткосрочная ставка доходности ранее была определена как $y(x) = x^T \phi$, и для нашего случая $y(r, D) = r\phi_r + D\phi_D$. Для того чтобы $y(r, D)$ уменьшалась с увеличением D , необходимо, чтобы $\phi_D < 0$. С учетом этого возникают ограничения на величину локальной по времени дисперсии краткосрочной процентной ставки, обеспечивающей положительную доходность: $D < |r\phi_r / \phi_D|$. Решения уравнения (6.11) оказываются монотонно убывающими функциями, при $\tau \rightarrow \infty$ достигающими предельного значения $B_D(\infty) < 0$.

Это значение можно определить из уравнения (6.11), если учесть, что при $\tau \rightarrow \infty$ в левой части уравнения $B_D'(\tau) \rightarrow 0$

$$B_D(\infty) = \left(-\psi + \sqrt{\psi^2 - 4\delta(\phi_r^2/k_r + 2\lambda_r\phi_r - \phi_D)} \right) / 2\delta.$$

Приближения $B_{Di}(\tau)$ имеют такие же свойства, что и $B_D(\tau)$, а их предельные значения обеспечивают равенство $B_D(\infty) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i B_{Di}(\infty)$. Из уравнений (6.12) следует, что предельные значения $B_{Di}(\infty)$ определяются по формулам

$$B_{D0}(\infty) = \frac{\phi_D}{k_D} - \frac{\phi_r^2}{k_D k_r} \equiv \Phi < 0, \quad B_{Di}(\infty) = a_i \left(-\frac{1}{k_D} \right)^i \Phi^{i+1}, \quad i \geq 1,$$

где коэффициенты a_i , $i \geq 1$, находятся так же, как это делалось выше при анализе двухфакторной модели (6.2) и (6.3). По аналогии с моделью (6.2) и (6.3) для модели (6.10) и (6.11) можно записать

$$B_D^{(j)}(\infty) = \Phi \sum_{i=0}^j a_i \left(-\frac{\delta\Phi}{k_D} \right)^i,$$

$$\left| B_D^{(j)}(\tau) - B_D(\tau) \right| < \left| B_D(\infty) - \Phi \sum_{i=0}^j a_i \left(-\frac{\delta\Phi}{k_D} \right)^i \right|,$$

что позволяет определить верхнюю границу погрешности приближения

$B_D^{(j)}(\tau) = \sum_{i=0}^j \delta^i B_{Di}(\tau)$. Относительную погрешность приближения $B_D^{(j)}(\tau)$ определим, как это делалось выше: $(B_D^{(j)}(\tau) - B_D(\tau)) / B_D(\tau)$. На рис. 6.3 эта относительная погрешность представлена для нулевого и первого приближений при следующих параметрах двухфакторной модели: $k_r = 0,1347$, $\theta = 0,0762$, $k_D = 0,1$, $V = 0,002892$, $S = 0,00001$, $x = 0$, $\lambda_r = \lambda_D = 0$, $\phi_r = 0,5$, $\phi_D = -0,5$.

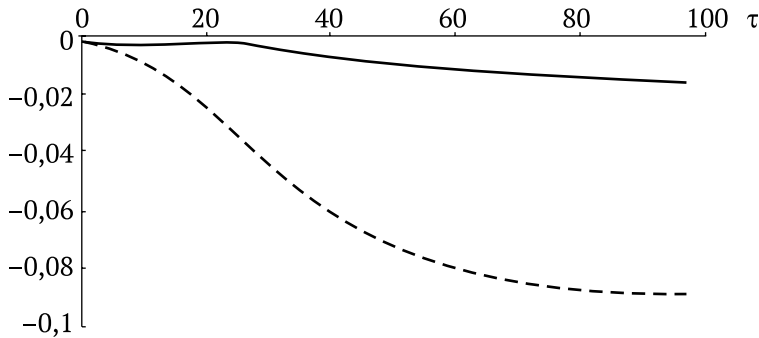


Рис. 6.3. Относительная погрешность нулевого (штриховая линия) и первого (сплошная линия) приближений

На рис. 6.4 для этих же параметров для пяти начальных приближений представлены предельные при $\tau \rightarrow \infty$ относительные погрешности, которые определяют верхнюю границу относительной погрешности для всякого конечного τ . Из этого рисунка видно, что для заданных параметров приближения $B_D^{(j)}(\tau)$ довольно быстро сходятся к истинной функции $B_D(\tau)$.

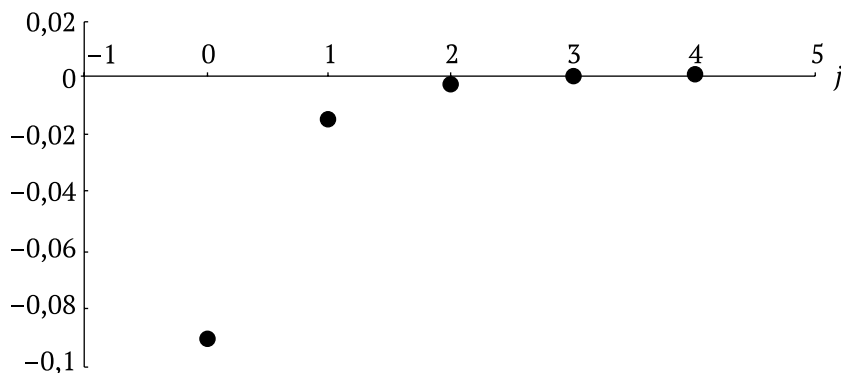


Рис. 6.4. Предельная относительная погрешность аппроксимации функции $B_d(\tau)$ как функция номера приближения j

Таким образом, однофакторная модель Даффи – Кана (см. главу 5) может быть расширена на двухфакторный случай дополнением второй переменной состояния. В качестве возможных версий дополнительных переменных могут быть рассмотрены локальный (по времени) средний уровень процентной ставки или ее мгновенная дисперсия. Получающиеся двухфакторные модели формулируются так, чтобы обеспечить аффинную временную структуру доходности. Рассмотрены способы определения функций временной структуры методом малого параметра и исследована точность аппроксимации полученных приближений.

Исследуем теперь свойства кривых доходности и форвардных кривых двухфакторных моделей.

СВОЙСТВА ДВУХФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ «СТАВКА – ЕЕ ЛОКАЛЬНОЕ СРЕДНЕЕ»

Напомним, что для n -факторной модели аффинной доходности предполагается, что вектор состояния финансового рынка $X(t) = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t)$$

с n -вектором дрейфа $\mu(x)$, $(n \times m)$ -матрицей волатильности $\sigma(x)$ и m -вектором $W(t)$ независимых стандартных винеровских процессов. При этом век-

тор дрейфа $\mu(x)$ и матрица диффузии $\sigma(x)\sigma(x)^T$ должны быть аффинными функциями, а рыночные цены риска такими, что $\sigma(x)\lambda(x)$ – n -вектор с аффинными компонентами.

$$\mu(x) = K(\theta - x), \quad \sigma(x)\sigma(x)^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i.$$

Здесь K , α и β_i – $(n \times n)$ -матрицы; θ , ξ и η_i – n -вектора; x_i – компоненты вектора x . Эти свойства для n -факторной модели аффинной доходности приводят к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции $A(\tau)$ и компонент вектора $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_n(\tau))$, τ – срок до погашения финансового актива:

$$A'(\tau) = (\xi - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \alpha B(\tau)/2, \quad A(0) = 0, \quad (6.13)$$

$$B_i'(\tau) = \phi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau)/2, \quad B_i(0) = 0. \quad (6.14)$$

В уравнении для $B_i(\tau)$ символ K_i обозначает i -й столбец матрицы K , $1 \leq i \leq n$. Кривая доходности $y(\tau, x)$ и форвардная кривая $f(\tau, x)$ определяются через функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ по формулам

$$y(\tau, x) = \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, x) = x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}.$$

Двухфакторная модель «ставка – ее локальное среднее» конструируется как расширение однофакторной модели Даффи – Кана при помощи предположения о том, что уровень θ , к которому возвращается процентная ставка $r(t)$ (в однофакторной модели он совпадает с ее стационарным средним), рассматривается как стохастический процесс диффузионного типа $\theta(t)$, подобный процессу краткосрочной ставки одномерной модели, но с меньшей волатильностью $D_\theta < D_r$, меньшим коэффициентом скорости возвращения $k_\theta < k_r$ и фиксированным уровнем возвращения θ_0 :

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D_r \frac{r(t) - x}{\theta_0 - x}} dW_r(t), \quad r(0) > x. \quad (6.15)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta D_\theta \frac{\theta(t) - x}{\theta_0 - x}} dW_\theta(t), \quad \theta(0) > x.$$

Уравнения (6.13) и (6.14) в этом случае приобретают вид

$$A'(\tau) = -\sigma_{11}\lambda_r x B_r(\tau) - (k_\theta \theta_0 + \sigma_{22}\lambda_\theta x) B_\theta(\tau) - x(\sigma_{11}^2 B_r(\tau)^2 + \sigma_{22}^2 B_\theta(\tau)^2)/2, \quad A(0) = 0, \quad (6.16)$$

$$B_r'(\tau) = \phi_r - (k_r + \sigma_{11}\lambda_r) B_r(\tau) - \sigma_{11}^2 B_r(\tau)^2/2, \quad B_r(0) = 0, \quad (6.17)$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta + k_r B_r(\tau) - (k_\theta + \sigma_{22}\lambda_\theta) B_\theta(\tau) - \sigma_{22}^2 B_\theta(\tau)^2/2, \quad B_\theta(0) = 0. \quad (6.18)$$

Здесь $\phi_r > 0$, $\phi_\theta > 0$, $\phi_r + \phi_\theta = 1$ и для краткости обозначено

$$\sigma_{11} = \sqrt{2k_r D_r / (\theta_0 - x)}, \quad \sigma_{22} = \sqrt{2k_\theta D_\theta / (\theta_0 - x)}.$$

Проблемы решения этих уравнений обсуждались ранее. Функция $A(\tau)$ находится из равенства (6.16) простым интегрированием, если найдены функции $B_r(\tau)$ и $B_\theta(\tau)$. Уравнение (6.17) – это уравнение Риккати, и его решение находится в виде

$$B_r(\tau) = \phi_r \left(\frac{\varepsilon_r}{e^{\varepsilon_r \tau} - 1} + V_r \right)^{-1},$$

$$\varepsilon_r = \sqrt{(k_r + \lambda_r \sigma_{11})^2 + 2\sigma_{11}^2 \phi_r}, \quad V_r = (\varepsilon_r + k_r + \lambda_r \sigma_{11})/2.$$

В частности, отсюда следует, что

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon_r} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon_r B_r}{\phi_r - V_r B_r} \right).$$

Основную трудность представляет решение уравнения (6.18), решение которого в аналитическом виде найти не удастся, и его приходится решать численно или использовать приближенные решения, описанные выше. Здесь мы рассмотрим свойства кривых доходности и форвардных кривых. Согласно определению и уравнениям (6.16)–(6.18) кривые доходности $y(\tau, r, \theta)$ и форвардные кривые $f(\tau, r, \theta)$ определяются через функции $A(\tau)$, $B_r(\tau)$ и $B_\theta(\tau)$ по формулам

$$y(\tau, r, \theta) = \frac{rB_r(\tau) + \theta B_\theta(\tau) - A(\tau)}{\frac{1}{\varepsilon} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon_r B_r(\tau)}{\phi_r - V_r B_r(\tau)} \right)},$$

$$f(\tau, r, \theta) = r\phi_r + \theta\phi_\theta + (k_r(\theta - x) - (r - x)(k_r + \sigma_{11}\lambda_r))B_r(\tau) + (k_\theta(\theta_0 - x) - (\theta - x)(k_\theta + \sigma_{22}\lambda_\theta))B_\theta(\tau) - (r - x)\sigma_{11}^2 B_r(\tau)^2/2 - (\theta - x)\sigma_{22}^2 B_\theta(\tau)^2/2.$$

Их предельные свойства такие:

при $\tau \rightarrow 0$ обе кривые стремятся к одинаковому пределу

$$y(0, r, \theta) = f(0, r, \theta) = r\phi_r + \theta\phi_\theta;$$

при $\tau \rightarrow +\infty$ обе кривые также стремятся к общему пределу

$$y(\infty, r, \theta) = f(\infty, r, \theta) = x + k_\theta(\theta_0 - x)B_\theta(\infty),$$

где

$$B_\theta(\infty) = \frac{1}{V_\theta} \left(\phi_\theta + \phi_r \frac{k_r}{V_r} \right), \quad V_\theta = (\varepsilon_\theta + k_\theta + \lambda_\theta \sigma_{22})/2,$$

$$\varepsilon_\theta = \sqrt{(k_\theta + \lambda_\theta \sigma_{22})^2 + 2\sigma_{22}^2(\phi_\theta + k_r B_r(\infty))},$$

$$B_r(\infty) = \phi_r / V_r.$$

Как видно из этих формул, кривые доходности $y(\tau, r, \theta)$ и форвардные кривые $f(\tau, r, \theta)$ можно рассматривать как сложные функции, зависящие от срока погашения τ только через функции аффинной структуры $B_r(\tau)$ и $B_\theta(\tau)$, т. е. $y(\tau) \equiv Y(B_r(\tau), B_\theta(\tau))$ и $f(\tau) \equiv F(B_r(\tau), B_\theta(\tau))$. Поскольку функции $B_r(\tau)$ и $B_\theta(\tau)$ принимают значения в конечных интервалах, свойства функций $Y(B_r, B_\theta)$ и $F(B_r, B_\theta)$ можно иллюстрировать наглядно с помощью графиков на всем интервале возможных значений сроков погашения τ . При этом поскольку эти функции связаны параметрически параметром τ , этот параметр можно исключить, выбрав значения одной из $\{B_r, B_\theta\}$ в качестве независимой переменной. Если выбрать в качестве переменной функцию $B_r \equiv B$, тогда получим кривые доходности $y(\tau, r, \theta)$ и форвардные кривые $f(\tau, r, \theta)$ в виде $Y(B, B_\theta(B))$ и $f(\tau) \equiv F(B, B_\theta(B))$. На рис. 6.5 эти кривые представлены для набора параметров, соответствующих найденным Д. Аном и Б. Гао (Ahn, Gao, 1999), приспособившим модель Даффи – Кана для описания динамики процесса годовой ставки доходности одномесячных бумаг Казначейства США для периода наблюдения с января 1960 г. по февраль 1991 г.

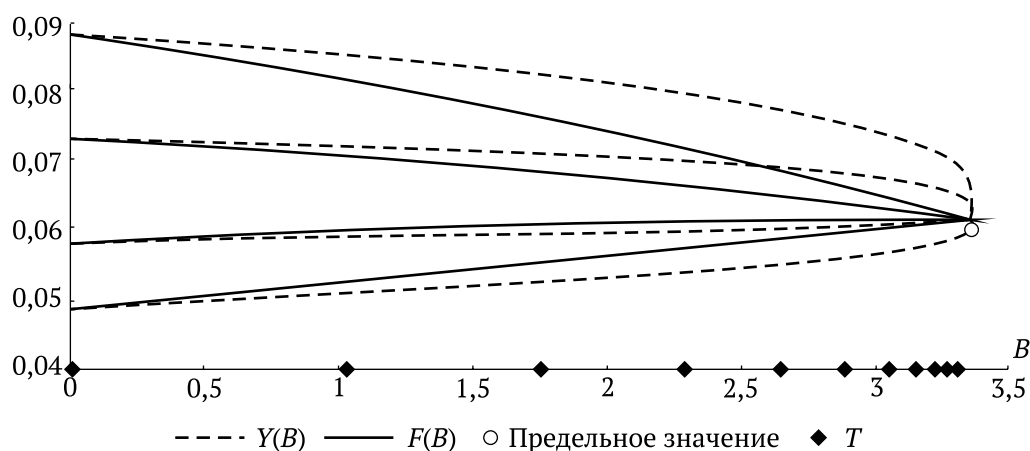


Рис. 6.5. Кривые доходностей $Y(B)$ и форвардные кривые $F(B)$ для различных значений краткосрочной ставки r : $r = x = 0,033$ (нижняя пара кривых); $0,05$; $0,075$; $0,1$ (верхняя пара кривых). Круглый маркер показывает предельное значение, одинаковое для всех кривых. T – метки реального времени через каждые 2 года для первых 20 лет. Другие параметры:
 $k_r = 0,1347$; $k_\theta = 0,01347$; $\theta_0 = 0,0762$; $\theta = 0,07$; $D_r = 0,002892$;
 $D_\theta = 0,0002892$; $x = 0,033149$; $\lambda_r = 0,1$; $\lambda_\theta = 0,1$; $\phi_r = 0,6$; $\phi_\theta = 0,4$

Заметим, что выбор $B_r \equiv B$ в качестве независимой переменной не всегда удобен, так как при $\phi_r \rightarrow 0$ длина интервала изменения переменной $B \in (0, B_r(\infty))$ сужается до нуля, так как $B_r(\infty) \rightarrow 0$ при $\phi_r \rightarrow 0$. Поэтому при пре-

образовании временной переменной τ в качестве независимой переменной B можно брать независимое от модели преобразование $B(\tau) = 1 - e^{-k\tau}$, когда при изменении τ в интервале $(0, \infty)$ переменная B изменяется в интервале $(0, 1)$. Значение параметра k определяется в зависимости от того, начальный или конечный участок временной структуры является интересным. На рис. 6.6 представлены графики кривых доходности $Y(B)$ и форвардных кривых $F(B)$ с использованием такой переменной B для следующих случаев: 1) две пары кривых, характеризующих двухфакторную модель при весовых коэффициентах $\{\phi_r = \phi_\theta = 0,5\}$ и $\{\phi_r = 1, \phi_\theta = 0\}$; первая пара стартует из начальной точки $Y(0) = F(0) = 0,06$ и стремится при $\tau \rightarrow \infty$ к предельному значению $Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = 0,060$, а вторая – из начальной точки $Y(0) = F(0) = 0,05$ и стремится к предельному значению $Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = 0,055$; заметим, что вторую пару кривых можно было бы рассматривать как порождаемую однофакторной моделью, так как из-за значений весовых коэффициентов $\{\phi_r = 1, \phi_\theta = 0\}$ краткосрочная ставка доходности $y(r, \theta) = r\phi_r + \theta\phi_\theta = r$ зависит только от одной переменной r ; 2) поэтому для сравнения с кривыми $Y(B)$ и $F(B)$ в этом случае на рисунке приведена пара кривых, порождаемых однофакторной моделью с совпадающими параметрами уравнения (6.15); эта пара кривых стартует тоже из начальной точки $Y(0) = F(0) = 0,05$, но при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к другому предельному

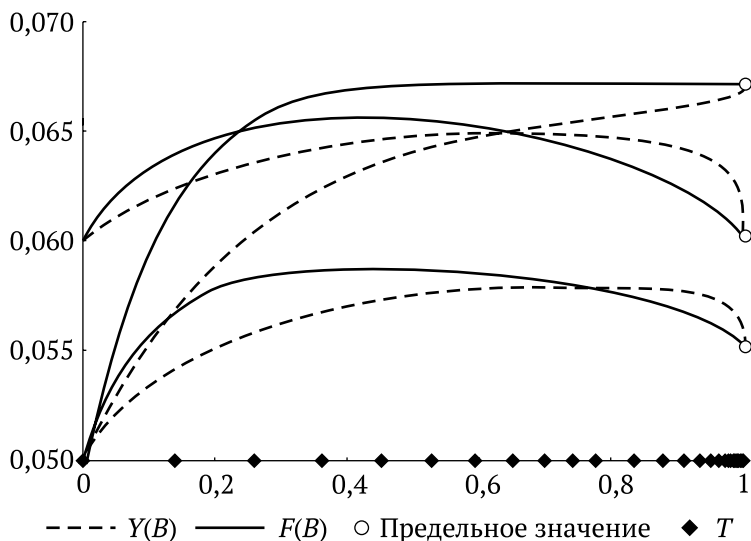


Рис. 6.6. Кривые доходностей $Y(B)$ и форвардные кривые $F(B)$ для двух случаев двухфакторных моделей краткосрочной ставки и одного случая однофакторной модели. T – метки реального времени через каждые 5 лет до 50 лет и далее через 10 лет. Процентная ставка $r = 0,05$; параметр $k = 0,03$. Другие параметры принимали те же значения, что и для рис. 6.5

значению $Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = 0,067$. Действительно, предельной точкой кривых однофакторной модели (см. главу 5) является значение

$$Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = x + \frac{k_r}{V_r}(\theta_0 - x),$$

в то время как предельное значение кривых двухфакторной модели при весовых коэффициентах $\{\phi_r=1, \phi_0=0\}$ вычисляется по формуле

$$Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = x + \frac{k_0 k_r}{V_0 V_r}(\theta_0 - x).$$

Поскольку имеют место неравенства $k_0 < V_0, k_r < V_r$, предельные значения кривых однофакторной модели всегда больше предельных значений двухфакторной модели при принятых весовых коэффициентах.

Заметим, что вид кривых $Y(B)$ и $F(B)$ для выбранных параметров различается в зависимости от количества факторов. Для однофакторной модели кривые монотонно возрастают и для любых сроков погашения форвардная кривая $F(B)$ выше кривой доходности $Y(B)$, в то время как для двухфакторной модели кривые имеют максимумы, причем для малых сроков погашения форвардная кривая $F(B)$ выше кривой доходности $Y(B)$, а для больших сроков погашения, наоборот, кривая доходности $Y(B)$ лежит выше форвардной кривой $F(B)$.

СВОЙСТВА ДВУХФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ «СТАВКА – ЕЕ МГНОВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ»

В двухфакторной модели с переменными состояниями краткосрочной ставки r и мгновенной дисперсией D краткосрочной ставки процентная ставка аффинной доходности до погашения (кривая доходности) и форвардная процентная ставка определяются формулами

$$y(\tau, r, D) = -\ln P(\tau, r, D)/\tau = [rB_r(\tau) + DB_D(\tau) - A(\tau)]/\tau;$$

$$f(\tau, r, D) = r dB_r(\tau)/d\tau + D dB_D(\tau)/d\tau - dA(\tau)/d\tau.$$

По экономическому смыслу доходность до погашения растет с увеличением краткосрочной ставки r и падает с увеличением дисперсии краткосрочной ставки D . Последнее не является очевидным, поэтому продемонстрируем влияние изменения дисперсии D на кривые доходностей $Y(B)$ и форвардные кривые $F(B)$ на примере однофакторной модели Даффи – Кана, рассмотренной в главе 5. Кривые $Y(B)$ и $F(B)$ стартуют при $B=0$ ($\tau=0$) из точки $Y(0) = F(0) = r$ (будем называть ее исходной точкой). Заметим, что положение исходной точки не зависит от величины дисперсии D и при ее изменении остается неизменной. С увеличением срока до пога-

шения τ кривые сначала расходятся, но затем при $\tau \rightarrow +\infty$ стремятся к одному и тому же пределу (назовем его предельной точкой)

$$Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = \frac{k}{V}\theta + \left(1 - \frac{k}{V}\right)x.$$

При этом $B(\infty) = V^{-1}$. Явное представление отношения k/V имеет вид

$$\frac{k}{V} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{k}{D}(\theta - x) + \lambda \sqrt{\frac{2k}{D}} \right)^2 + \frac{4k(\theta - x)}{D}} - \left(\frac{k}{D}(\theta - x) + \lambda \sqrt{\frac{2k}{D}} \right) \right).$$

При малых D это выражение может быть записано в виде

$$\frac{k}{V} = \frac{k(\theta - x)}{k(\theta - x) + \lambda \sqrt{2kD}} + O(D).$$

Таким образом, с увеличением дисперсии D параметр k/V монотонно уменьшается от $k/V = 1$ при $D = 0$ до $k/V = 0$ при $D \rightarrow +\infty$. Следовательно, предельная точка с увеличением дисперсии D монотонно уменьшается от $Y(B(\infty)) = F(B(\infty)) = \theta$ при $D = 0$ до нижней границы процентной ставки x при $D \rightarrow +\infty$. Предельное значение дюрации процентной ставки $B(\infty)$ также уменьшается с ростом дисперсии D от $B(\infty) = k^{-1}$ при $D = 0$ до 0 при $D \rightarrow +\infty$. Здесь уместно заметить, что при $D \rightarrow 0$ аналитические выражения для кривых $Y(B)$ и $F(B)$ упрощаются к следующему виду

$$Y(B) \rightarrow \theta + (\theta - r)kB / \ln(1 - kB), F(B) \rightarrow r + (\theta - r)kB, \\ B = B(\tau) \rightarrow (1 - \exp(-k\tau))/k, B \in (0, k^{-1}).$$

Ввиду справедливости неравенства $z > 1 + z/\ln(1 - z)$ для $z \in (0, 1)$ при малых дисперсиях форвардная ставка $F(B)$ для любых $B \in (0, k^{-1})$ больше доходности до погашения $Y(B)$, если $\theta > r$. При $\theta < r$ справедливо обратное. Для произвольных D форвардную кривую $F(B)$ можно представить в форме с явной зависимостью от D как

$$F(B) = r + (\theta - r)kB - \frac{r - x}{\theta - x} (\lambda \sqrt{2kD} + 2kDB).$$

Отсюда видно, что с ростом D форвардная ставка уменьшается на всем интервале изменения B . Аналогично ведет себя кривая доходности $Y(B)$. На рис. 6.7 представлено семейство пар кривых $Y(B)$ и $F(B)$ для различных значений стационарной дисперсии D , иллюстрирующее зависимость доходности от дисперсии.

Этот анализ показывает, что доходности должны уменьшаться с ростом дисперсии, поэтому функция временной структуры $B_D(\tau)$ в двухфакторной аффинной модели доходности может принимать только отрицательные значения для $\tau > 0$. Чтобы это имело место, весовой коэффициент ϕ_D должен быть отрицательным.

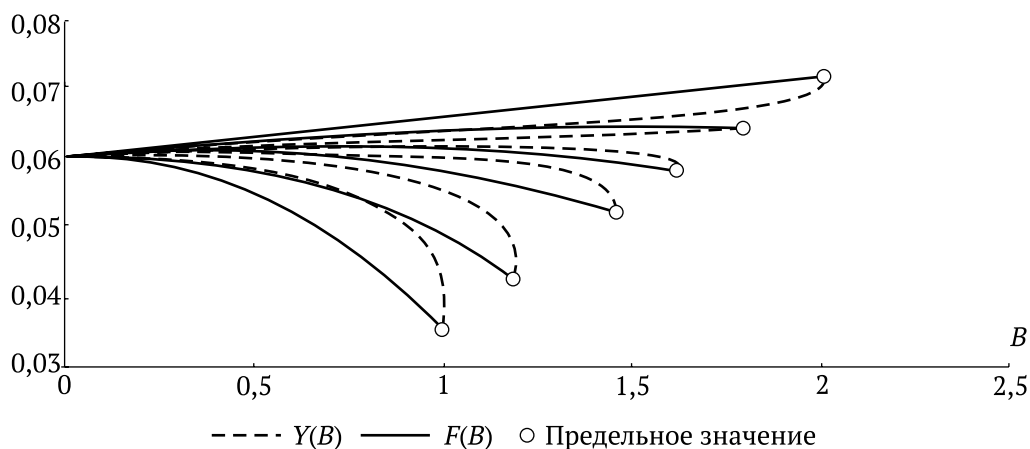


Рис. 6.7. Кривые доходностей $Y(B)$ и форвардные кривые $F(B)$ для однофакторной модели Даффи – Кана при различных значениях дисперсии D краткосрочной ставки: $D = 0$ (верхняя пара кривых); $0,25; 0,375; 0,5; 0,75; 1,0$ (нижняя пара кривых). Другие параметры: $k = 0,5; \theta = 0,0721; r = 0,06; x = 0; \lambda = 0,01$. Круглые маркеры показывают предельные значения кривых при $B \rightarrow B(\infty)$, т. е. при $\tau \rightarrow +\infty$ (для разных D они различные)

Когда в качестве второй переменной состояния выбрана мгновенная дисперсия краткосрочной процентной ставки, уравнения двухфакторной модели переменных состояния имеют вид

$$\begin{aligned} dr(t) &= k_r(\theta - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)}dW_r(t), \\ dD(t) &= k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - x}{V - x}}dW_D(t), \quad D(0) > x \geq 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Здесь x – нижняя граница для дисперсии D процентной ставки r ; V – стационарное среднее процесса дисперсии $D(t)$, а S – стационарная дисперсия процесса дисперсии $D(t)$. Для удобства записи в дальнейшем изложении удобно ввести обозначение $\delta = k_D S / (V - x)$.

Однако в этом случае значение кривых $y(\tau, r, D)$ и $f(\tau, r, D)$ в исходной точке, с экономической точки зрения, безусловно, положительное, определяется равенством

$$y(0, r, D) = f(0, r, D) = r\phi_r + D\phi_D,$$

где ϕ_D , как указано выше, из экономических соображений должно быть отрицательным. Поэтому, для того чтобы описанная модель с фиксированными весовыми коэффициентами $\{\phi_r, \phi_D\}$ имела экономический смысл, должно выполняться неравенство $r\phi_r + D\phi_D > 0$, т. е. $D \equiv D(0) < r\phi_r / |\phi_D|$. Вместе с тем процесс $D(t)$, как это следует из уравнения (6.19), является стационарным диффузионным процессом «с квадратным корнем» и имеет сдвинутое распределение гамма с параметром масштаба $S/(V - x)$, параметром формы $(V - x)^2/S$ и параметром сдвига x . Поэтому с положительной веро-

ятностью указанное неравенство в описанной модели будет нарушаться. Для того чтобы эта модель имела экономический смысл с вероятностью единица, необходимо установить следующие весовые коэффициенты модели $\{\phi_r=1, \phi_D=0\}$. В этом случае краткосрочная ставка доходности в исходной точке определяется только процентной ставкой r : $y(r, D) = r\phi_r + D\phi_D = r$.

Уравнения для функций временной структуры $A(\tau)$, $B_r(\tau)$ и $B_D(\tau)$ в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} A'(\tau) &= -k_r\theta B_r(\tau) - (k_D V + 2\lambda_D x\delta)B_D(\tau) - \delta x B_D(\tau)^2, \\ B_r'(\tau) &= 1 - k_r B_r(\tau), B_r(0) = 0, B_r(\tau) = (1 - e^{-k_r \tau})/k_r, \\ B_D'(\tau) &= - (k_D + 2\lambda_D \delta)B_D(\tau) - 2\lambda_r k_r B_r(\tau) - k_r B_r(\tau)^2 - \delta B_D(\tau)^2, B_D(0) = 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Функция $A(\tau)$ по-прежнему находится через $B_r(\tau)$ и $B_D(\tau)$. Функция $B_r(\tau)$ легко находится в простом виде, но функция $B_D(\tau)$, к сожалению, определяется уравнением Риккати с переменным коэффициентом и не может быть выражена в аналитическом виде. При $\tau \rightarrow +\infty$ функции $B_r(\tau)$ и $B_D(\tau)$ стремятся к пределам

$$B_r(\infty) = \frac{1}{k_r}, \quad B_D(\infty) = \frac{-(k_D + 2\lambda_D \delta) + \sqrt{(k_D + 2\lambda_D \delta)^2 - 4\delta(2\lambda_r + 1/k_r)}}{2\delta}.$$

Заметим, что предельное значение $B_D(\infty)$ принимает вещественные значения только в случае, когда параметры модели удовлетворяют неравенству

$$(k_D + 2\lambda_D \delta)^2 \geq 4\delta(2\lambda_r + 1/k_r). \quad (6.21)$$

Если это неравенство не удовлетворяется, правая часть дифференциального уравнения (6.20) для функции $B_D(\tau)$ ни для каких τ не обращается в нуль, являясь все время отрицательной. Это приводит к тому, что функция $B_D(\tau)$ неограниченно убывает с ростом τ , в связи с чем при достаточно больших τ кривые доходности и форвардные кривые становятся отрицательными, что противоречит экономическому смыслу этих кривых. Таким образом, неравенство (6.21) определяет область возможных значений параметра $\delta = k_D S/(V - x)$, определяющего волатильность в уравнении (6.19), когда имеет смысл использовать рассматриваемую двухфакторную модель динамики процентной ставки. В явной форме это ограничение имеет вид

$$\delta \leq \frac{2\lambda_r + 1/k_r - k_D \lambda_D - \sqrt{(2\lambda_r + 1/k_r)^2 - 2(2\lambda_r + 1/k_r)k_D \lambda_D}}{2\lambda_D^2}. \quad (6.22)$$

Кривые доходности $y(\tau, r, D)$ и форвардные кривые $f(\tau, r, D)$ определяются через функции $A(\tau)$, $B_r(\tau)$ и $B_D(\tau)$ по формулам

$$\begin{aligned} y(\tau, r, D) &\equiv Y(B_r(\tau), B_D(\tau)) = k_r[A(\tau) - rB_r(\tau) - DB_D(\tau)]/\ln[1 - k_r B_r(\tau)], \\ f(\tau, r, D) &\equiv F(B_r(\tau), B_D(\tau)) = r - (r - \theta + 2\lambda_r D)k_r B_r(\tau) - \\ &- [(k_D(D - V) + 2\lambda_D \delta(D - x))B_D(\tau) - k_r DB_r(\tau)^2 - \delta(D - x)B_D(\tau)^2]. \end{aligned}$$

Предельные свойства этих кривых такие:

при $\tau \rightarrow 0$ обе кривые стремятся к одинаковому пределу

$$y(0, r, D) = f(0, r, D) = r;$$

при $\tau \rightarrow +\infty$ обе кривые также стремятся к общему пределу

$$y(\infty, r, D) = f(\infty, r, D) = \theta + k_D(V - x)B_D(\infty) - x(2\lambda_r + 1/k_r).$$

Для того чтобы предельные доходности были положительными, должно выполняться неравенство

$$\theta - x(2\lambda_r + 1/k_r) > -k_D(V - x)B_D(\infty)$$

или

$$\frac{\theta - x(2\lambda_r + 1/k_r)}{2k_D(2\lambda_r + 1/k_r)} > \frac{V - x}{(k_D + 2\lambda_D\delta) + \sqrt{(k_D + 2\lambda_D\delta)^2 - 4\delta(2\lambda_r + 1/k_r)}}. \quad (6.23)$$

Это неравенство следует рассматривать как условие, накладываемое на другие параметры уравнения (6.19), чтобы обеспечить разумные результаты для долгосрочных доходностей. В этом случае в качестве варьируемого параметра модели можно выбрать стационарное среднее V процесса $D(t)$. Когда при описании динамики процентной ставки используется нейтральная к риску вероятностная мера ($\lambda_r = 0, \lambda_D = 0$), неравенства (6.22) и (6.23) существенно упрощаются:

$$\delta \leq \frac{k_D^2 k_r}{4}, \quad V < x + (k_r \theta - x) \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\delta}{k_r k_D^2}} \right).$$

На рис. 6.8 приведены графики функций $Y(B_r(\tau), B_D(\tau))$ и $F(B_r(\tau), B_D(\tau))$ от аргумента $B = B_r(\tau)$ с учетом того, что

$$\tau = -\ln[1 - k_r B]/k_r, \quad B_D(\tau) = B_D(-\ln[1 - k_r B]/k_r).$$

Когда весовые коэффициенты модели установлены так, что $\phi_r = 1, \phi_D = 0$, краткосрочная ставка доходности в исходной точке $y(r, D) = r\phi_r + D\phi_D = r$ определяется только процентной ставкой r , а модель становится похожей на однофакторную. Но отличия от однофакторной модели при этом сохраняются, так как даже при $\phi_D = 0$ функция временной структуры $B_D(\tau)$ не равна нулю. На рис. 6.9 это различие иллюстрируется графиками.

Выполнение неравенств (6.22) и (6.23) гарантирует, что параметры модели таковы, что предельные значения кривых доходности и форвардных кривых существуют и неотрицательны. Однако на вид этих кривых существенное влияние оказывают и исходные значения переменных состояния $r = r(t)$ и $D = D(t)$ в дату определения временной структуры. При этом возможны такие значения D , которые приводят к отрицательным значениям доходностей для некоторых τ , что противоречит экономическому смыслу. На рис. 6.10 этот случай иллюстрируется графиками. Для того чтобы этого

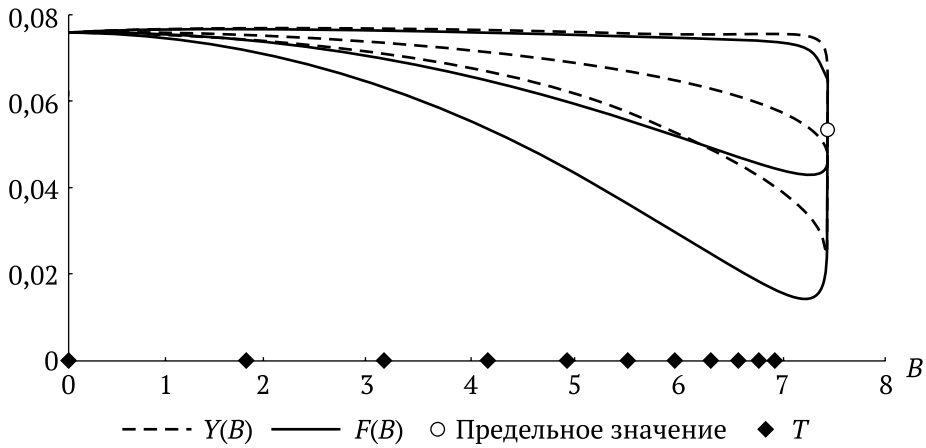


Рис. 6.8. Кривые доходностей $Y(B)$ и форвардные кривые $F(B)$ для различных значений дисперсий D : 0,01 (нижняя пара кривых); 0,005; 0 (верхняя пара кривых). Круглый маркер показывает предельное значение, одинаковое всех кривых. T – метки реального времени через каждые 2 года для первых 20 лет. Другие параметры:
 $k_r = 0,1347$; $k_D = 0,01347$; $r = \theta = 0,0762$; $V = 0,002892$; $x = 0,0001$;
 $S = 1,88 \cdot 10^{-7}$; $\lambda_r = 0,1$; $\lambda_D = 0,01$; $B_{\max} = B_r(\infty) = 7,424$

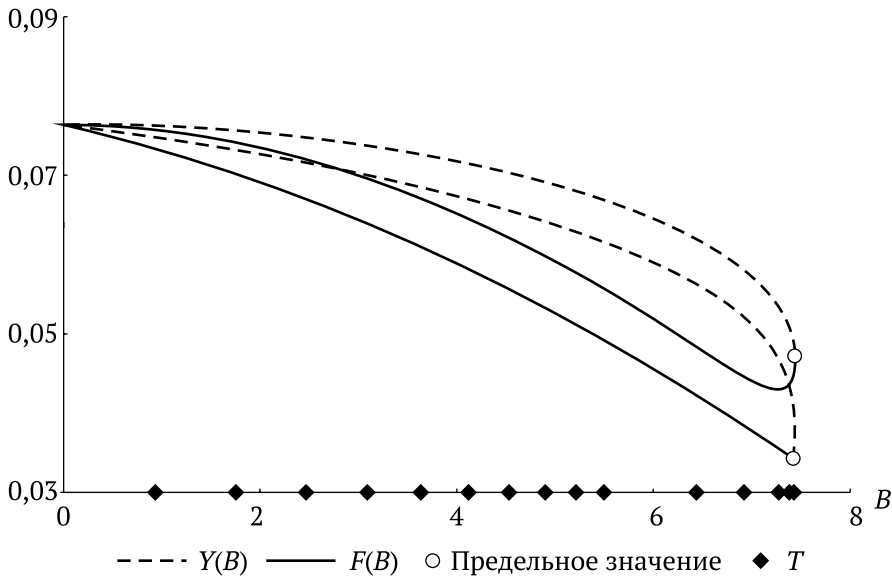


Рис. 6.9. Кривые доходностей $Y(B)$ и форвардные кривые $F(B)$ для двухфакторной модели (верхняя пара кривых) при $\{\phi_r=1, \phi_D=0\}$ и однофакторной модели (нижняя пара кривых). Круглый маркер показывает предельные значения (0,0475 для двухфакторной и 0,0343 для однофакторной моделей). T – метки реального времени через каждый год до 10 лет и далее через 5 лет. Процентная ставка $r = \theta = 0,0762$; $B_{\max} = B_r(\infty) = 7,4$. Другие параметры принимали те же значения, что и для рис. 6.6

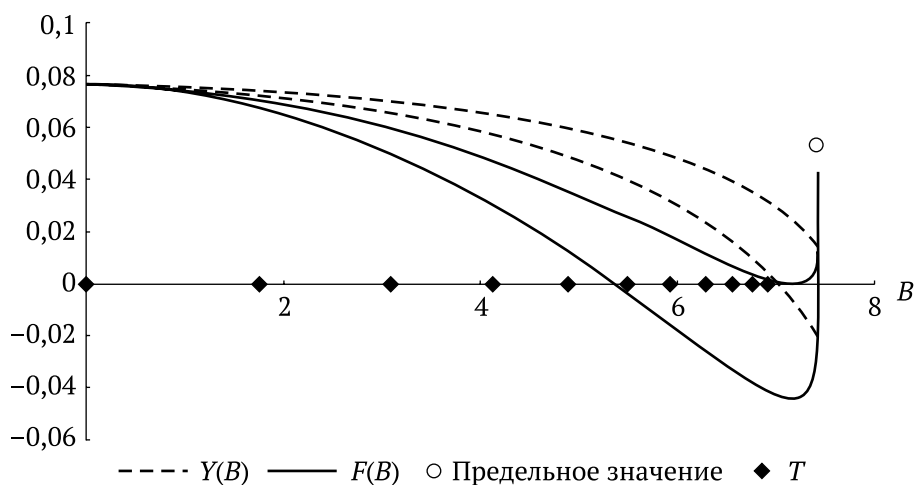


Рис. 6.10. Кривые доходностей $Y(B)$ и форвардные кривые $F(B)$ для значений дисперсий D : 0,02 (нижняя пара кривых); 0,01246 (верхняя пара кривых). Круглый маркер показывает предельное значение, одинаковое всех кривых. T – метки реального времени через каждые 2 года для первых 20 лет. Другие параметры принимали те же значения, что и для рис. 6.8

не случилось, исходная дисперсия D процентной ставки должна быть достаточно мала. Например, при параметрах модели, для которых рассчитывались кривые рис. 6.10, доходности неотрицательны, если исходная дисперсия D удовлетворяет неравенству $D < 0,01246$. С другой стороны, процесс $D(t)$, порождаемый уравнением (6.19), имеет распределение гамма и с положительной вероятностью может принимать значения, превышающие любое конечное число. Для принятых значений параметров рассматриваемой двухфакторной модели выборочные значения процесса $D(t)$ имеют распределение гамма с параметром формы $(V - x)^2/S = 41,42$; параметром масштаба $S/(V - x) = 0,0000674$ и параметром сдвига $x = 0,0001$. Это означает, что с вероятностью 0,999987 выборочное значение процесса $D(t)$ не превышает величину 0,005. Так что вероятность нарушения неравенства $D < 0,01246$ практически нулевая.

ВЫВОДЫ

Однофакторная модель Даффи – Кана была расширена на двухфакторный случай дополнением второй переменной состояния. В качестве версий дополнительных переменных рассматривались локальный (по времени) средний уровень процентной ставки или ее мгновенная дисперсия. Получающиеся двухфакторные модели сформулированы так, чтобы обеспечить аффинную временную структуру доходности. Основное внимание уделяется свойствам кривой доходности и форвардной кривой, когда динамика

краткосрочной процентной ставки описывается двухфакторными моделями Даффи – Кана. Поскольку функции временной структуры для дополнительных переменных в аналитическом виде не могут быть получены, вид кривых в целом (для всего интервала изменения времени) анализируется с помощью численных расчетов, хотя свойства кривых на концах интервала выясняются аналитически. Для модели «ставка – ее локальное среднее» оказалось, что предельные свойства долгосрочных доходностей определяются только свойствами дополнительной переменной – локальным средним θ процентной ставки r . Для модели «ставка – ее мгновенная дисперсия» выяснилось, что эта модель имеет экономический смысл только тогда, когда весовой коэффициент ϕ_D мгновенной дисперсии при определении краткосрочной ставки доходности равен нулю. Кроме того, существуют ограничения для значений параметров модели, выполнение которых необходимо, чтобы модель имела экономический смысл.

Показано также, что при некоторых исходных значениях дисперсии процентной ставки доходности могут становиться отрицательными, что также противоречит экономическому смыслу. Однако для реальных процессов динамики процентных ставок вероятность получения отрицательных доходностей в рамках рассмотренных моделей может оказаться незначительной.

Сравнение кривых доходности и форвардных кривых для однофакторной модели и двухфакторных моделей показывает, что при принятых параметрах эти кривые заметно различаются. Поскольку значения весовых коэффициентов $\{\phi\}$ существенно влияют на поведение кривых доходности и форвардных кривых, они должны оцениваться наряду с рыночными параметрами цены риска $\{\lambda\}$.

Глава 7

ТРЕХФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ

Отправным пунктом нашего анализа является однофакторная модель Даффи – Кана из главы 5:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kD \frac{r(t) - x}{\theta - x}} dW(t), \quad r(0) > x,$$

в которой параметры θ и D будут предполагаться диффузионными процессами $\theta(t)$ и $D(t)$.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЬ ПРОЦЕССА $\theta(t)$

В этом случае уровень θ , к которому возвращается процентная ставка $r(t)$ (в однофакторной модели он совпадает с ее стационарным средним), рассматривается как стохастический процесс диффузионного типа $\theta(t)$, подобный процессу краткосрочной ставки одномерной модели $r(t)$, но с фиксированным уровнем возвращения θ_0 и волатильностью, зависящей только от стохастической дисперсии $D(t)$. Процентная ставка $r(t)$ имеет волатильность, также пропорциональную $D(t)$. Поскольку процессы $r(t)$ и $\theta(t)$ в этом случае не являются процессами «с квадратным корнем», то их нижняя граница не определяется (или, что эквивалентно, нижняя граница этих процессов удаляется в минус бесконечность):

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t), \quad (7.4)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sigma\sqrt{2k_\theta D(t)} dW_\theta(t),$$

$$dD(t) = k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - x}{V - x}} dW_D(t), \quad D(0) > x \geq 0. \quad (7.5)$$

Здесь x – нижняя граница для процесса дисперсии $D(t)$ процентной ставки; V – стационарное среднее процесса дисперсии $D(t)$, а S – стационарная дисперсия процесса дисперсии $D(t)$. Для удобства записи в дальнейшем изложении удобно ввести обозначение $\delta = k_D S / (V - x)$.

Уравнения (7.1) и (7.2) в этом случае приобретают вид

$$A'(\tau) = -k_\theta \theta_0 B_\theta(\tau) - (k_D V + 2\lambda_D x \delta) B_D(\tau) - \delta x B_D(\tau)^2, A(0) = 0,$$

$$B_r'(\tau) = \phi_r - k_r B_r(\tau), B_r(0) = 0,$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta + k_r B_r(\tau) - k_\theta B_\theta(\tau), B_\theta(0) = 0,$$

$$B_D'(\tau) = - (k_D + 2\lambda_D \delta) B_D(\tau) - 2\lambda_r k_r B_r(\tau) - 2\sigma \lambda_\theta k_\theta B_\theta(\tau) - k_r B_r(\tau)^2 - \sigma k_\theta B_\theta(\tau)^2 - \delta B_D(\tau)^2, B_D(0) = 0.$$

Заметим, что функция $A(\tau)$ не зависит от функции $B_r(\tau)$ и определяется интегрированием, если функции $B_\theta(\tau)$ и $B_D(\tau)$ будут найдены. Второе и третье уравнения для $B_r(\tau)$ и $B_\theta(\tau)$ легко решаются.

$$B_r(\tau) = \phi_r (1 - e^{-k_r \tau}) / k_r; B_r(\tau) \rightarrow \phi_r / k_r \text{ при } \tau \rightarrow \infty.$$

$$B_\theta(\tau) = \frac{1}{k_\theta} + \frac{\phi_r}{k_r - k_\theta} e^{-k_r \tau} + \frac{k_r - \phi_\theta k_\theta}{k_\theta (k_\theta - k_r)} e^{-k_\theta \tau}; B_\theta(\tau) \rightarrow 1/k_\theta \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (7.6)$$

При получении этих решений было учтено, что из экономических соображений весовой коэффициент ϕ_D должен быть равен нулю, $\phi_D = 0$, а $\phi_r + \phi_\theta = 1$. Что касается уравнения для $B_D(\tau)$, то оно является уравнением Риккати с переменным свободным коэффициентом, что не позволяет выразить его решение в аналитическом виде, и его приходится решать численно. Однако предельное значение функции $B_D(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ может быть выражено аналитически в виде

$$B_D(\infty) = \frac{-(k_D + 2\lambda_D \delta) + \sqrt{(k_D + 2\lambda_D \delta)^2 - 4\delta(2\lambda_r \phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma \lambda_\theta + \sigma/k_\theta)}}{2\delta}.$$

Заметим, что этот предел будет существовать только в том случае, если параметры модели удовлетворяют неравенству

$$(k_D + 2\lambda_D \delta)^2 \geq 4\delta(2\lambda_r \phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma \lambda_\theta + \sigma/k_\theta). \quad (7.7)$$

Если это неравенство не выполняется, функция $B_D(\tau)$ будет неограниченно убывать, что приведет к попаданию доходности в отрицательную область при некотором конечном τ . Фактически неравенство (7.7) определяет область значений параметра δ , определяющего волатильность процесса $D(t)$ в уравнении (7.5), при которых существует предельное значение $B_D(\infty)$.

Кривые доходности $y(\tau, r, \theta, D)$ и форвардные кривые $f(\tau, r, \theta, D)$ определяются через функции $A(\tau)$, $B_r(\tau)$, $B_\theta(\tau)$ и $B_D(\tau)$ по формулам

$$\begin{aligned} y(\tau, r, \theta, D) &\equiv Y(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) = \\ &= k_r [A(\tau) - r B_r(\tau) - \theta B_\theta(\tau) - D B_D(\tau)] / \ln [1 - k_r B_r(\tau) / \phi_r], \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned}
f(\tau, r, \theta, D) &\equiv F(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) = \\
&= r\phi_r + \theta\phi_\theta - (r - \theta + 2\lambda_r D)k_r B_r(\tau) - (\theta - \theta_0 + 2\sigma\lambda_\theta D)k_\theta B_\theta(\tau) - \\
&\quad - [(k_D(D - V) + 2\lambda_D \delta(D - x)]B_D(\tau) - k_r D B_r(\tau)^2 - \\
&\quad - \sigma k_\theta D B_\theta(\tau)^2 - \delta(D - x)B_D(\tau)^2.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Предельные свойства этих кривых такие:

при $\tau \rightarrow 0$ обе кривые стремятся к одинаковому пределу

$$y(0, r, \theta, D) = f(0, r, \theta, D) = r\phi_r + \theta\phi_\theta,$$

при $\tau \rightarrow +\infty$ обе кривые также стремятся к общему пределу

$$\begin{aligned}
y(\infty, r, \theta, D) &= f(\infty, r, \theta, D) = \\
&= \theta_0 + k_D(V - x)B_D(\infty) - x(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta).
\end{aligned}$$

Для того чтобы предельные значения кривых при $\tau \rightarrow +\infty$ были положительными, должно выполняться неравенство

$$\theta_0 - x(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta) > -k_D(V - x)B_D(\infty)$$

или

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta_0 - x(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta)}{2k_D(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta)} > \\
&> \frac{V - x}{(k_D + 2\lambda_D\delta) + \sqrt{(k_D + 2\lambda_D\delta)^2 - 4\delta(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta)}}. \tag{7.10}
\end{aligned}$$

Это неравенство также следует рассматривать как условие, накладываемое на параметры уравнения (7.5), чтобы обеспечить разумные результаты для долгосрочных доходностей. В этом случае в качестве варьируемого параметра модели можно выбрать стационарное среднее V процесса $D(t)$. Когда при описании динамики процентной ставки используется нейтральная к риску вероятностная мера ($\lambda_r = 0, \lambda_\theta = 0, \lambda_D = 0$), неравенства (7.7) и (7.10) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned}
\delta &\equiv \frac{k_D S}{V - x} \leq \frac{1}{4} \frac{k_D^2}{\phi_r^2/k_r + \sigma/k_\theta}, \\
V &< x + \left(\frac{\theta_0}{\phi_r^2/k_r + \sigma/k_\theta} - x \right) \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\delta}{k_D^2} \left(\frac{\phi_r^2}{k_r} + \frac{\sigma}{k_\theta} \right)} \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что при определении области пространства параметров $\{S, V\}$, обеспечивающих существование положительных предельных значений доходностей, участвуют все параметры модели.

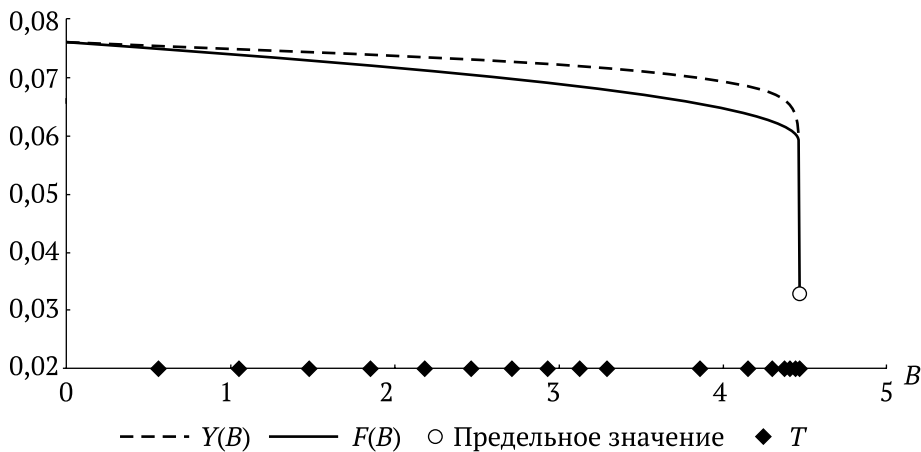


Рис. 7.1. Кривые доходностей $Y(B)$ и форвардные кривые $F(B)$ в случае, когда параметры принимали следующие значения:
 $k_r = 0,1347$; $k_\theta = 0,01347$; $k_D = 0,1$; $\theta_0 = 0,0762$; $V = 0,002892$; $\sigma = 0,1$;
 $x = x_D = 0,0001$; $S = 6 \cdot 10^{-6}$; $\lambda_r = 0,1$; $\lambda_\theta = 0,1$; $\lambda_D = 0,1$; $\phi_r = 0,6$; $\phi_\theta = 0,4$; $r = 0,08$;
 $\theta = 0,07$; $D = 0,0028$; $B_{\max} = B_r(\infty) = 4,454$. T – метки реального времени
 через каждый год для первых 10 лет, а далее – через 5 лет

На рис. 7.1 представлены графики функций $Y(B_r)$ и $f(B_r)$, вычисленные по формулам (7.8) и (7.9), характеризующие доходности трехфакторной модели (7.4) и (7.5) с ключевыми параметрами, соответствующими найденным Д. Аном и Б. Гао (Ahn, Gao, 1999), приспособивавшим модель Даффи – Кана для описания динамики процесса годовой ставки доходности одномесечных бумаг Казначейства США для периода наблюдения с января 1960 г. по февраль 1991 г.

ПРОЦЕСС $\theta(t)$ С КВАДРАТНЫМ КОРНЕМ

В этом случае уровень θ , к которому возвращается процентная ставка $r(t)$, рассматривается как стохастический процесс $\theta(t)$ диффузионного типа, подобный процессу краткосрочной ставки одномерной модели $r(t)$, с фиксированным уровнем возвращения θ_0 и волатильностью, пропорциональной квадратному корню из $\theta(t) - x_\theta$, где x_θ – нижняя граница уровня возвращения. Оба других уравнения системы (7.4) остаются прежними. Определенная таким образом трехфакторная модель по своей структуре близка к модели Чена (Chen, 1996) в интерпретации Дэй и Синглтона (Dai, Singleton, 2000)

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)}dW_r(t), \quad (7.11)$$

$$d\theta(t) = k_r(\theta_0 - \theta(t))dt + \sigma \sqrt{2k_\theta \frac{\theta(t) - x_\theta}{\theta_0 - x_\theta}}dW_\theta(t), \quad \theta(0) > x_\theta \geq 0, \quad (7.12)$$

$$dD(t) = k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_DS \frac{D(t) - x_D}{V - x_D}} dW_D(t), \quad D(0) > x_D \geq 0. \quad (7.13)$$

Заметим, что в этой модели процессы $\theta(t)$ и $D(t)$ являются независимыми диффузионными процессами «с квадратным корнем». Свойства таких процессов подробно исследованы в литературе. Для того чтобы нижние границы x_θ и x_D процессов $\theta(t)$ и $D(t)$ были недостижимыми, т. е. чтобы эти процессы не принимали отрицательных значений, необходимо выполнение условий Феллера $(\theta_0 - x_\theta)^2 > \sigma^2$ и $(V - x_D)^2 > S$.

Уравнения для функций временной структуры $A(\tau)$, $B_r(\tau)$, $B_\theta(\tau)$ и $B_D(\tau)$ в этом случае составляют систему

$$A'(\tau) = -(k_\theta\theta_0 + 2\lambda_\theta\gamma x_\theta)B_\theta(\tau) - (k_D V + 2\lambda_D\delta x_D)B_D(\tau) - \delta x_D B_D(\tau)^2 - \gamma x_\theta B_\theta(\tau)^2, \quad A(0) = 0,$$

$$B_r'(\tau) = \phi_r - k_r B_r(\tau), \quad B_r(0) = 0,$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta + k_r B_r(\tau) - (k_\theta + 2\lambda_\theta\gamma)B_\theta(\tau) - \gamma B_\theta(\tau)^2, \quad B_\theta(0) = 0,$$

$$B_D'(\tau) = -(k_D + 2\lambda_D\delta)B_D(\tau) - 2\lambda_r k_r B_r(\tau) - k_r B_r(\tau)^2 - \delta B_D(\tau)^2, \quad B_D(0) = 0,$$

где для краткости обозначено $\delta = k_D S / (V - x_D)$, $\gamma = k_\theta \sigma^2 / (\theta_0 - x_\theta)$.

Решение уравнения для функции $B_r(\tau)$ найти легко:

$$B_r(\tau) = \phi_r(1 - e^{-k_r\tau})/k_r; \quad B_r(\tau) \rightarrow \phi_r/k_r \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty.$$

Функции $A(\tau)$, $B_\theta(\tau)$ и $B_D(\tau)$ могут быть определены только численно. Заметим, что функция $A(\tau)$ не зависит от $B_r(\tau)$. Предельные значения функций $B_\theta(\tau)$ и $B_D(\tau)$ определяются выражениями

$$B_\theta(\infty) = \frac{2}{\sqrt{(k_\theta + 2\gamma\lambda_\theta)^2 + 4\gamma + (k_\theta + 2\gamma\lambda_\theta)}},$$

$$B_D(\infty) = -\frac{2(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r)}{\sqrt{(k_D + 2\delta\lambda_D)^2 - 4\delta(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r) + (k_D + 2\delta\lambda_D)}}. \quad (7.14)$$

Для того чтобы предельное значение $B_D(\infty)$ существовало, необходимо, чтобы параметры модели удовлетворяли неравенству

$$(k_D + 2\lambda_D\delta)^2 \geq 4\delta(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r). \quad (7.15)$$

Кривые доходности $y(\tau, r, \theta, D)$ и форвардные кривые $f(\tau, r, \theta, D)$ определяются через функции $A(\tau)$, $B_r(\tau)$, $B_\theta(\tau)$ и $B_D(\tau)$ по формулам

$$y(\tau, r, \theta, D) \equiv Y(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) =$$

$$= k_r[A(\tau) - rB_r(\tau) - \theta B_\theta(\tau) - DB_D(\tau)]/\ln[1 - k_r B_r(\tau)/\phi_r], \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned}
f(\tau, r, \theta, D) &\equiv F(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) = \\
&= r\phi_r + \theta\phi_\theta - (r - \theta + 2\lambda_r D)k_r B_r(\tau) - [k_\theta(\theta - \theta_0) + \\
&+ 2\gamma\lambda_\theta(\theta - x_\theta)]B_\theta(\tau) - [(k_D(D - V) + 2\lambda_D\delta(D - x_D)]B_D(\tau) - \\
&- k_r D B_r(\tau)^2 - \gamma(\theta - x_\theta)B_\theta(\tau)^2 - \delta(D - x_D)B_D(\tau)^2.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Предельные свойства этих кривых такие:

при $\tau \rightarrow 0$ обе кривые стремятся к одинаковому пределу

$$y(0, r, \theta, D) = f(0, r, \theta, D) = r\phi_r + \theta\phi_\theta,$$

при $\tau \rightarrow +\infty$ обе кривые также стремятся к общему пределу

$$\begin{aligned}
y(\infty, r, \theta, D) &= f(\infty, r, \theta, D) = k_\theta(\theta_0 - x_\theta)B_\theta(\infty) + \\
&+ k_D(V - x)B_D(\infty) + x_\theta - x_D(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r).
\end{aligned}$$

Для того чтобы этот предел был положительным, необходимо выполнение неравенства

$$k_\theta(\theta_0 - x_\theta)B_\theta(\infty) + x_\theta - x_D(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r) > -k_D(V - x)B_D(\infty). \tag{7.18}$$

Неравенства (7.15) и (7.18) определяют область значений параметров $\{S, V\}$ уравнения (7.13), гарантирующих существование и положительность предельных значений доходностей при $\tau \rightarrow +\infty$. К сожалению, запись этих неравенств в явной форме довольно громоздка, поэтому приведем явную форму только для случая, когда при описании динамики

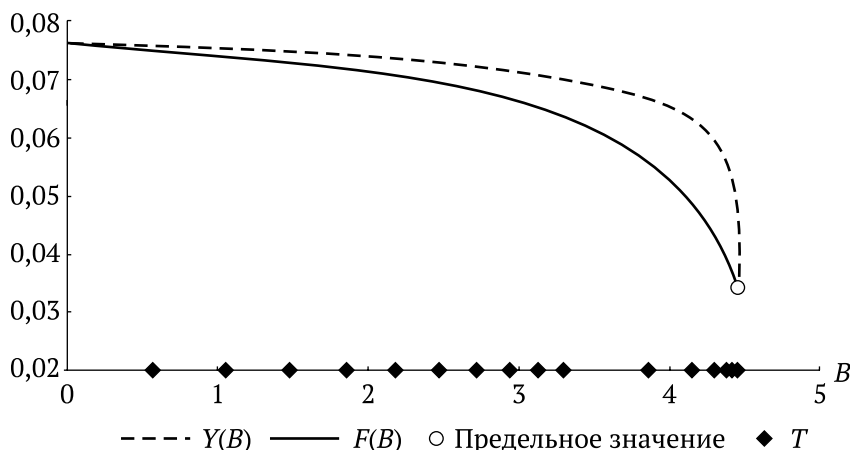


Рис. 7.2. Кривые доходностей $Y(B)$ и форвардные кривые $F(B)$ в случае, когда параметры принимали те же значения, что и на рис. 7.1, и дополнительно $x_\theta = 0,033$.
 T – метки реального времени через каждый год для первых 10 лет, а далее – через 5 лет

процентной ставки используется нейтральная к риску вероятностная мера ($\lambda_r = 0, \lambda_\theta = 0, \lambda_D = 0$)

$$\delta \equiv \frac{k_D S}{V - x_D} \leq \frac{k_r k_D^2}{4\phi_r^2};$$

$$V < x_D + \left(x_\theta + \frac{2k_\theta(\theta_0 - x_\theta)}{k_\theta + \sqrt{k_\theta^2 + 4\gamma}} - x_D \frac{\phi_r^2}{k_r} \right) \left(\frac{k_r(k_D + \sqrt{k_D^2 - 4\delta\phi_r^2/k_r})}{2k_D\phi_r^2} \right).$$

На рис. 7.2 представлены графики функций $Y(B_r)$ и $f(B_r)$, вычисленные по формулам (7.16) и (7.17), характеризующие доходности трехфакторной модели (7.11)–(7.13) с ключевыми параметрами, соответствующими найденным Д. Аном и Б. Гао (Ahn, Gao, 1999).

ГАУССОВСКИЙ ПРОЦЕСС $\theta(t)$

Такая модель близка к модели BDFS (Balduzzi, Das, Foresi, Sundaram, 1996), где уровень θ , к которому возвращается процентная ставка $r(t)$, рассматривается как стохастический процесс $\theta(t)$ диффузионного типа, подобный процессу краткосрочной ставки одномерной модели $r(t)$, с фиксированным уровнем возвращения θ_0 и фиксированной волатильностью. Оба другие уравнения системы (7.4) остаются прежними.

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)}dW_r(t), \quad (7.19)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta \sigma^2}dW_\theta(t), \quad (7.20)$$

$$dD(t) = k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - x_D}{V - x_D}}dW_D(t), \quad D(0) > x_D \geq 0. \quad (7.21)$$

Модель (7.19)–(7.21) фактически является частным случаем модели (7.11)–(7.13), когда нижняя граница процесса $\theta(t)$ удаляется на $-\infty$, $x_\theta \rightarrow -\infty$. При этом $\gamma \rightarrow 0$, $\gamma x_\theta \rightarrow -k_\theta \sigma^2$. Если учесть эти изменения, то получается следующая система уравнений для функций временной структуры $A(\tau)$, $B_r(\tau)$, $B_\theta(\tau)$ и $B_D(\tau)$:

$$A'(\tau) = -k_\theta(\theta_0 - 2\lambda_\theta \sigma^2)B_\theta(\tau) - (k_D V + 2\lambda_D \delta x_D)B_D(\tau) - \delta x_D B_D(\tau)^2 + k_\theta \sigma^2 B_\theta(\tau)^2, \quad A(0) = 0, \quad (7.22)$$

$$B_r'(\tau) = \phi_r - k_r B_r(\tau), \quad B_r(0) = 0,$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta + k_r B_r(\tau) - k_\theta B_\theta(\tau), \quad B_\theta(0) = 0,$$

$$B_D'(\tau) = -(k_D + 2\lambda_D \delta)B_D(\tau) - 2\lambda_r k_r B_r(\tau) - k_r B_r(\tau)^2 - \delta B_D(\tau)^2, \quad B_D(0) = 0.$$

Второе и третье уравнения решаются аналитически, как это показано выше; их решения представляются формулами (7.6). Предельное значение решения третьего уравнения при $\tau \rightarrow +\infty$ существует, если выполняется неравенство (7.15). Особенность этой модели состоит в том, что процесс $\theta(t)$ является гауссовским и порождается уравнением, совпадающим с тем, которое известно как модель Васичека, поэтому все особенности этой модели проявляются здесь. В частности, последнее слагаемое в правой части уравнения (7.22) для $A(\tau)$ оказывается положительным и возрастающим с увеличением τ , так что при $\tau \rightarrow +\infty$ производная $A'(\tau)$ может стать тоже положительной, но поскольку предельные доходности определяются именно производной функции $A(\tau)$, так как

$$y(\infty, r, \theta, D) = f(\infty, r, \theta, D) = -A'(\infty),$$

они могут стать отрицательными, что будет противоречить экономическому смыслу доходности. Отсюда возникает еще одно ограничение на волатильность процесса $\theta(t)$ для этой модели:

$$\sigma^2 < k_0[\theta_0 + (k_D V + 2\lambda_D \delta x_D)B_D(\infty) + \delta x_D B_D(\infty)^2]/(1 + 2k_0 \lambda_\theta).$$

Кривые доходности $y(\tau, r, \theta, D)$ и форвардные кривые $f(\tau, r, \theta, D)$ определяются через функции $A(\tau)$, $B_r(\tau)$, $B_\theta(\tau)$ и $B_D(\tau)$ по формулам

$$y(\tau, r, \theta, D) \equiv Y(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) = k_r[A(\tau) - rB_r(\tau) - \theta B_\theta(\tau) - DB_D(\tau)]/\ln[1 - k_r B_r(\tau)/\phi_r], \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} f(\tau, r, \theta, D) \equiv F(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) = & r\phi_r + \theta\phi_\theta - \\ & - k_r(r - \theta + 2\lambda_r D)B_r(\tau) - k_\theta(\theta - \theta_0 + 2\lambda_\theta \sigma^2)B_\theta(\tau) - \\ & - [(k_D(D - V) + 2\lambda_D \delta(D - x_D))B_D(\tau) - k_r DB_r(\tau)^2 - \\ & - k_\theta \sigma^2 B_\theta(\tau)^2 - \delta(D - x_D)B_D(\tau)^2]. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Предельные свойства этих кривых такие:

при $\tau \rightarrow 0$ обе кривые стремятся к одинаковому пределу

$$y(0, r, \theta, D) = f(0, r, \theta, D) = r\phi_r + \theta\phi_\theta,$$

при $\tau \rightarrow +\infty$ обе кривые также стремятся к общему пределу

$$y(\infty, r, \theta, D) = f(\infty, r, \theta, D) = \theta_0 + k_D(V - x_D)B_D(\infty) - x_D\phi_r(\phi_r + 2k_r\lambda_r)/k_r.$$

Здесь величина $B_D(\infty)$ вычисляется по формуле (7.14). Поскольку $B_D(\infty)$ – величина отрицательная, для достижения положительной доходности необходимо также, чтобы выполнялось следующее неравенство, ограничивающее сверху стационарную дисперсию V процесса $D(t)$:

$$k_D(V - x_D) | B_D(\infty) | < \theta_0 - x_D\phi_r(\phi_r + 2k_r\lambda_r)/k_r.$$

Выполнение перечисленных условий обеспечивает существование положительных предельных значений кривых $y(\tau)$ и $f(\tau)$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Вместе с тем значения параметров модели будут обеспечивать ее работоспособность в полной мере, если будут выполняться также неравенства $y(\tau) > 0$ и $f(\tau) > 0$ для любых $\tau > 0$. К сожалению, записать эти неравенства в явной форме не удастся, так как аналитический вид функции $B_D(\tau)$ не определяется. Однако можно сказать, что для выполнения неравенств $y(\tau) > 0$ и $f(\tau) > 0$ для любых $\tau > 0$ нужно ограничить сверху волатильность процесса $D(t)$, иначе говоря, установить верхнюю границу для параметра S , что удастся сделать только численно.

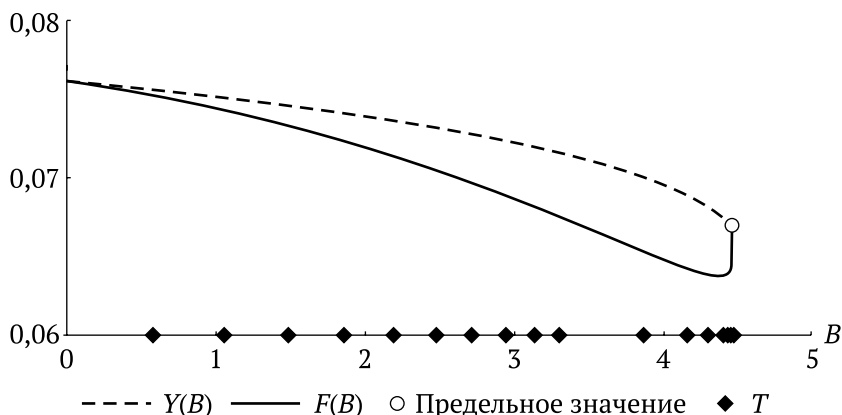


Рис. 7.3. Кривые доходностей $Y(B)$ и форвардные кривые $F(B)$ в случае, когда параметры принимали те же значения, что и на рис. 7.1, и дополнительно $\sigma = 0,003$.
 T – метки реального времени через каждый год для первых 10 лет, а далее – через 5 лет

На рис. 7.3 представлены графики функций $Y(B_t)$ и $F(B_t)$, вычисленные по формулам (7.23) и (7.24), характеризующие доходности трехфакторной модели (7.19)–(7.21) с ключевыми параметрами, соответствующими найденным Д. Аном и Б. Гао (Ahn, Gao, 1999).

ВЫВОДЫ

Здесь, а также в предыдущих главах последовательно рассмотрены модели аффинных доходностей с различным числом факторов. С увеличением числа факторов модели и их анализ существенно усложняются, и получение результатов в аналитической форме становится невозможным. Численный анализ также усложняется, поскольку число параметров моделей растет. Поэтому всестороннего сравнения моделей, их преимуществ и недостатков в рамках статьи осуществить не удастся. Приводится только характер доходностей для одного набора параметров, найденных Д. Аном

и Б. Гао при обработке реальных финансовых данных. Более широкое сравнение моделей предстоит еще сделать в будущем. В табл. 7.1 сведены данные из глав 5–7 о том, какие и сколько параметров используется для построения рассмотренных моделей. Тип модели означает число факторов, плюс – использование параметра в соответствующей модели.

Таблица 7.1

Параметры, использующиеся в моделях с различным числом факторов

Тип модели	Фактор	Параметр										Количество параметров
		k_r	θ_0	D_r	x_r	k_θ	D_θ	k_D	V	S	x_D	
1	r	+	+	+	+							4
2	r, θ	+	+	+	+	+	+					6
2	r, D	+	+					+	+	+	+	6
3	r, θ, D	+	+			+	+	+	+	+	+	8
3	r, θ, D	+	+		+	+	+	+	+	+	+	9
3	r, θ, D	+	+			+	+	+	+	+	+	8

В интервале изменения времени до погашения τ от нуля до бесконечности кривые доходности $y(\tau, r, \theta, D)$ и форвардные кривые $f(\tau, r, \theta, D)$ для всех моделей стартуют из общей точки – текущего значения спот ставки $r(t) = r$ и стремятся к соответствующим пределам, зависящим от параметров модели, но не зависящим от значений текущего уровня переменных состояния r, θ, D . Эти предельные значения в общем случае определяются не только параметрами, указанными в таблице, но и наборами весовых коэффициентов $\{\phi\}$ и параметров цен риска $\{\lambda\}$, что заметно усложняет формулы. Однако если считать, что краткосрочная ставка доходности актива определяется только спот ставкой r (т. е. $\phi_r = 1, \phi_\theta = 0, \phi_D = 0$), стохастические процессы $r(t), \theta(t)$ и $D(t)$ нейтральны к риску (т. е. $\lambda_r = 0, \lambda_\theta = 0, \lambda_D = 0$), а нижние границы для процентной ставки и ее дисперсии равны нулю ($x_r = 0, x_D = 0$), то формулы для вычисления доходностей сильно упрощаются. В табл. 7.2 приводятся их явные аналитические выражения при этих предположениях. В первой строке табл. 7.2 приводятся обозначения моделей, во второй – формулы для соответствующих предельных доходностей, а в третьей – результаты вычислений по этим формулам для оценок параметров, найденных Д. Аном и Б. Гао (Ahn, Gao, 1999).

Таблица 7.2

Предельные значения доходностей

$1_{-}(r)$	$2_{-}(r, \theta)$	$2_{-}(r, D)$	$3_{-}(r, \theta, D)$	$3_{-}(r, \theta, D)$	$3_{-}(r, \theta, D)$
$k_r B_r(\infty) \theta_0$	$k_\theta B_\theta(\infty) \theta_0$	$\theta_0 - k_D B_D(\infty) V$	$\theta_0 - k_D B_D(\infty) V$	$k_\theta B_\theta(\infty) \theta_0 - k_D B_D(\infty) V$	$\theta_0 - k_D B_D(\infty) V$
0,061991	0,051994	0,053899	0,031849	0,021274	0,049687

Заметим, что предельные значения доходностей могут рассматриваться как доходности долгосрочных ценных бумаг и не зависят от текущего значения переменных состояния r , θ , D , а зависят только от параметров модели. Функции $B_\theta(\tau)$ и $B_D(\tau)$ для различных моделей вычисляются по различным формулам и имеют разные предельные значения $B_\theta(\infty)$ и $B_D(\infty)$. Из табл. 7.2 видно, что для рассмотренного числового примера предельные значения доходностей уменьшаются с увеличением числа факторов. Более обоснованные выводы могут быть сделаны после исследования доходностей во всей допустимой области десятимерного пространства параметров. Кроме того, предстоит сравнительное исследование взаимного поведения кривых доходностей и форвардных кривых во всем интервале $0 < \tau < \infty$ сроков до погашения актива во всей допустимой области параметров.

Глава 8

ДРУГАЯ ВЕРСИЯ ПЕРЕМЕННОЙ СРОКА ДО ПОГАШЕНИЯ

Будем считать, что для n -факторной модели аффинной доходности предполагается, что вектор состояния финансового рынка $X(t) = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t)$$

с n -вектором дрейфа $\mu(x)$, $(n \times m)$ -матрицей волатильности $\sigma(x)$ и m -вектором $W(t)$ независимых стандартных винеровских процессов. При этом вектор дрейфа $\mu(x)$ и матрица диффузии $\sigma(x)\sigma(x)^T$ должны быть аффинными функциями относительно переменных x , а рыночные цены риска такими, что $\sigma(x)\lambda(x)$ – n -вектор с аффинными компонентами относительно переменных x :

$$\mu(x) = K(\theta - x), \quad \sigma(x)\sigma(x)^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i. \quad (8.1)$$

Здесь K , α и β_i – $(n \times n)$ -матрицы; θ , ξ и η_i – n -вектора; x_i – компоненты вектора x . Эти свойства для n -факторной модели аффинной доходности приводят к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции $A(\tau)$ и компонент вектора $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_n(\tau))$, τ – срок до погашения:

$$A'(\tau) = (\xi - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \alpha B(\tau)/2, \quad A(0) = 0, \quad (8.2)$$

$$B_i'(\tau) = \phi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau)/2, \quad B_i(0) = 0. \quad (8.3)$$

В уравнении для $B_i(\tau)$ символ K_i , $1 \leq i \leq n$, обозначает i -й столбец матрицы K . Если среди переменных состояния имеется краткосрочная процентная ставка r , то компоненты вектора ϕ по экономическому смыслу доходности должны определяться так, чтобы $\phi_r = 1$, а остальные компоненты

вектора равны нулю. Кривая доходности $y(\tau, x)$ и форвардная кривая $f(\tau, x)$ определяются через функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ по формулам

$$y(\tau, x) = \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, x) = x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}. \quad (8.4)$$

Вслед за функциями $A(\tau)$ и $B(\tau)$ доходности $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$ определяются на неограниченном интервале сроков погашения $\tau \in [0, \infty]$, поэтому их визуальный сравнительный анализ на всем интервале изменения сроков до погашения τ затрудняется этой неограниченностью. Для устранения указанного недостатка в главе 2 предложено в качестве временной переменной τ для измерения сроков до погашения использовать меру дюрации $B_r(\tau)$ краткосрочной процентной ставки r . Тогда неограниченный интервал сроков до погашения $0 \leq \tau \leq \infty$ будет отображаться в конечный интервал $0 \leq B_r \leq B_r(\infty)$, $B_r(\infty) < \infty$. Такой подход описан в главах 3–7 для серии одно-, двух- и трехфакторных моделей. Он улучшает визуализацию сравнительного анализа кривых доходности, однако имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что $B_r(\infty)$ зависит от всех параметров модели, что влечет зависимость длительности интервала $[0, B_r(\infty)]$ от любого из этих параметров. Вследствие этого изменение любого параметра модели приводит к изменению временной шкалы. Это хорошо иллюстрирует, например, рис. 6.7, где интервал изменения дюрации процентной ставки существенно меняется с изменением волатильности модели. В настоящей главе предлагается другое преобразование временной переменной, которое отображает неограниченный интервал изменения сроков погашения $0 \leq \tau \leq \infty$ в единичный интервал $[0, 1]$ независимо от параметров модели.

Введем переменную u соотношением $u = 1 - \exp[-\rho\tau]$, где ρ – параметр преобразования, $\rho > 0$. При таком преобразовании шкалы изменения сроков до погашения τ неограниченный интервал $[0, \infty]$ возможных значений сроков погашения отображается в единичный интервал $[0, 1]$ изменения переменной u . Заметим, что введенное преобразование обеспечивает взаимно однозначное соответствие между переменными u и τ , когда всякому фиксированному сроку до погашения τ_k соответствует единственное значение переменной $u = u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$, и наоборот, всякому фиксированному значению переменной $u = u_k > 0$ соответствует единственный срок до погашения $\tau_k = -\ln(1 - u_k)/\rho > 0$.

Таким образом, используя преобразование переменной $\tau = -\ln(1 - u)/\rho$ в соотношениях (8.4), вместо функций доходностей $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$, заданных на неограниченном интервале $\tau \in [0, \infty]$, можно получить функции $Y(u, x)$ и $F(u, x)$, заданные на конечном интервале $u \in [0, 1]$. Функции $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ имеют практически те же свойства, что и доходности $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$, поэтому могут рассматриваться как их эквиваленты.

Рассмотрим это более детально. Пусть значения τ_k и u_k связаны соотношениями $\tau_k = -\ln(1 - u_k)/\rho$ и, соответственно, $u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$.

По определению $Y(u_k, x) \equiv y(-\ln(1 - u_k)/\rho, x) = y(\tau_k, x)$ для всех сроков $\tau_k \in [0, \infty]$, $u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$, поэтому область возможных значений $Y(u_k, x)$ полностью совпадает с областью возможных значений $y(\tau_k, x)$, $\tau_k \in [0, \infty]$. Заметим, что взаимоотношения между функциями $F(u, x)$ и $f(\tau, x)$ точно такие же, как и между функциями $Y(u, x)$ и $y(\tau, x)$. Так что достаточно рассмотреть только одну пару функций $Y(u, x)$ и $y(\tau, x)$, чтобы иметь представление о свойствах другой пары $F(u, x)$ и $f(\tau, x)$.

Предельные значения функций $Y(u, x)$ и $y(\tau, x)$ на границах области определения функций совпадают:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau, x) = \lim_{u \rightarrow 0} Y(u, x), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau, x) = \lim_{u \rightarrow 1} Y(u, x).$$

Пусть $y(\tau, x)$ возрастает (убывает) в окрестности точки $\tau = \tau_k$. Вектор переменных состояния x рассматриваем здесь и всюду далее как набор фиксированных параметров. Тогда функция $Y(u, x)$ будет возрастать (убывать) в окрестности точки $u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$. Это следует из соотношений

$$\frac{\partial Y(u, x)}{\partial u} = \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{du} = \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d(-\ln(1-u)/\rho)}{du} = \frac{1}{\rho(1-u)} \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau}, \quad \frac{1}{\rho(1-u)} > 0,$$

справедливых для всех $\rho > 0$ и $0 < u < 1$. Также справедливо следующее соотношение между производными:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau = -\ln(1-u)/\rho} = \rho(1-u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (8.5)$$

Если при некотором значении $\tau = \tau_k$ функция $y(\tau, x)$ имеет максимум (минимум), то функция $Y(u, x)$ будет иметь максимум (минимум) в точке $u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$.

К сожалению, свойство выпуклости функции $y(\tau, x)$ на некотором интервале значений τ может не обеспечить выпуклости функции $Y(u, x)$ на соответствующем интервале значений переменной u , так как для выполнения неравенства

$$\frac{\partial^2 Y(u, x)}{\partial u^2} = \frac{1}{\rho^2(1-u)^2} \left(\frac{\partial^2 y(\tau, x)}{\partial \tau^2} + \rho \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau} \right) \Big|_{\tau = -\ln(1-u)/\rho} > 0$$

необходимо, чтобы $\frac{\partial^2 y(\tau, x)}{\partial \tau^2} > -\rho \frac{\partial y(\tau, x)}{\partial \tau}$, для чего недостаточно условия $\frac{\partial^2 y(\tau, x)}{\partial \tau^2} > 0$, так как наклон кривой доходности $y(\tau, x)$ может быть и отрицательным. В дополнение к этому если при некотором значении $\tau = \tau_k$ имеет место неравенство $y(\tau_k, x) < f(\tau_k, x)$ (или $y(\tau_k, x) > f(\tau_k, x)$), то справедливо неравенство $Y(u_k, x) < F(u_k, x)$ (или $Y(u_k, x) > F(u_k, x)$) в точке $u_k = 1 - \exp[-\rho\tau_k]$.

Основываясь на этих свойствах, можно полагать, что функции $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ достаточно хорошо отражают свойства кривых доходности, заданы на конечном интервале переменной u , которая не связана с параметрами модели, и могут служить для описания свойств доходности на всем интервале изменения сроков погашения. В связи с этим в дальнейшем $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ будут называться тоже кривой доходности и форвардной кривой соответственно. Относительно параметра ρ , определяющего переменную u , заметим, что при изображении кривых на рисунках значением этого параметра можно устанавливать долю интервала $[0, 1]$, которую желательно выделить для представления интересующих сроков погашения. Например, если желательно, чтобы на 90 % длины интервала $[0, 1]$ были представлены сроки до погашения, не превышающие T , значение параметра следует выбирать равным $\rho = \ln 10/T$.

Получим уравнения для определения функций $Y(u, x)$ и $F(u, x)$. Для этого естественно применить равенства (8.4), приспособленные для переменной u . Используем в (8.4) подстановку $\tau(u) = -\ln(1 - u)/\rho$ и формулы дифференцирования (8.5), введя обозначения $a(u) \equiv A(\tau(u))$ и $b(u) \equiv B(\tau(u))$. Тогда получим

$$Y(u, x) = \rho \frac{a(u) - x^T b(u)}{\ln(1 - u)}, \quad F(u, x) = \rho(1 - u) \left(x^T \frac{db(u)}{du} - \frac{da(u)}{du} \right). \quad (8.6)$$

Для определения функций $a(u)$ и $b(u)$ можно использовать уравнения (8.2) и (8.3), что с помощью (8.5) приводит к уравнениям

$$\rho(1 - u)a'(u) = (\xi - K\theta)^T b(u) + b(u)^T \alpha b(u)/2, \quad a(0) = 0, \quad (8.7)$$

$$\rho(1 - u)b'_i(u) = \phi_i - b(u)^T (\eta_i + K_i) - b(u)^T \beta_i b(u)/2, \quad b_i(0) = 0. \quad (8.8)$$

Определим теперь функции доходности $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ для моделей, исследовавшихся в предыдущих главах, и проанализируем их свойства. Приведенные ниже численные результаты, иллюстрирующие поведение функций доходности, основаны на наборе параметров, найденных Д. Аном и Б. Гао (Ahn, Gao, 1999), приспособившим модель Даффи – Кана для описания динамики процесса годовой ставки доходности одномесячных бумаг Казначейства США для периода наблюдения с января 1960 г. по февраль 1991 г.

ОДНОФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ДАФФИ – КАНА

Модель Даффи – Кана использует процесс краткосрочной процентной ставки $r(t)$ в форме

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kD \frac{r(t) - r_{\inf}}{\theta - r_{\inf}}} dW(t), \quad r(0) > r_{\inf}, \quad (8.9)$$

где параметры θ и D являются константами, но позже при расширении модели до двух- или трехфакторной они будут предполагаться диффузионными процессами $\theta(t)$ и $D(t)$.

Функции $Y(u, x)$ и $F(u, x)$ для этой модели находятся в аналитическом виде, а в качестве переменной состояния x здесь используется краткосрочная процентная ставка $r = r(t)$.

$$b(u) = \left(\frac{\varepsilon}{(1-u)^{-\varepsilon/\rho} - 1} + V \right)^{-1},$$

$$Y(u, r) = r_{\inf} + (\theta - r_{\inf}) \left(\frac{k}{V} + \varepsilon \frac{b(u)\zeta - k \ln(1 + vb(u))/vV}{\ln(1 + vb(u)) - \ln(1 - Vb(u))} \right),$$

$$F(u, r) = r + (\theta - r_{\inf}) [kb(u) - (V - v)\zeta b(u) - vV\zeta b(u)^2],$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{(k + \lambda\sigma)^2 + 2\sigma}, \quad v = (\varepsilon - k - \lambda\sigma)/2,$$

$$V = (\varepsilon + k + \lambda\sigma)/2, \quad \sigma = \frac{2kD}{\theta - r_{\inf}}, \quad \zeta = \frac{r - r_{\inf}}{\theta - r_{\inf}}.$$

Рыночная цена риска λ и нижняя граница процентной ставки r_{\inf} являются фиксированными параметрами модели. На рис. 8.1 представлены примеры функций доходности $Y(u, r)$ и $F(u, r)$ для набора параметров Ана – Гао:

$$k = 0,1347; \theta = 0,0762; r_{\inf} = 0,03315 \text{ при } r = 0,05, \lambda = 0,1.$$

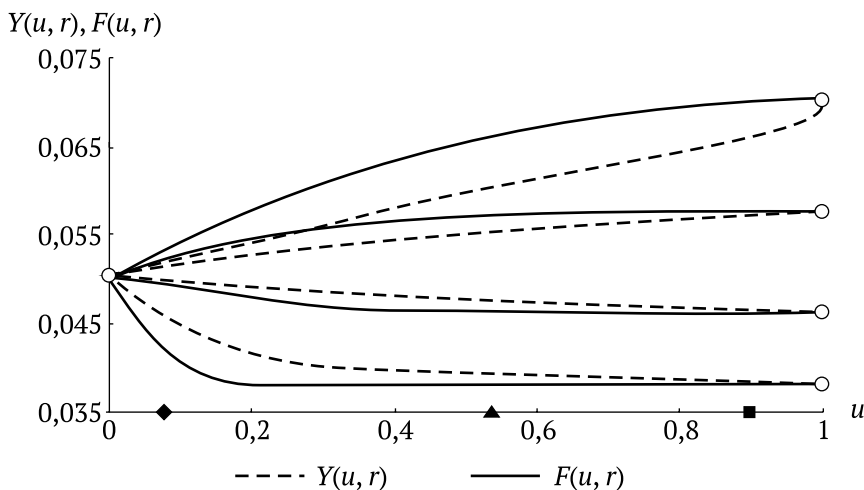


Рис. 8.1. Функции доходности $Y(u, r)$ и $F(u, r)$ для различных значений дисперсии процентных ставок $r(t)$: $D = 0,0002$ (верхняя пара кривых); $0,002892$ (оценка Ана – Гао); $0,02$; $0,2$ (нижняя пара кривых). Маркеры горизонтальной оси обозначают реальную продолжительность срока до погашения: ромб – 1 год, треугольник – 10 лет, квадрат – 30 лет. Кругом отмечены предельные значения функций для $\tau = 0$ (слева) и $\tau = \infty$ (справа). Текущее состояние $r(t) = r = 0,05$

Рисунок 8.1 иллюстрирует монотонное уменьшение доходности с ростом волатильности процесса краткосрочной процентной ставки. Причем интересно отметить, что для малых дисперсий форвардная доходность превышает ставку доходности до погашения для любых сроков τ . Однако с ростом дисперсии картина меняется, и уже доходность до погашения доминирует над форвардной ставкой также для любых сроков до погашения. Критическое значение дисперсии, меняющее картину, находится из равенства $V\zeta = k$.

ДВУХФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ

Для перехода к двухфакторной модели нужно выбрать дополнительную переменную состояния. Это можно сделать, предположив, что ею является либо параметр θ , либо параметр D . В первом случае θ рассматривается как стохастически изменяющееся локальное (по времени) среднее $\theta(t)$ процентной ставки, а во втором – D становится стохастическим процессом $D(t)$ ее локальной (по времени) дисперсии. Рассмотрим оба этих варианта. В первом случае уравнение (8.5) однофакторной модели преобразуется в пару уравнений

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D_r \frac{r(t) - r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}}} dW_r(t), \quad r(0) > r_{\inf}, \quad (8.10)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta D_\theta \frac{\theta(t) - r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}}} dW_\theta(t), \quad \theta(0) > r_{\inf}. \quad (8.11)$$

В этом случае вектор переменных состояния $X(t) = (r(t), \theta(t))^T$, а параметры системы, определяемые соотношениями (8.1), имеют представления

$$\begin{aligned} \mu(X(t)) &= K(\theta - X(t)) = \begin{pmatrix} k_r & -k_r \\ 0 & k_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 - r(t) \\ \theta_0 - \theta(t) \end{pmatrix}; \\ \sigma(X(t))\sigma(X(t))^T &= \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i(t) = - \begin{pmatrix} \frac{2k_r D_r r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} & 0 \\ 0 & \frac{2k_\theta D_\theta r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{2k_r D_r}{\theta_0 - r_{\inf}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} r(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2k_\theta D_\theta}{\theta_0 - r_{\inf}} \end{pmatrix} \theta(t); \\ \sigma(X(t))\lambda(X(t)) &= \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i X_i(t) = - \begin{pmatrix} \frac{2k_r D_r \lambda_r r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} \\ \frac{2k_\theta D_\theta \lambda_\theta r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2k_r D_r \lambda_r}{\theta_0 - r_{\inf}} \\ 0 \end{pmatrix} r(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2k_\theta D_\theta \lambda_\theta}{\theta_0 - r_{\inf}} \end{pmatrix} \theta(t). \end{aligned}$$

Поэтому уравнения для определения функций $a(u)$ и $b(u)$ согласно (8.7) и (8.8) принимают вид

$$\begin{aligned}\rho(1-u)a'(u) &= -\frac{2k_r D_r \lambda_r r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} b_r(u) - \left(k_\theta \theta_0 + \frac{2k_\theta D_\theta \lambda_\theta r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} \right) b_\theta(u) - \\ &\quad - \frac{k_r D_r r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} b_r^2(u) - \frac{k_\theta D_\theta r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} b_\theta^2(u), \quad a(0) = 0, \\ \rho(1-u)b'_r(u) &= 1 - \left(k_r + \frac{2k_r D_r \lambda_r}{\theta_0 - r_{\inf}} \right) b_r(u) - \frac{k_r D_r}{\theta_0 - r_{\inf}} b_r^2(u), \quad b_r(0) = 0, \\ \rho(1-u)b'_\theta(u) &= k_r b_r(u) - \left(k_\theta + \frac{2k_\theta D_\theta \lambda_\theta}{\theta_0 - r_{\inf}} \right) b_\theta(u) - \frac{k_\theta D_\theta r_{\inf}}{\theta_0 - r_{\inf}} b_\theta^2(u), \quad b_\theta(0) = 0.\end{aligned}$$

Уравнение для $b_r(u)$ может быть решено аналитически:

$$b_r(u) = \left(\frac{\varepsilon_r}{(1-u)^{-\varepsilon_r/\rho} - 1} + V_r \right)^{-1},$$

$$\text{где } \varepsilon_r = \sqrt{\left(k_r + \frac{2k_r D_r \lambda_r}{\theta_0 - r_{\inf}} \right)^2 + \frac{4k_r D_r}{\theta_0 - r_{\inf}}}, \quad V = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_r + k_r + \frac{2k_r D_r \lambda_r}{\theta_0 - r_{\inf}} \right).$$

Однако уравнение для $b_\theta(u)$ и, следовательно, для $a(u)$ можно решить только численно.

Функции доходности для текущего состояния ($r(t) = r$, $\theta(t) = \theta$) определяются по формулам (8.6).

Рассмотрим теперь второй вариант перехода к двухфакторной модели. Он соответствует применению двухфакторной модели Васичека – Фонга (Vasicek, Fong, 1991), в которой используется модель с квадратным корнем в форме Даффи – Кана. Примем, что в дополнение к краткосрочной ставке $r(t)$ состояние характеризует локальная по времени дисперсия $D(t)$: $X(t) = (r(t), D(t))^T$. Тогда случайный процесс динамики переменных состояния описывается уравнениями

$$dr(t) = k_r(\theta_0 - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t), \quad (8.12)$$

$$dD(t) = k_D(D_r - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - D_{\inf}}{D_r - D_{\inf}}} dW_D(t), \quad D(0) > D_{\inf}, \quad (8.13)$$

где D_r и S – стационарные среднее и дисперсия процесса $D(t)$ соответственно.

Поэтому соотношения (8.1) определяют структуру модели следующим образом:

$$\mu(X(t)) = K(\theta - X(t)) = \begin{pmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 - r(t) \\ D_r - D(t) \end{pmatrix};$$

$$\sigma(X(t))\sigma(X(t))^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i(t) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\delta D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r & 0 \\ 0 & 2\delta \end{pmatrix} D(t), \quad \delta \equiv \frac{k_D S}{D_r - D_{\inf}};$$

$$\sigma(X(t))\lambda(X(t)) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i X_i(t) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 2\delta\lambda_D D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r\lambda_r \\ 2\delta\lambda_D \end{pmatrix} D(t).$$

Это позволяет написать уравнения (8.7) и (8.8) для функций $a(u)$ и $b(u)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho(1-u)a'(u) &= -k_r\theta_0 b_r(u) - (k_D D_r + 2\delta\lambda_D D_{\inf})b_D(u) - \delta D_{\inf} b_D^2(u), \quad a(0) = 0; \\ \rho(1-u)b_r'(u) &= 1 - k_r b_r(u), \quad b_r(0) = 0; \\ \rho(1-u)b_D'(u) &= -2\lambda_r k_r b_r(u) - (k_D + 2\delta\lambda_D)b_D(u) - k_r b_r^2(u) - \delta b_D^2(u), \quad b_D(0) = 0. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, уравнение для $b_r(u)$ может быть решено аналитически:

$$b_r(u) = \frac{1}{k_r} (1 - (1-u)^{k_r/\rho}),$$

но уравнения для $b_D(u)$ и, соответственно, для $a(u)$ решаются только численно. Функции доходности для текущего состояния $X(t) = (r(t) = r, D(t) = D)$ определяются по формулам (8.6).

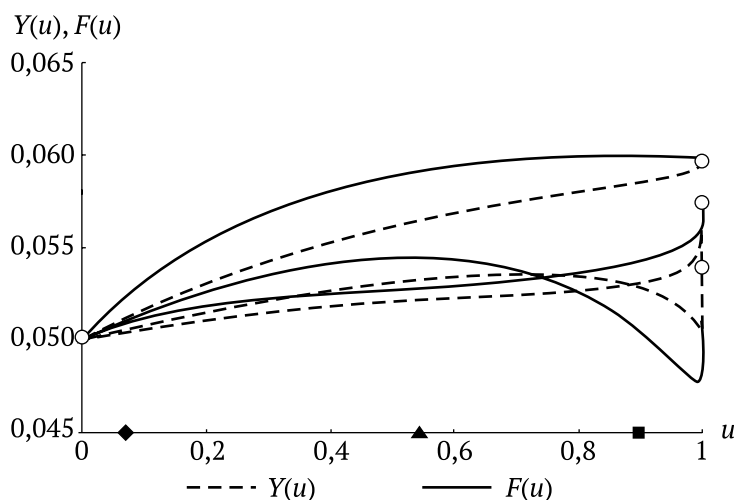


Рис. 8.2. Функции доходности $Y(u)$ и $F(u)$ для различных моделей: модель (8.9) (верхняя пара кривых); модель (8.10) и (8.11) (средняя пара кривых); модель (8.12) и (8.13) (нижняя пара кривых). Маркеры горизонтальной оси обозначают реальную продолжительность срока до погашения: ромб – 1 год, треугольник – 10 лет, квадрат – 30 лет. Кружком отмечены предельные значения функций для $\tau = 0$ (слева) и $\tau = \infty$ (справа)

Результаты вычислений функций доходности $Y(u)$ и $F(u)$ для моделей (8.9)–(8.13) для сравнения представлены на рис. 8.2. Вычисления проводились для параметров, обеспечивающих для всех моделей одинаковые значения стационарного среднего θ_0 , стационарной дисперсии D_r и параметра быстрогодействия k_r при следующих значениях переменных текущего состояния: $r = 0,05$; $\theta = 0,06$; $D = 0,005$.

Из рис. 8.2 видно, что для выбранных параметров получающиеся из однофакторной модели доходности доминируют над доходностями, определяемыми двухфакторными моделями для всех сроков до погашения.

ТРЕХФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ

При переходе к трехфакторным моделям переменными состояния становятся краткосрочная ставка $r(t)$, ее локальное (по времени) среднее $\theta(t)$ и ее локальная (по времени) дисперсия $D(t)$, $X(t) = (r(t), \theta(t), D(t))^T$. Все эти компоненты состояния считаются диффузионными стохастическими процессами. Рассмотрим несколько возможных способов задания таких процессов. Первый может быть назван расширенной моделью Васичека – Фонга, второй использует модель Чена в интерпретации Дэй – Синглтона (Dai, Singleton, 2000), а третий представляет модель BDFS (Balduzzi, Das, Foresi, Sundaram, 1996).

В расширенной модели Васичека – Фонга стохастическая дисперсия $D(t)$ процесса краткосрочной ставки $r(t)$ порождается однофакторной моделью Даффи – Кана (Васичек и Фонг использовали модель Кокса – Ингерсолла – Росса), а стохастическое среднее ставки $r(t)$ – процессом с возвращением к среднему θ_0 со стохастической волатильностью, определяемой $D(t)$. Так что уравнения для переменных состояния $X(t) = (r(t), \theta(t), D(t))^T$ имеют вид

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)}dW_r(t), \quad (8.14)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sigma\sqrt{2k_\theta D(t)}dW_\theta(t), \quad (8.15)$$

$$dD(t) = k_D(D_r - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - D_{\inf}}{D_r - D_{\inf}}}dW_D(t), \quad D(0) > D_{\inf} \geq 0. \quad (8.16)$$

Здесь D_{\inf} – нижняя граница для процесса дисперсии $D(t)$ процентной ставки; D_r – стационарное среднее процесса дисперсии $D(t)$, а S – стационарная дисперсия процесса дисперсии $D(t)$. Для более компактной записи в дальнейшем удобно ввести обозначение $\delta = k_D S / (D_r - D_{\inf})$.

Соотношения (8.1) имеют вид

$$\mu(X(t)) = K(\theta - X(t)) = \begin{pmatrix} k_r & -k_r & 0 \\ 0 & k_\theta & 0 \\ 0 & 0 & k_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 - r(t) \\ \theta_0 - \theta(t) \\ D_r - D(t) \end{pmatrix};$$

$$\sigma(X(t))\sigma(X(t))^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i(t) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r & 0 & 0 \\ 0 & 2k_0\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta \end{pmatrix} D(t);$$

$$\sigma(X(t))\lambda(X(t)) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i X_i(t) = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\delta\lambda_D D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r\lambda_r \\ 2k_0\sigma^2\lambda_0 \\ 2\delta\lambda_D \end{pmatrix} D(t).$$

Это позволяет получить систему уравнений (8.7) и (8.8) для функций $a(u)$ и $b(u)$

$$\begin{aligned} \rho(1-u)a'(u) &= -k_0\theta_0 b_\theta(u) - (k_D D_r + 2\delta\lambda_D D_{\inf})b_D(u) - \delta D_{\inf} b_D^2(u), \quad a(0) = 0, \\ \rho(1-u)b_r'(u) &= 1 - k_r b_r(u), \quad b_r(0) = 0, \\ \rho(1-u)b_\theta'(u) &= k_r b_r(u) - k_0 b_\theta(u), \quad b_\theta(0) = 0. \\ \rho(1-u)b_D'(u) &= -2k_r\lambda_r b_r(u) - 2k_0\sigma^2\lambda_0 b_\theta(u) - \\ &\quad (k_D + 2\delta\lambda_D)b_D(u) - k_r b_r^2(u) - k_0\sigma^2 b_\theta^2(u) - \delta b_D^2(u), \quad b_D(0) = 0. \end{aligned}$$

Уравнения для $b_r(u)$ и $b_\theta(u)$ могут быть решены аналитически:

$$b_r(u) = \frac{1 - (1-u)^{k_r/\rho}}{k_r},$$

$$b_\theta(u) = \frac{1}{k_0} + \frac{(1-u)^{k_r/\rho}}{k_r - k_0} - \frac{k_r(1-u)^{k_0/\rho}}{k_0(k_r - k_0)},$$

но уравнения для $b_D(u)$ и, соответственно, для $a(u)$ могут быть решены только численными методами. Функции доходности $Y(u)$ и $F(u)$ для текущего состояния $X(t) = (r(t) = r, \theta(t) = \theta, D(t) = D)$ определяются по формулам (8.6).

В модели Чена переменные состояния удовлетворяют системе стохастических дифференциальных уравнений

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t), \quad (8.17)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta D_\theta \frac{\theta(t) - \theta_{\inf}}{\theta_0 - \theta_{\inf}}} dW_\theta(t), \quad (8.18)$$

$$dD(t) = k_D(D_r - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - D_{\inf}}{D_r - D_{\inf}}} dW_D(t),$$

$$\theta(0) > \theta_{\inf} \geq 0, \quad D(0) > D_{\inf} \geq 0. \quad (8.19)$$

Заметим, что в этой модели процессы $\theta(t)$ и $D(t)$ являются независимыми диффузионными процессами, описываемыми одномерными моделями Даффи – Кана. Для недостижимости нижних границ θ_{\inf} и D_{\inf} про-

цессами $\theta(t)$ и $D(t)$ необходимо выполнение известных условий Феллера $(\theta_0 - \theta_{\inf})^2 > D_\theta$ и $(D_r - D_{\inf})^2 > S$. Для компактности далее будем также использовать обозначения $\gamma = k_\theta D_\theta / (\theta_0 - \theta_{\inf})$, $\delta = k_D S / (D_r - D_{\inf})$.

Соотношения (8.1) имеют вид

$$\begin{aligned}\mu(X(t)) &= K(\theta - X(t)) = \begin{pmatrix} k_r & -k_r & 0 \\ 0 & k_\theta & 0 \\ 0 & 0 & k_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 - r(t) \\ \theta_0 - \theta(t) \\ D_r - D(t) \end{pmatrix}; \\ \sigma(X(t))\sigma(X(t))^T &= \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i(t) = \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma\theta_{\inf} & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \theta(t) + \begin{pmatrix} 2k_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta \end{pmatrix} D(t); \\ \sigma(X(t))\lambda(X(t)) &= \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i X_i(t) = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma\lambda_\theta\theta_{\inf} \\ 2\delta\lambda_D D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\gamma\lambda_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \theta(t) + \begin{pmatrix} 2k_r\lambda_r \\ 0 \\ 2\delta\lambda_D \end{pmatrix} D(t).\end{aligned}$$

С учетом этого система уравнений (8.7) и (8.8) для функций $a(u)$ и $b(u)$ получается следующая:

$$\begin{aligned}\rho(1-u)a'(u) &= -(k_\theta\theta_0 + 2\gamma\lambda_\theta\theta_{\inf})b_\theta(u) - (k_D D_r + 2\delta\lambda_D D_{\inf})b_D(u) - \\ &\quad - \gamma\theta_{\inf}b_\theta^2(u) - \delta D_{\inf}b_D^2(u), \quad a(0) = 0, \\ \rho(1-u)b_r'(u) &= 1 - k_r b_r(u), \quad b_r(0) = 0, \\ \rho(1-u)b_\theta'(u) &= k_r b_r(u) - (k_\theta + 2\gamma\lambda_\theta)b_\theta(u) - \gamma b_\theta^2(u), \quad b_\theta(0) = 0, \\ \rho(1-u)b_D'(u) &= -2k_r\lambda_r b_r(u) - (k_D + 2\delta\lambda_D)b_D(u) - k_r b_r^2(u) - \delta b_D^2(u), \quad b_D(0) = 0.\end{aligned}$$

К сожалению, из этих уравнений аналитически решается только уравнение для $b_r(u)$:

$$b_r(u) = [1 - (1-u)^{k_r/\rho}] / k_r,$$

остальные допускают только численное решение.

Функции доходности $Y(u) = Y(u | r, \theta, D)$ и $F(u) = F(u | r, \theta, D)$ определяются по формулам (8.6).

В модели BDFS используются переменные состояния $X(t) = (r(t), \theta(t), D(t))^T$, удовлетворяющие системе уравнений

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)}dW_r(t), \quad (8.20)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta D_\theta}dW_\theta(t), \quad (8.21)$$

$$dD(t) = k_D(D_r - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - D_{\inf}}{D_r - D_{\inf}}} dW_D(t), \quad D(0) > D_{\inf} \geq 0. \quad (8.22)$$

Фактически эта модель является частным случаем модели Чена, когда $\theta_{\inf} \rightarrow -\infty$ (см. уравнение (8.18)). В этом случае $\gamma \rightarrow 0$, но $\gamma\theta_{\inf} \rightarrow -k_\theta d_\theta$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \mu(X(t)) &= K(\theta - X(t)) = \begin{pmatrix} k_r & -k_r & 0 \\ 0 & k_\theta & 0 \\ 0 & 0 & k_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 - r(t) \\ \theta_0 - \theta(t) \\ D_r - D(t) \end{pmatrix}; \\ \sigma(X(t))\sigma(X(t))^T &= \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i(t) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2k_\theta D_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta \end{pmatrix} D(t); \\ \sigma(X(t))\lambda(X(t)) &= \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i X_i(t) = - \begin{pmatrix} 0 \\ -2k_\theta \lambda_\theta D_\theta \\ 2\delta \lambda_D D_{\inf} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_r \lambda_r \\ 0 \\ 2\delta \lambda_D \end{pmatrix} D(t). \end{aligned}$$

Это позволяет получить уравнения для функций $a(u)$ и $b(u)$ в следующей форме:

$$\begin{aligned} \rho(1-u)a'(u) &= -(\theta_0 - 2\lambda_\theta D_\theta)k_\theta b_\theta(u) - (k_D D_r + 2\delta \lambda_D D_{\inf})b_D(u) + \\ &\quad + k_\theta D_\theta b_\theta^2(u) - \delta D_{\inf} b_D^2(u), \quad a(0) = 0, \\ \rho(1-u)b_r'(u) &= 1 - k_r b_r(u), \quad b_r(0) = 0, \\ \rho(1-u)b_\theta'(u) &= k_r b_r(u) - k_\theta b_\theta(u), \quad b_\theta(0) = 0, \\ \rho(1-u)b_D'(u) &= -2k_r \lambda_r b_r(u) - (k_D + 2\delta \lambda_D)b_D(u) - k_r b_r^2(u) - \delta b_D^2(u), \quad b_D(0) = 0. \end{aligned}$$

Здесь аналитически решаются только уравнения для $b_r(u)$ и $b_\theta(u)$:

$$\begin{aligned} b_r(u) &= \frac{1 - (1-u)^{k_r/\rho}}{k_r}, \\ b_\theta(u) &= \frac{1}{k_\theta} + \frac{(1-u)^{k_r/\rho}}{k_r - k_\theta} - \frac{k_r(1-u)^{k_\theta/\rho}}{k_\theta(k_r - k_\theta)}, \end{aligned}$$

а остальные уравнения приходится решать численными методами.

Результаты вычислений функций доходности $Y(u)$ и $F(u)$ для моделей (8.14)–(8.16), (8.17)–(8.19) и (8.20)–(8.22) представлены на рис. 8.3. Вычисления проводились для параметров, обеспечивающих для всех моделей одинаковые значения стационарного среднего и стационарной дисперсии при следующих текущих значениях переменных состояния:

$$r = 0,05; \theta = 0,06; D = 0,005.$$

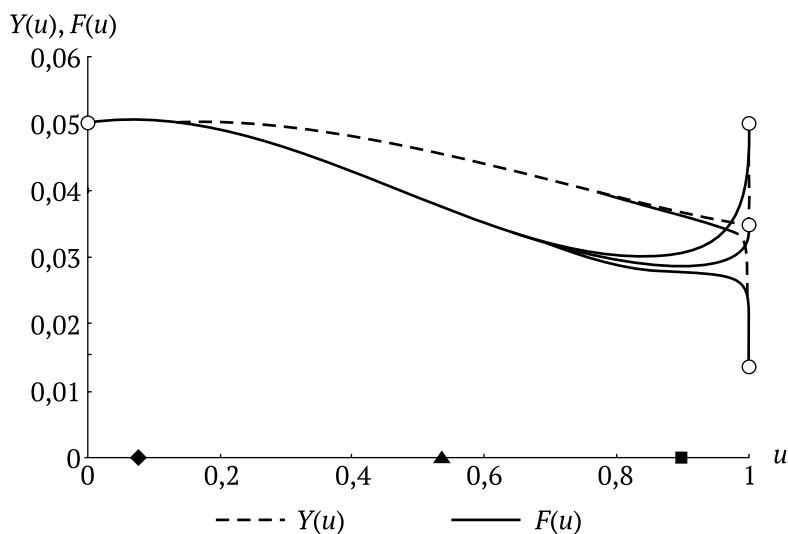


Рис. 8.3. Функции доходности $Y(u)$ и $F(u)$ для трехфакторных моделей:
 модель (8.14)–(8.16) (верхняя пара кривых);
 модель (8.17)–(8.19) (средняя пара кривых);
 модель (8.20)–(8.22) (нижняя пара кривых).
 Маркеры горизонтальной оси обозначают реальную продолжительность срока до погашения: ромб – 1 год, треугольник – 10 лет, квадрат – 30 лет. Кругом отмечены предельные значения функций для $\tau = 0$ (слева) и $\tau = \infty$ (справа)

Из рис. 8.3 можно заключить, что для принятого набора параметров все три трехфакторные модели практически определяют доходность одинаково. Исключение составляет область продолжительных сроков до погашения (более 30 лет), в которой доходности существенно расходятся. При этом модель BDFS предусматривает резкий спад доходности для больших сроков до погашения. Это, видимо, объясняется тем, что в этой модели локальное среднее краткосрочной процентной ставки следует гауссовскому процессу, в принципе допускающему наличие отрицательных значений процентной ставки, что может приводить к падению доходности. Для принятого набора параметров вероятность отрицательных значений $\theta(t)$ в рассматриваемом случае равна $3,7 \cdot 10^{-6}$. Сравнение рис. 8.2 и 8.3 позволяет заключить, что с увеличением размерности моделей определяемые ими ставки доходности уменьшаются.

ВЫВОДЫ

В главе предложено рассматривать временную переменную, описывающую срок до погашения бескупонных облигаций, как результат не зависящего от параметров модели изменения процентной ставки нелиней-

ного преобразования $u(\tau)$ временных сроков, позволяющего отображать временную ось на интервал единичной длины. Этот способ имеет преимущества перед применением в качестве меры времени дюрации $B(\tau)$ краткосрочной процентной ставки, поскольку при применении дюрации временная переменная зависит от параметров рассматриваемых моделей, что затрудняет сравнение доходностей для одних и тех же реальных сроков до погашения. Показано, что функции доходности $Y(u)$ и $F(u)$ обладают практически теми же свойствами, что кривая доходности до погашения $u(\tau)$ и форвардная кривая $f(\tau)$ соответственно, за исключением (в некоторых случаях) свойств, связанных со второй производной. Вместе с тем они удобнее, поскольку позволяют визуально анализировать доходности на всей оси времени. Использование такого подхода проиллюстрировано при анализе свойств кривой доходности и форвардной кривой для одно-, двух- и трехфакторных моделей процентных ставок. Для этого сформулированы математические модели динамики переменных состояния для всех этих случаев (всего шесть различных моделей), выведены уравнения для функций временной структуры и при возможности найдены их аналитические решения. Поскольку большая часть уравнений может быть решена только численно, проведены расчеты для всех шести моделей и сделаны сравнения функций доходностей, характеризующих их временную структуру. Расчеты проводились для набора параметров, основанных на оценках Д. Ана и Б. Гао, приспособивших однофакторную модель Даффи – Кана для описания динамики процесса годовой ставки доходности одномесечных бумаг Казначейства США для периода наблюдения с января 1960 г. по февраль 1991 г. Ими были получены следующие значения (в обозначениях настоящей главы): $k_r = 0,1347$; $\theta_0 = 0,0762$; $D_r = 0,002892$; $r_{\inf} = 0,03315$. Остальные параметры моделей были приняты следующими: $k_\theta = 0,01347$; $D_\theta = 0,0002892$; $\theta_{\inf} = 0,03315$; $k_D = 0,01347$; $S = 1,882 \cdot 10^{-7}$; $D_{\inf} = 0,0001$; $\lambda_r = 0,1$; $\lambda_\theta = \lambda_D = 0,1$. Текущие значения параметров состояния во всех случаях выбирались следующими: $r = 0,05$; $\theta = 0,06$; $D = 0,005$. Параметр преобразования временных сроков во всех случаях был $\rho = 0,0767528$. В этом случае короткие сроки до погашения (менее 1 года) занимают 7,4 % интервала, средние сроки от 1 года до 10 лет – 46,2 %, сроки от 10 до 30 лет – 36,4 % и сроки, превышающие 30 лет, – 10 %. С увеличением параметра ρ перераспределение интервала происходит в пользу более коротких сроков.

Глава 9

МОДЕЛЬ ДОХОДНОСТИ НЕЛЬСОНА – СИГЕЛЯ – СВЕНССОНА

Временная структура процентных ставок доходности является одной из наиболее востребованных характеристик финансовых активов. При математическом моделировании временной структуры используются безарбитражные аффинные модели, поскольку они подразумевают возможность получения решений в аналитическом виде. Для получения модели временной структуры обычно исходят от описания того, как эволюционирует состояние финансового рынка. Чаще всего принимается, что состояние рынка – это случайный процесс диффузионного типа.

Будем считать, что для n -факторной модели аффинной доходности предполагается, что вектор состояния финансового рынка $X(t) = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t) \quad (9.1)$$

с n -вектором дрейфа $\mu(x)$, $(n \times m)$ -матрицей волатильности $\sigma(x)$ и m -вектором $W(t)$ независимых стандартных винеровских процессов.

В однофакторной модели за состояние рынка принимается краткосрочная процентная ставка $r(t)$, эволюционирующая как случайный процесс, обладающий свойством возвращения к стационарному среднему θ . В этом случае имеется три основных подхода для описания случайного процесса краткосрочных процентных ставок, разработанных американскими авторами:

1) модель Васичека (см. главу 3), когда волатильность ставки – детерминированная константа $\sigma = \sqrt{2kD}$ (D – стационарная дисперсия процесса $r(t)$)

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kD}dW(t); \quad (9.2)$$

2) модель CIR (см. главу 4), в которой волатильность ставки – неотрицательный случайный процесс, пропорциональный квадратному корню процентной ставки

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{\frac{2kD}{\theta}} r(t)dW(t), \quad r(0) > 0; \quad (9.3)$$

3) модель Даффи – Кана (см. главу 5), в рамках которой волатильность процентной ставки – случайная, пропорциональная превышению процентной ставки над своей нижней (недостижимой) границей r_{\inf}

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{\frac{2kD}{\theta - r_{\inf}}} (r(t) - r_{\inf})dW(t), \quad r(0) > r_{\inf}. \quad (9.4)$$

Вообще говоря, модель Даффи – Кана более общая по сравнению с первыми двумя, так как при нулевой нижней границе процентной ставки она превращается в модель CIR, а при удалении нижней границы процентной ставки на минус бесконечность (т. е. при $r_{\inf} \rightarrow -\infty$) модель становится моделью Васичека.

Временная структура процентных ставок доходности определяется как зависимость процентной ставки доходности (или цены) бескупонной облигации в некоторый текущий момент времени t от срока до погашения этой облигации.

Для моделей (9.2)–(9.4) цена бескупонной облигации $P(t, r; T)$ с датой погашения T при условии, что в момент t краткосрочная процентная ставка $r(t)$ приняла значение r , т. е. $r(t) = r$, вычисляется по формуле

$$P(t, r; T) \equiv P(t, r; t + \tau) = P(T, r; T) \exp\{A(\tau) - rB(\tau)\}, \quad (9.5)$$

где $\tau = T - t$ – срок до погашения облигации, обычно предполагается, что $P(T, r; T) = 1$, что не ограничивает общности анализа. Функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ обычно называются функциями временной структуры. При получении формулы (9.5) были учтены условия отсутствия арбитража. Для такой функции цены доходность до погашения (или просто доходность) $y(\tau, r)$ является аффинной функцией r и вычисляется по формуле

$$y(\tau, r) = \frac{-\ln P(t, r; T)}{T - t} = \frac{rB(\tau) - A(\tau)}{\tau}. \quad (9.6)$$

Функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ вычисляются в явном аналитическом виде, хотя для их получения необходимо решать дифференциальные уравнения Риккати. Зависимость $y(\tau, r)$ от τ и определяет временную структуру доходности.

Доходность до погашения $y(\tau, r)$ – это *средняя* характеристика за временной период длительностью τ . В то же время практиков интересует вопрос, какой будет *краткосрочная* ставка доходности в конце этого периода. Такую ставку называют мгновенной форвардной ставкой $f(\tau, r)$, и она функционально связана с доходностью до погашения $y(\tau, r)$ соотношениями

$$y(\tau, r) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(s, r) ds, \quad f(\tau, r) = y(\tau, r) + \tau \frac{\partial y(\tau, r)}{\partial \tau}. \quad (9.7)$$

В рамках безарбитражных аффинных моделей форвардная ставка $f(\tau, r)$ вычисляется по формуле

$$f(\tau, r) = \frac{-\partial \ln P(t, r; T)}{\partial T} = r \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau}. \quad (9.8)$$

Обычно аналитические свойства функции $f(\tau, r)$ оказываются более простыми, чем свойства $y(\tau, r)$. Обе эти функции – кривая доходности $y(\tau, r)$ и форвардная кривая $f(\tau, r)$ одинаково интересны для финансовых аналитиков.

Оказывается, что в зависимости от состояния рынка (для однофакторной модели это значения r) функция $y(\tau, r)$ может принадлежать только к одному из четырех типов кривых: монотонно возрастающая до некоторого конечного предельного значения («нормальная» кривая доходности), монотонно убывающая до некоторого конечного предельного значения («перевернутая» кривая доходности), кривая доходности с максимумом («сгорбленная» (*humped*) кривая), плоская кривая доходности (*flat yield curve*).

Такая классификация кривых подтверждается на реальных финансовых рынках. Вместе с тем реальные рыночные доходности хотя и имеют такой функциональный вид, но по величине часто довольно сильно отличаются от получаемых на основе приведенных моделей. Поэтому существуют разнообразные модификации описанных выше моделей, в частности считается, что увеличение размерности, т. е. переход к двухфакторным, трехфакторным и т. д. моделям, может повысить точность их описания рыночных доходностей. В многомерном случае, когда состояние финансового рынка определяется вектором $X(t)$, эволюция которого описывается диффузионным процессом (9.1), формулы (9.6) и (9.8) для кривой доходности и форвардной кривой преобразуются к виду

$$y(\tau, r) = \frac{x B(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, r) = x \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} \quad (9.9)$$

при условии, что в момент t вектор состояния финансового рынка $X(t)$ оказался равным x , т. е. $X(t) = x$; в этом случае $B(\tau)$ – вектор, а $A(\tau)$ остается скалярной функцией.

Однако увеличение размерности существенно увеличивает количество параметров моделей, но точность моделей увеличивает слабо.

МОДЕЛЬ НЕЛЬСОНА – СИГЕЛЯ

В связи с этим появился другой способ усовершенствования модели временной структуры доходности, основанный на небольшом разнообразии типов кривых доходности. Поскольку их всего четыре, возникла идея: вве-

сти несколько эталонных функциональных зависимостей и из них строить комбинации, аппроксимирующие кривые доходности. Ч. Нельсон и Э. Сигель (Nelson, Siegel, 1987) предложили в качестве таких эталонных функций для конструирования форвардной кривой три простые функции: $\alpha_1(\tau) = 1$, $\alpha_2(\tau) = \exp(-\gamma\tau)$, $\alpha_3(\tau) = \gamma\tau \exp(-\gamma\tau)$. Функция $\alpha_1(\tau)$ предназначалась для аппроксимации долгосрочного участка кривой, функция $\alpha_2(\tau)$ – для аппроксимации краткосрочного участка и функция $\alpha_3(\tau)$ должна была аппроксимировать среднесрочные доходности. Использование такого подхода приводит к следующему результату:

$$f(\tau, r) = \beta_1 \alpha_{1f}(\tau) + \beta_2 \exp(-\gamma\tau) + \beta_3 \gamma\tau \exp(-\gamma\tau). \quad (9.10)$$

Как видно, функция $f(\tau, r)$ определяется очень просто, но для ее окончательной идентификации необходимо найти четыре параметра $\gamma > 0$, $\beta_1 > 0$, β_2 и β_3 . С помощью соотношений (9.7) легко получить и функцию $y(\tau, r)$ в виде

$$y(\tau, r) = \beta_1 \alpha_{1y}(\tau) + \beta_2 \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right). \quad (9.11)$$

Заметим, что предположение о том, что $\alpha_1(\tau) = 1$, как будет показано ниже, не согласуется с требованием отсутствия арбитражных возможностей, и правильнее писать первые слагаемые в правых частях (9.10) и (9.11) как $\beta_1 \alpha_{1f}(\tau)$ и $\beta_1 \alpha_{1y}(\tau)$, где между $\alpha_{1f}(\tau)$ и $\alpha_{1y}(\tau)$ существует взаимоотношение, определяемое равенством (9.7)

$$\alpha_{1y}(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \alpha_{1f}(s) ds.$$

Чтобы увеличить гибкость и улучшить приспособляемость модели к эмпирическим данным, Л. Свенссон (Svensson, 1995) добавил к трем эталонным функциям Нельсона – Сигеля четвертую эталонную функцию $\alpha_5(\tau) = \delta\tau \exp(-\delta\tau)$, $\delta > 0$, такую же, как и функция $\alpha_3(\tau)$, но с другим параметром $\delta \neq \gamma$. Так что

$$f(\tau, r) = \beta_1 + \beta_2 \exp(-\gamma\tau) + \beta_3 \gamma\tau \exp(-\gamma\tau) + \beta_4 \exp(-\delta\tau) + \beta_5 \delta\tau \exp(-\delta\tau), \quad (9.12)$$

и число параметров модели увеличилось на два и достигло шести. В равенстве (9.12) для общности введена еще одна функция $\alpha_4(\tau) = \exp(-\delta\tau)$, но если положить $\beta_4 = 0$, получится представление Свенссона.

В июне 1996 г. в Банке международных расчетов (БМР, Базель) было принято соглашение, чтобы центральные банки Европы представляли свои данные в БМР для расчетов бескупонных кривых доходности и оценки параметров моделей. В настоящее время большинство банков Европы используют для моделирования кривых доходности подход Нельсона – Сигеля (Италия и Финляндия) или его модификацию Свенссона (Бельгия, Германия, Испания, Норвегия, Франция, Швейцария и Швеция) (Bank for International Settlements, 2005). Это, в частности, подчеркивает важность анализа этого подхода.

К сожалению, подход Нельсона – Сигеля – Свенссона (NSS) не дает рекомендаций, как определять параметры модели, и никак не объясняет, является ли такая модель безарбитражной. Имеет смысл модифицировать эту модель с целью ввести ее в класс безарбитражных. Отметим вначале, что аффинные безарбитражные доходности (9.6), (9.8) и (9.9) обладают следующими общими предельными свойствами (Siegel, Nelson, 1988):

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow 0} y_{BA}(\tau, r) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} f_{BA}(\tau, r) = x^T \phi = r, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_{BA}(\tau, r) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} f_{BA}(\tau, r) = y_{\infty}.\end{aligned}$$

Здесь обозначено $B'(0) = \phi$, y_{∞} – предельная долгосрочная доходность, определяемая только параметрами модели и не зависящая от состояния рынка x . Поскольку это общие свойства доходности, ими должны обладать и доходности модели Нельсона – Сигеля (NS):

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow 0} y_{NS}(\tau, r) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} f_{NS}(\tau, r) = \beta_1 + \beta_2, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_{NS}(\tau, r) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} f_{NS}(\tau, r) = \beta_1.\end{aligned}$$

Таким образом, смысл параметров β_1 и β_2 в модели Нельсона – Сигеля проясняется: $\beta_1 = y_{\infty}$, $\beta_2 = r - y_{\infty}$.

Сравнивая (9.10)–(9.12) с (9.9), можно заключить, что доходности модели NSS аналогичны аффинным безарбитражным доходностям в случае четырехфакторной модели, когда состояние рынка описывается четырехмерным вектором $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t))$. В этом случае можно считать, что состояние рынка описывается вектором $(X_1(t) = \beta_2, X_2(t) = \beta_3, X_3(t) = \beta_4, X_4(t) = \beta_5)$, и следующим образом сопоставить детали этих моделей:

$$\begin{aligned}\beta_1 \alpha_{1f}(\tau) &\leftrightarrow \frac{dA(\tau)}{d\tau}, \quad \alpha_2(\tau) \leftrightarrow \frac{dB_1(\tau)}{d\tau}, \quad \alpha_3(\tau) \leftrightarrow \frac{dB_2(\tau)}{d\tau}, \\ \alpha_4(\tau) &\leftrightarrow \frac{dB_3(\tau)}{d\tau}, \quad \alpha_5(\tau) \leftrightarrow \frac{dB_4(\tau)}{d\tau}.\end{aligned}$$

Это означает, что параметры $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ и β_5 не являются константами, а являются значениями случайных процессов $X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t)$ в момент времени t , для которого определяется временная структура. Функция $\beta_1 \alpha_{1f}(\tau)$ тоже не константа, а некоторая детерминированная функция τ .

Стохастическое дифференциальное уравнение для $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t))$ имеет вид (9.1). Чтобы доходность находилась в рамках аффинной структуры, компоненты уравнения (9.1) должны быть определены следующим образом (см. главу 2):

$$\begin{aligned}\mu(x) &= K(\theta - x), \quad \sigma(x)\sigma(x)^T = \Phi + \sum_{i=1}^4 \omega_i x_i, \\ \sigma(x)\lambda(x) &= \xi + \sum_{i=1}^4 \eta_i x_i.\end{aligned}\tag{9.13}$$

Здесь K , ϕ и ω_i – (4×4) -матрицы; θ , ξ и η_i – 4-вектора, x_i – компоненты вектора x , вектор-функция $\lambda(x)$ определяет рыночную цену риска. Это приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции $A(\tau)$ и составляющих вектора $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), B_3(\tau), B_4(\tau))$:

$$A'(\tau) = (\xi - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \phi B(\tau)/2, A(0) = 0, \quad (9.14)$$

$$B_i'(\tau) = \phi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \omega_i B(\tau)/2, B_i(0) = 0. \quad (9.15)$$

В уравнении для $B_i(\tau)$ символ K_i , $1 \leq i \leq 4$, обозначает i -й столбец матрицы K .

Для того чтобы модель NSS была также аффинной безарбитражной моделью, решения уравнений (9.15) $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$, $B_3(\tau)$, $B_4(\tau)$ должны быть соответствующим образом согласованы с функциями $\alpha_2(\tau)$, $\alpha_3(\tau)$, $\alpha_4(\tau)$, $\alpha_5(\tau)$.

По определению функции $\alpha_2(\tau)$, $\alpha_3(\tau)$, $\alpha_4(\tau)$, $\alpha_5(\tau)$ представляют из себя либо экспоненты, либо их комбинации. Такие решения уравнения (9.15) могут быть только тогда, когда уравнения (9.15) являются линейными. Следовательно, нелинейные слагаемые в уравнениях (9.15) должны отсутствовать, т. е. $\omega_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$. Это означает, что согласно представлению (9.13) матрица волатильности $\sigma(x)$ не должна зависеть от состояний рынка x , т. е. волатильности должны быть детерминированными константами. Отсюда также следует, что функция рыночной цены риска $\lambda(x)$ должна быть вектором, состоящим из констант, т. е. согласно представлению (9.13) $\eta_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$. Все это значительно упрощает задачу определения вектора $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), B_3(\tau), B_4(\tau))$, так как вместо уравнений (9.15) получается линейная система дифференциальных уравнений

$$B'(\tau) = \phi - K^T B(\tau), B(0) = 0. \quad (9.16)$$

Определим матрицу K в виде

$$K = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

Тогда решение системы (9.16) будет следующим:

$$\begin{aligned} B_1(\tau) &= \phi_1 \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma}, \quad B_2(\tau) = (\phi_1 + \phi_2) \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \phi_1 \tau e^{-\gamma\tau}, \\ B_3(\tau) &= \phi_3 \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta}, \quad B_4(\tau) = (\phi_3 + \phi_4) \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta} - \phi_3 \tau e^{-\delta\tau}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Это означает, что безарбитражные кривые доходности $y_{BA}(\tau, r)$ и $f_{BA}(\tau, r)$ согласно соотношениям (9.9) определяются формулами:

$$y_{BA}(\tau, r) = x_1 \phi_1 \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + x_2 (\phi_1 + \phi_2) \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - x_2 \phi_1 e^{-\gamma\tau} +$$

$$\begin{aligned}
& + x_3 \phi_3 \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} + x_4 (\phi_3 + \phi_4) \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - x_4 \phi_3 e^{-\delta\tau} - \frac{A(\tau)}{\tau} = \\
& = (x_1 \phi_1 + x_2 (\phi_1 + \phi_2)) \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - x_2 \phi_1 e^{-\gamma\tau} + \\
& + (x_3 \phi_3 + x_4 (\phi_3 + \phi_4)) \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - x_4 \phi_3 e^{-\delta\tau} - \frac{A(\tau)}{\tau}, \tag{9.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{\text{БА}}(\tau, r) &= x_1 \phi_1 e^{-\gamma\tau} + x_2 \phi_2 e^{-\gamma\tau} + x_2 \phi_1 e^{-\gamma\tau} + x_3 \phi_3 e^{-\delta\tau} + \\
& + x_4 \phi_4 e^{-\delta\tau} + x_4 \phi_3 \delta\tau e^{-\delta\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} = (x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2) e^{-\gamma\tau} + x_2 \phi_1 \gamma\tau e^{-\gamma\tau} + \\
& + (x_3 \phi_3 + x_4 \phi_4) e^{-\delta\tau} + x_4 \phi_3 \delta\tau e^{-\delta\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}. \tag{9.20}
\end{aligned}$$

В этих выражениях функция $A(\tau)$ в явном виде не представлена, так как она имеет громоздкий вид, хотя ее вычисление по формуле (9.14) не представляет труда, когда функции $\{B_i(\tau)\}$ определены, поскольку формула (9.14) не является уравнением, а для определения $A(\tau)$ достаточно проинтегрировать правую часть равенства (9.14).

Заметим, что предельные значения функций $\{B_i(\tau)\}$ при $\tau \rightarrow \infty$ конечны:

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_1(\tau) &= \phi_1 / \gamma, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_2(\tau) = (\phi_1 + \phi_1) / \gamma, \\
\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_3(\tau) &= \phi_3 / \delta, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_4(\tau) = (\phi_3 + \phi_4) / \delta.
\end{aligned}$$

Это позволяет с помощью (9.9) и (9.14) найти предельные долгосрочные доходности в явной форме

$$y_{\infty} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_{\text{БА}}(\tau, r) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f_{\text{БА}}(\tau, r) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dA(\tau)}{d\tau} = (\sigma\lambda - K\theta)^T B(\infty) + B(\infty)^T \sigma\sigma^T B(\infty) / 2.$$

Напомним, что компоненты вектора ϕ определяют весовые коэффициенты влияния компонент вектора состояния рынка $X(t)$ на величину доходности (через краткосрочную ставку r). Если $\phi_3 = \phi_4 = 0$, компоненты $X_3(t)$ и $X_4(t)$ не влияют на доходность, и рассмотренная модель NSS превращается в обычную модель Нельсона – Сигеля (NS). Аффинная безарбитражная модель в этом случае предусматривает представления

$$f_{\text{БА}}(\tau, r) = -\frac{dA(\tau)}{d\tau} + (x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2) e^{-\gamma\tau} + x_2 \phi_1 \gamma\tau e^{-\gamma\tau}, \tag{9.21}$$

$$\begin{aligned}
y_{\text{БА}}(\tau, r) &= -\frac{A(\tau)}{\tau} + (x_1 \phi_1 + x_2 (\phi_1 + \phi_2)) \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - x_2 \phi_1 e^{-\gamma\tau} = \\
&= -\frac{A(\tau)}{\tau} + (x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2) \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + x_2 \phi_1 \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right). \tag{9.22}
\end{aligned}$$

Сравнение представлений (9.10) с (9.21) и (9.11) с (9.22) показывает, что безарбитражная модель Нельсона – Сигеля является обычной аффинной безарбитражной моделью, коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ которой определяются следующим образом

$$\beta_{1y}(\tau) = -\frac{A(\tau)}{\tau}, \quad \beta_2 = x_1\phi_1 + x_2\phi_2 = r, \quad \beta_3 = x_2\phi_1. \quad (9.23)$$

В отличие от определения этих коэффициентов Нельсоном и Сигелем β_1, β_2 и β_3 не являются константами: $\beta_{1y}(\tau) \equiv \beta_1\alpha_{1y}(\tau)$ – функция τ , а β_2 и β_3 – функции переменных состояния рынка $x_1 = X_1(t)$ и $x_2 = X_2(t)$ в момент t , для которого конструируется временная структура, и поэтому являются, по существу, реализациями случайных величин. Заметим, что по определению коэффициент β_2 равен значению краткосрочной процентной ставки в указанный момент t , $\beta_2 = r(t) = r$. Поскольку для получения аффинной безарбитражной модели NS в уравнении (9.1) функция дрейфа $\mu(x)$ должна быть линейной относительно x , а матрица волатильности $\sigma(x)$ – постоянной (не зависящей от x), то уравнение (9.1) порождает случайный процесс с нормальным распределением, так что коэффициенты β_2 и β_3 в аффинной безарбитражной модели NS – нормально распределенные случайные величины, коррелированные между собой.

Рассмотрим, к чему приводит модификация модели NS, предложенная Свенссоном. В этом случае $\phi_3 \neq 0$, $\phi_4 \neq 0$ и кривые доходности определяются выражениями (9.19) и (9.20). Сравнение представлений (9.12) и (9.19) дает следующую интерпретацию коэффициентов модели NSS:

$$\begin{aligned} \beta_{1y}(\tau) &= -\frac{A(\tau)}{\tau}, \quad \beta_2 = x_1\phi_1 + x_2\phi_2, \quad \beta_3 = x_2\phi_1, \\ \beta_4 &= x_3\phi_3 + x_4\phi_4, \quad \beta_5 = x_4\phi_3. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Отличие от модели NS в том, что здесь $\beta_2 \neq r$, но $\beta_2 + \beta_4 = r$.

Таким образом, аффинная безарбитражная модель Нельсона – Сигеля – Свенссона оказывается частным случаем четырехмерной аффинной безарбитражной модели с постоянной матрицей волатильности и матрицей K коэффициентов влияния, имеющей вид (9.17). Соответственно, модель Нельсона – Сигеля – это частный случай двухмерной аффинной безарбитражной модели с постоянной матрицей волатильности и матрицей K коэффициентов влияния, имеющей вид

$$K = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

Другими словами, модели NS и NSS – это частные случаи многомерной модели Васичека (9.2), если под этим понимать многомерную модель с постоянной матрицей волатильности и линейным дрейфом. Можно предположить, что матрицы (9.17) и (9.25) служат признаками моделей NS и NSS. Тогда можно предположить, что если в модели (9.1), (9.13) матрица K опре-

делена в виде (9.17) или (9.25), то кривые доходности будут иметь временную структуру NS или NSS. Так ли это?

Рассмотрим для примера двухмерную модель CIR (9.3) с матрицей коэффициентов влияния (9.25). Для этого зададим матрицы и вектора в соотношениях (9.13) следующим образом:

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1 \sqrt{x_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{x_2} \end{pmatrix}, \quad \lambda(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1 \lambda_1 \sqrt{x_1} \\ \sigma_2 \lambda_2 \sqrt{x_2} \end{pmatrix}.$$

Здесь для краткости обозначено $\sigma_i = \sqrt{2k_i D_i / \theta_i}$, $i = 1, 2$. Это дает в выражениях (9.13)

$$\varphi = 0, \quad \omega_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad \xi = 0, \quad \eta_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2^2 \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (9.14) и (9.15) принимают вид

$$A'(\tau) = B(\tau)^T K \theta, \quad A(0) = 0,$$

$$B_1'(\tau) = \phi_1 - (\sigma_1^2 \lambda_1 + \gamma) B_1(\tau) - \sigma_1^2 B_1(\tau)^2 / 2, \quad B_1(0) = 0,$$

$$B_2'(\tau) = \phi_2 + \gamma B_1(\tau) - (\sigma_2^2 \lambda_2 + \gamma) B_2(\tau) - \sigma_2^2 B_2(\tau)^2 / 2, \quad B_2(0) = 0.$$

В этом случае уравнения получились нелинейными. Второе и третье уравнения – это уравнения Риккати. Причем уравнение для $B_1(\tau)$ – уравнение с постоянными коэффициентами и может быть решено в явной аналитической форме. Уравнение для $B_2(\tau)$ – уравнение Риккати с переменным свободным коэффициентом и в явной аналитической форме не решается.

Обозначим для краткости $g = \sqrt{(\gamma + \sigma_1^2 \lambda_1)^2 + 2\phi_1 \sigma_1^2}$. Тогда решение уравнения для $B_1(\tau)$ записывается в виде

$$B_1(\tau) = \frac{2\phi_1}{\gamma + \sigma_1^2 \lambda_1 + g + \frac{2g}{e^{g\tau} - 1}}, \quad (9.26)$$

что существенно отличается от функции $B_1(\tau)$ в модели NS (9.18). То же самое можно сказать и о функции $B_2(\tau)$, которая находится только численно. Аналогичные результаты справедливы и для двухмерной модели Даффи – Кана (9.4), в которой функция $B_1(\tau)$ тоже имеет вид (9.26), но ее параметры g и σ_1 определяются иначе:

$$g_{\text{ДК}} = \sqrt{(\gamma + \sigma_{1,\text{ДК}}^2 \lambda_1)^2 + 2\phi_1 \sigma_{1,\text{ДК}}^2}, \quad \sigma_{1,\text{ДК}} = \sqrt{2k_1 D_1 / (\theta_1 - x_{1,\text{inf}})}.$$

Получается, что модель NS – безарбитражная только тогда, когда в уравнении (9.1) функция дрейфа $\mu(x)$ линейна относительно x , а матрица волатильности $\sigma(x)$ не зависит от x .

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕССА $X(t)$

При условии отсутствия арбитража уравнение (9.1) можно записать в виде

$$dX(t) = [-KX(t) + K\theta]dt + \sigma dW(t), \quad X(t_0) = X_{t_0}, \quad (9.27)$$

где K – $(n \times n)$ -матрица; θ , σ^i – n -мерные вектора и $W(t) = \{W(t); t \geq t_0\}$ – m -мерный винеровский процесс с компонентами $W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^m$, которые являются независимыми скалярными винеровскими процессами. Конкретный смысл вектора σ^i – i -й столбец матрицы σ . Как и всякое дифференциальное, уравнение (9.27) должно быть снабжено начальным условием, фиксирующим вектор $X(t)$ в некоторый начальный момент времени t_0 . Можно показать (Kloeden, 1992), что уравнение (9.27) допускает аналитическое решение в следующем виде:

$$X(t) = \Theta(t_0, t) \left[X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Theta^{-1}(t_0, s) K \theta ds + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t \Theta^{-1}(t_0, s) \sigma^i dW_s^i \right], \quad (9.28)$$

где $\Theta(t_0, t)$ – $(n \times n)$ -фундаментальная матрица решений, удовлетворяющая начальному условию $\Theta(t_0, t_0) = I$ и однородному матричному дифференциальному уравнению

$$d\Theta(t_0, t) = -K\Theta(t_0, t)dt, \quad (9.29)$$

которое может рассматриваться как n векторных дифференциальных уравнений. Заметим, что решить это уравнение относительно $\Theta(t_0, t)$ в явном виде также удастся. Поскольку уравнение (9.27) – это уравнение с постоянными коэффициентами, то фундаментальная матрица решений $\Theta(t_0, t)$ будет зависеть не от двух аргументов, а только от одного: $\Theta(t_0, t) = \Theta(t - t_0)$. Чтобы не получать громоздких выражений, приведем решение уравнений (9.27)–(9.29) для модели Нельсона – Сигеля, когда $n = m = 2$. В этом случае матрица K определяется формулой (9.25), а решение уравнения (9.29) имеет вид

$$\Theta(t - t_0) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma(t-t_0)} & \gamma(t-t_0)e^{-\gamma(t-t_0)} \\ 0 & e^{-\gamma(t-t_0)} \end{pmatrix},$$

$$\Theta^{-1}(t - t_0) = \begin{pmatrix} e^{\gamma(t-t_0)} & -\gamma(t-t_0)e^{\gamma(t-t_0)} \\ 0 & e^{\gamma(t-t_0)} \end{pmatrix},$$

поэтому выражение (9.28) приобретает форму

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\gamma(t-t_0)} [X_1(t_0) + \gamma(t-t_0)X_2(t_0)] \\ e^{-\gamma(t-t_0)} X_2(t_0) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} (1 - e^{-(t-t_0)\gamma})\theta_1 - \gamma(t-t_0)e^{-(t-t_0)\gamma}\theta_2 \\ (1 - e^{-(t-t_0)\gamma})\theta_2 \end{pmatrix} + \xi(t). \quad (9.30)$$

Здесь $\xi(t)$ – нормально распределенный случайный двумерный векторный процесс с компонентами, имеющими нулевые средние, и матрицей ковариации

$$\Omega(t - t_0) = E[(X(t) - E[X(t)])(X(t) - E[X(t)])^T] = E[\xi(t)\xi(t)^T].$$

В общем случае матрица $\Omega(t - t_0)$ вычисляется просто, однако ее элементы $[\Omega(t - t_0)]_{jk}$ оказались довольно громоздкими, поэтому приведем здесь их аналитические выражения только для упрощенного случая, когда недиагональные элементы матрицы волатильности σ – нулевые (если σ_{ki} – элементы матрицы σ , то $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$).

$$\begin{aligned} [\Omega(t - t_0)]_{11} &= \frac{1 - e^{-2\gamma(t-t_0)}}{4\gamma} (2\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) - \frac{e^{-2\gamma(t-t_0)}}{4\gamma} 2\gamma(t-t_0)(1 + \gamma(t-t_0))\sigma_{22}^2, \\ [\Omega(t - t_0)]_{12} &= [\Omega(t - t_0)]_{21} = \frac{1 - e^{-2\gamma(t-t_0)} - 2\gamma(t-t_0)e^{-2\gamma(t-t_0)}}{4\gamma} \sigma_{22}^2, \\ [\Omega(t - t_0)]_{22} &= \frac{1 - e^{-2\gamma(t-t_0)}}{2\gamma} \sigma_{22}^2. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Выражение (9.30) состоит из трех слагаемых: первое определяет убывающую со временем зависимость от начального состояния $X(t_0)$, второе – приближающееся со временем к стационарному среднему состоянию θ , а третье слагаемое – случайный процесс $\xi(t)$, имеющий нулевое среднее и стремящееся со временем к своему предельному виду матрицу ковариации $\Omega(t - t_0)$. Предельная матрица $\Omega(t - t_0)$ при $t - t_0 \rightarrow \infty$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega(\infty) &= \frac{1}{4\gamma} \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}, \\ \Omega_{11} &= 2\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{21} + 2\sigma_{12}\sigma_{22} + \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2, \\ \Omega_{12} &= 2\sigma_{11}\sigma_{21} + 2\sigma_{12}\sigma_{22} + \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2, \\ \Omega_{21} &= 2\sigma_{11}\sigma_{21} + 2\sigma_{12}\sigma_{22} + \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2, \\ \Omega_{22} &= 2(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2). \end{aligned}$$

Отметим, что из свойств матрицы $\Omega(t - t_0)$ следует, что компоненты вектора состояний $X(t)$ – коррелированные случайные процессы. Эта корреляция – межкомпонентная для некоторого фиксированного момента времени t . Вместе с тем важной является сериальная корреляция вектора состояний для различных моментов времени t и $t + s$.

$$\begin{aligned}\Omega(t, t+s) &= E[(X(t) - E[X(t)])(X(t+s) - E[X(t+s)])^T] = \\ &= E[\xi(t)\xi(t+s)^T] = \text{Cov}(X(t), X(t+s)).\end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, приведем эту матрицу только для диагональной матрицы волатильности σ . Кроме того, положим, что $t_0 = 0$.

$$[\Omega(t, t+s)]_{11} = \frac{e^{-\gamma s}}{4\gamma} ((1 - e^{-2\gamma t})(2\sigma_{11}^2 + (1 + \gamma s)\sigma_{22}^2) - 2\gamma t e^{-2\gamma t}(1 + (t+s))\sigma_{22}^2),$$

$$[\Omega(t, t+s)]_{12} = \frac{e^{-\gamma s}}{4\gamma} (1 - e^{-2\gamma t} - 2\gamma t e^{-2\gamma t})\sigma_{22}^2,$$

$$[\Omega(t, t+s)]_{21} = \frac{e^{-\gamma s}}{4\gamma} ((1 - e^{-2\gamma t})(1 + 2\gamma s) - 2\gamma t e^{-2\gamma t})\sigma_{22}^2,$$

$$[\Omega(t, t+s)]_{22} = \frac{e^{-\gamma s}}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t})\sigma_{22}^2.$$

В стационарном случае, т. е. при $t_0 \rightarrow -\infty$, ковариационная матрица $\text{Cov}(X(t), X(t+s))$ не зависит от t и имеет вид

$$\text{Cov}(X(t), X(t+s)) = \frac{e^{-\gamma s}}{4\gamma} \begin{pmatrix} 2\sigma_{11}^2 + (1 + \gamma s)\sigma_{22}^2 & \sigma_{22}^2 \\ (1 + \gamma s)\sigma_{22}^2 & 2\sigma_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\text{Cov}(X_2(t), X_2(t+s)) = \frac{\sigma_{22}^2}{2\gamma} e^{-\gamma s},$$

поэтому функция корреляции компоненты $X_2(t)$ зависит только от одного параметра γ , т. е.

$$\frac{\text{Cov}[X_2(t), X_2(t+s)]}{\text{Var}[X_2(t)]} = e^{-\gamma s}.$$

Значит, если функцию корреляции можно оценить, тогда можно оценить и параметр γ .

Поскольку процессы $X(t)$ и $\xi(t)$ имеют нормальное распределение, то знание математических ожиданий и матриц ковариаций дает их исчерпывающее вероятностное описание.

ЛАТЕНТНЫЕ ФАКТОРЫ

Ф. Диболдом и К. Ли (Diebold, Li, 2006) предложено вместо коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ в модели NS использовать зависящие от текущего времени t «динамические процессы» L_t, S_t и C_t , которые интерпретируются соответ-

ственно как факторы уровня (*level*), наклона (*slope*) и кривизны (*curvature*). Согласно вышеприведенному анализу (см. равенства (9.23)) эти процессы находятся в следующем соответствии с переменными состояния финансового рынка

$$\beta_1 \Rightarrow L_t = -\frac{A(\tau)}{\tau} \Big|_{\tau=T-t},$$

$$\beta_2 \Rightarrow S_t = \phi_1 X_1(t) + \phi_2 X_2(t) = r(t), \beta_3 \Rightarrow C_t = \phi_1 X_2(t). \quad (9.32)$$

Так что фактор уровня L_t в явной форме от текущего времени не зависит, а зависит только от срока до погашения и не является случайным. Факторы наклона и кривизны $\{S_t, C_t\}$ являются линейным преобразованием переменных состояния $\{X_1(t), X_2(t)\}$:

$$\begin{pmatrix} S_t \\ C_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}. \quad (9.33)$$

Поэтому $\{S_t, C_t\}$ – двумерный нормальный случайный процесс с математическим ожиданием

$$\begin{pmatrix} E[S_t] \\ E[C_t] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 E[X_1(t)] + \phi_2 E[X_2(t)] \\ \phi_1 E[X_2(t)] \end{pmatrix} \quad (9.34)$$

и ковариационной матрицей

$$\Sigma(t-t_0) = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{11}(t-t_0) & \Omega_{12}(t-t_0) \\ \Omega_{21}(t-t_0) & \Omega_{22}(t-t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{pmatrix}. \quad (9.35)$$

Элементы выражений (9.34) и (9.35) легко вычисляются на основании полученных выше формул (9.30) и (9.31).

Таким образом, при построении форвардной кривой и кривой доходности возникает проблема оценивания параметра γ и значений процессов L_t, S_t и C_t в текущем времени.

Поскольку процесс $X(t)$ переменных состояния удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (9.1) с дрейфом и волатильностью (9.13), то процесс $\{S_t, C_t\}$ порождается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\begin{pmatrix} dS_t \\ dC_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 - (\phi_1 S_t - \phi_2 C_t)/\phi_1^2 \\ \theta_2 - C_t/\phi_1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} dW(t)$$

или

$$\begin{pmatrix} dS_t \\ dC_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_t \\ C_t \end{pmatrix} \right] dt + \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} dW(t), \quad (9.36)$$

где

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \sigma_{11} + \phi_2 \sigma_{21} & \phi_1 \sigma_{12} + \phi_2 \sigma_{22} \\ \phi_1 \sigma_{21} & \phi_1 \sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Это уравнение линейное, так же как и уравнение (9.27), и может быть решено в явном виде. При этом фундаментальная матрица решений $\Theta(t - t_0)$ оказывается такой же, что и для процесса $\{X_1(t), X_2(t)\}$. Вообще говоря, явная зависимость факторов $\{S_t, C_t\}$ от времени находится из равенства (9.33), если туда подставить выражения переменных состояния $\{X_1(t), X_2(t)\}$, определяемых формулой (9.30). Пусть s – некоторый момент времени, такой, что $s < t$, а \bar{S} и \bar{C} – стационарные средние процессов $\{S_t, C_t\}$, соответственно, $\bar{S} = \phi_1 \theta_1 + \phi_2 \theta_2$, $\bar{C} = \phi_1 \theta_2$, тогда явные выражения для этих процессов будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} S_t \\ C_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_s + \gamma(t-s)C_s \\ C_s \end{pmatrix} e^{-\gamma(t-s)} + \begin{pmatrix} (1 - e^{-(t-s)\gamma})\bar{S} - \gamma(t-s)e^{-(t-s)\gamma}\bar{C} \\ (1 - e^{-(t-s)\gamma})\bar{C} \end{pmatrix} + \zeta(t, s),$$

где $\zeta(t, s)$ – двумерный случайный процесс, определяемый соотношением

$$\begin{aligned} \zeta(t, s) &= \Theta(t-s) \int_s^t \begin{pmatrix} e^{\gamma(u-s)} & -\gamma(u-s)e^{\gamma(u-s)} \\ 0 & e^{\gamma(u-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} dW_u = \\ &= \int_s^t \begin{pmatrix} (\rho_{11} + \gamma(t-u)\rho_{21}) & (\rho_{12} + \gamma(t-u)\rho_{22}) \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} e^{-\gamma(t-u)} dW_u. \end{aligned}$$

ОЦЕНИВАНИЕ ЛАТЕНТНЫХ ФАКТОРОВ

Как видно, процесс $\{S_t, C_t\}$ имеет нулевое среднее и матрицу ковариации $E[\zeta(t, s)\zeta(t, s)^T]$, которая вычисляется несложным интегрированием, но имеет громоздкие элементы, поэтому в общем виде здесь не приводится. Приведем лишь элементы этой матрицы для частного случая, когда матрица волатильностей переменных состояния σ – диагональная:

$$\begin{aligned} \left[\sum(t-s) \right]_{11} &= (4\gamma)^{-1} [\sigma_{22}^2 \phi_1^2 + 2(\sigma_{22}^2 \phi_1 \phi_2 + \sigma_{11}^2 \phi_1^2 + \sigma_{22}^2 \phi_2^2) - \\ &- e^{-2\gamma(t-s)} (\sigma_{22}^2 \phi_1^2 + 2\sigma_{22}^2 \phi_1 (\gamma(t-s)\phi_1 + \phi_2) + 2(\sigma_{11}^2 \phi_1^2 + \sigma_{22}^2 \phi_2^2) + \\ &+ 2(\sigma_{11}^2 \phi_1^2 + \sigma_{22}^2 (\gamma(t-s)\phi_1 + \phi_2^2))], \\ \left[\sum(t-s) \right]_{12} &= \left[\sum(t-s) \right]_{21} = (4\gamma)^{-1} [\sigma_{22}^2 \phi_1 (\phi_1 + 2\phi_2 - \\ &- e^{-2\gamma(t-s)} (\phi_1 + 2\gamma(t-s)\phi_1 + \phi_2))], \\ \left[\sum(t-s) \right]_{22} &= (2\gamma)^{-1} [(1 - e^{-2\gamma(t-s)})\sigma_{22}^2 \phi_1^2]. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\tilde{S}_t = S_t - \bar{S} = S_t - \phi_1 \theta_1 - \phi_2 \theta_2, \quad \tilde{C}_t = C_t - \bar{C} = C_t - \phi_1 \theta_2,$$

тогда представление (9.30) можно записать также в более компактном виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_t \\ \tilde{C}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_s + \gamma(t-s)\tilde{C}_s \\ \tilde{C}_s \end{pmatrix} e^{-\gamma(t-s)} + \zeta(t,s) = e^{-\gamma(t-s)} \begin{pmatrix} 1 & \gamma(t-s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}_s \\ \tilde{C}_s \end{pmatrix} + \zeta(t,s).$$

Из представлений (9.30) и (9.31) следует, что если пара $\{S_s, C_s\}$ известна для $s < t$, то оценкой наименьших квадратов пары $\{S_t, C_t\}$ является выражение

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{S}_t \\ \hat{C}_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_s + \gamma(t-s)C_s \\ C_s \end{pmatrix} e^{-\gamma(t-s)} + \begin{pmatrix} (1 - e^{-(t-s)\gamma})\bar{S} - \gamma(t-s)e^{-(t-s)\gamma}\bar{C} \\ (1 - e^{-(t-s)\gamma})\bar{C} \end{pmatrix} = \\ &= e^{-\gamma(t-s)} \begin{pmatrix} 1 & \gamma(t-s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_s \\ C_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - e^{-(t-s)\gamma} & -\gamma(t-s)e^{-(t-s)\gamma} \\ 0 & 1 - e^{-(t-s)\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{S} \\ \bar{C} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Эта оценка несмещенная, а ошибки имеют матрицу ковариации $\sum (t-s) = E[\zeta(t,s)\zeta(t,s)^T]$.

Согласно равенствам (9.11), (9.22), (9.32) доходность $y_{NS}(\tau, r)$ в момент времени t определяется выражением

$$\begin{aligned} y_t(\tau) &= L_t(\tau) + S_t \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + C_t \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right) = \\ &= L(\tau) + (b_2(\tau), b_3(\tau)) \cdot \begin{pmatrix} S_t \\ C_t \end{pmatrix} = L(\tau) + b(\tau)g(\tau). \end{aligned} \quad (9.38)$$

Здесь обозначено $b_2(\tau) = \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau}$, $b_3(\tau) = \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau}$, а также учтено, что фактор $L_t(\tau)$, как отмечалось ранее, не зависит от текущего времени t . Функции $b_2(\tau)$, $b_3(\tau)$ образуют вектор-строку $b(\tau) = (b_2(\tau), b_3(\tau))$, зависящую только от τ и не зависящую от t . Другой вектор, вектор-столбец факторов $g(t) = (S_t, C_t)^T$, зависит только от t и не зависит от τ .

Пусть котировки бескупонных облигаций производятся для n сроков до погашения τ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ по бизнес-датам t , $t = 1, 2, \dots, N$. Допустим также, что котировки $y_i(\tau_i)$ могут содержать некоторые случайные ошибки ε_{it} , тогда структуру выборки можно описать следующими соотношениями:

$$y_i(\tau_i) = L(\tau_i) + b(\tau_i)g(t) + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (9.39)$$

Составим из этих равенств n -вектор Y_t из котировок, полученных в дату t . Его структура будет представляться с помощью n -вектора L , $(n \times 2)$ -матри-

цы \mathcal{B} , составленной из векторов-строк $b(\tau_i)$ функций временной структуры и n -вектора ошибок ε_t :

$$\mathcal{B} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1-e^{-\gamma\tau_1}}{\gamma\tau_1} & \frac{1-e^{-\gamma\tau_1}}{\gamma\tau_1} - e^{-\gamma\tau_1} \\ \dots & \dots \\ \frac{1-e^{-\gamma\tau_n}}{\gamma\tau_n} & \frac{1-e^{-\gamma\tau_n}}{\gamma\tau_n} - e^{-\gamma\tau_n} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} \equiv \begin{pmatrix} L(\tau_1) \\ L(\tau_2) \\ \dots \\ L(\tau_n) \end{pmatrix}, \quad V \equiv E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T].$$

Так что

$$Y_t = \mathcal{L} + \mathcal{B}g(t) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (9.40)$$

Из полученного равенства можно оценить вектор факторов $g(t)$ следующим образом. Умножим равенство (9.40) на матрицу \mathcal{B}^T . В этом случае множителем при $g(t)$ станет квадратная (2×2) -матрица $\mathcal{B}^T \mathcal{B}$, невырожденная при $n > 3$. Затем находим обратную матрицу $(\mathcal{B}^T \mathcal{B})^{-1}$ и умножаем на нее слева модифицированное равенство (9.40), после чего структура вектора факторов $g(t)$ легко находится в виде

$$g(t) = (\mathcal{B}^T \mathcal{B})^{-1} \mathcal{B}^T (Y_t - \mathcal{L}) - (\mathcal{B}^T \mathcal{B})^{-1} \mathcal{B}^T \varepsilon_t.$$

Если случайные ошибки ε_{it} независимы для различных индексов i и t , вектор ошибок ε_t имеет диагональную матрицу ковариации

$$\text{Var}[\varepsilon_t] = \text{Diag}[\sigma_{\varepsilon_i}^2 \mid i = 1, 2, \dots, n]$$

и нулевое математическое ожидание, поэтому оценка МНК вектора факторов

$$\hat{g}(t) = (\mathcal{B}^T \mathcal{B})^{-1} \mathcal{B}^T (Y_t - \mathcal{L}) \quad (9.41)$$

является несмещенной и имеет матрицу ковариации

$$(\mathcal{B}^T \mathcal{B})^{-1} \mathcal{B}^T Y_t \text{Var}[\varepsilon_t] Y_t^T \mathcal{B} (\mathcal{B}^T \mathcal{B})^{-1}.$$

Если ε_{it} – нормально распределенный вектор, то эта оценка будет и оценкой ММП тоже. Заметим, что матрица \mathcal{B} – известна, так как ее строки – это $b(\tau)$, элементы которых имеют вид

$$b_1(\tau) = \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau}, \quad b_2(\tau) = \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau}.$$

Как следует из (9.32), для определения $L(\tau)$ нужна только функция $A(\tau)$ с обратным знаком. Равенство (9.14) для функции $A(\tau)$ собственно не является уравнением при известных функциях $B_1(\tau)$ и $B_2(\tau)$, определяемых выражениями (9.18). Если взять простейший случай, когда матрица вола-

тельности σ в уравнении (9.1) – постоянная и диагональная, матрица K задана в виде (9.25), а рыночные цены риска λ – константы, то производная функции $A(\tau)$ будет такой

$$-\frac{dA(\tau)}{d\tau} = \frac{d[\tau L(\tau)]}{d\tau} = (\gamma\theta_1 - \gamma\theta_2 - \sigma_1\lambda_1)\phi_1 \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} + (\gamma\theta_2 - \sigma_2\lambda_2) \left[(\phi_1 + \phi_2) \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \phi_1\tau e^{-\gamma\tau} \right] - \frac{\sigma_1^2}{2} \left(\phi_1 \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} \right)^2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \left((\phi_1 + \phi_2) \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \phi_1\tau e^{-\gamma\tau} \right)^2. \quad (9.42)$$

Таким образом, матрицу \mathcal{B} в соотношении (9.41) для оценки вектора факторов $\hat{g}(t)$ можно определить аналитически, правда, интегрирование выражения (9.42) приводит к громоздкому выражению.

Заметим, что в представлении (9.38) $L_t(\tau) \equiv L(\tau)$, с одной стороны, не зависит от t , а с другой – определяется аналитически, поэтому это представление можно переписать в виде

$$y_t(\tau) - L(\tau) = S_t \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + C_t \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right) = (b_2(\tau), b_3(\tau)) \cdot \begin{pmatrix} S_t \\ C_t \end{pmatrix}. \quad (9.43)$$

Пусть $\tilde{y}_t(\tau) \equiv y_t(\tau) - L(\tau)$, тогда векторное уравнение наблюдений (9.40) преобразуется к виду

$$\tilde{Y}_t = \mathcal{B}g(t) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (9.44)$$

Полученные соотношения позволяют построить оптимальную в средне-квадратическом процедуру последовательного оценивания переменных $\{S_t, C_t\}$, т. е. последовательно со временем оценивать кривые доходности в форме (9.38). Это можно сделать с помощью фильтра Калмана. Предположим, что доходности до погашения (9.39) котируются через равные промежутки времени Δ , так что в каждый момент времени $t = k\Delta, k = 0, 1, 2, \dots$, объявляется n доходностей $\{y_t(\tau_i), i = 1, 2, \dots, n\}$.

Не останавливаясь на деталях вывода фильтра Калмана (G. Welch, 2006), приведем его структуру, приспособленную к нашей проблеме.

Пусть

$$F = e^{-\gamma\Delta} \begin{pmatrix} 1 & \gamma\Delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда оценку (9.37) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{S}_t \\ \hat{C}_t \end{pmatrix}^- = F \begin{pmatrix} \hat{S}_{t-\Delta} \\ \hat{C}_{t-\Delta} \end{pmatrix} + (I - F) \begin{pmatrix} \bar{S} \\ \bar{C} \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица, а минус в верхнем индексе означает, что оценка определяется по информации, имеющейся до предыдущего момента $t - \Delta$ включительно. Матрица ковариации P_t^- этой оценки удовлетворяет соотношению

$$P_t^- = FP_{t-\Delta}F^T + \Sigma.$$

Здесь наличие минуса в верхнем индексе P_t^- означает то же самое, что и в предыдущем, а отсутствие такого индекса в $P_{t-\Delta}$ означает, что матрица ковариации определялась по информации, имеющейся до момента, указанного в нижнем индексе включительно. Σ – матрица ковариации $E[\zeta(t, t - \Delta)\zeta(t, t - \Delta)^T]$.

Пусть далее векторное уравнение наблюдений имеет вид (9.44).

Введем в рассмотрение матрицы

$$\mathcal{K}_t = P_t^- \mathcal{B}^T (\mathcal{B} P_t^- \mathcal{B}^T + V)^{-1}, \quad P_t = (I - \mathcal{K}_t \mathcal{B}) P_t^-.$$

Матрица \mathcal{K}_t определяет оптимальный компромисс вкладов в оценку переменных $\{S_t, C_t\}$ поступившего в момент t наблюдения Y_t и оценки этих переменных по информации, имеющейся до момента $t - \Delta$ включительно. Матрица ковариации P_t нужна для реализации следующей итерации алгоритма в момент времени $t + \Delta$. Заметим, что поскольку матрицы $F, \Sigma, H, V, \mathcal{L}$ не меняются со временем и считаются известными до начала процедуры оценивания, последовательности матриц $P_t^-, \mathcal{K}_t, P_t$ могут быть вычислены заранее до начала рекуррентной процедуры оценивания. Окончательная оценка переменных $\{S_t, C_t\}$ в момент t вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{S}_t \\ \hat{C}_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{S}_t \\ \hat{C}_t \end{pmatrix}^- + \mathcal{K}_t \tilde{Y}_t - \mathcal{K}_t \mathcal{B} \begin{pmatrix} \hat{S}_t \\ \hat{C}_t \end{pmatrix}^- = \mathcal{K}_t \tilde{Y}_t + (I - \mathcal{K}_t \mathcal{B}) \begin{pmatrix} \hat{S}_t \\ \hat{C}_t \end{pmatrix}^- = \\ &= \mathcal{K}_t (Y_t - \mathcal{L}) + (I - \mathcal{K}_t \mathcal{B}) \left[F \begin{pmatrix} \hat{S}_{t-\Delta} \\ \hat{C}_{t-\Delta} \end{pmatrix} + (I - F) \begin{pmatrix} \bar{S} \\ \bar{C} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Эта формула позволяет рекуррентно по ходу получения наблюдений Y_t вычислять оптимальную в среднеквадратическом оценку факторов $\{S_t, C_t\}$. К сожалению, для реализации такой процедуры необходимо знать все параметры модели, т. е. $\gamma, \phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2, \{\sigma_{ik}\}$, либо реализовывать процедуру их оценивания, что является отдельной проблемой. Исходный вектор оценок факторов $\{S_0, C_0\}$ можно получить с помощью (9.41) по исходному наблюдению Y_0 :

$$\begin{pmatrix} \hat{S}_0 \\ \hat{C}_0 \end{pmatrix} = (\mathcal{B}^T \mathcal{B})^{-1} \mathcal{B}^T (Y_0 - \mathcal{L}).$$

УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА ДЛЯ МОДЕЛИ НЕЛЬСОНА – СИГЕЛЯ – СВЕНССОНА

До сих пор считалось, что переменные состояния образуют двумерный процесс $\{X_1(t), X_2(t)\}$, а двумерный процесс $\{S_t, C_t\}$ – это процесс латентных (скрытых) переменных. Предположим теперь, что переменными состояниями являются $\{S_t, C_t\}$, которые порождаются уравнением (9.36). Связь этих переменных с бескупонной доходностью $y_t(\tau)$ устанавливается соотношениями (9.42) и (9.43). Когда на рынке отсутствуют арбитражные возможности, необходимо, чтобы цена бескупонной облигации $P(t, T, S_t, C_t)$ удовлетворяла уравнению временной структуры (O. Vasiček, 1977)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t, T, x)}{\partial t} + \mu(x)^T \frac{\partial P(t, T, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\sigma(x)^T \frac{\partial^2 P(t, T, x)}{\partial x^2} \sigma(x) \right) - \\ - r(t)P(t, T, x) = \lambda(t, x)^T \sigma(x)^T \frac{\partial P(t, T, x)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Это уравнение должно решаться с краевым условием $P(T, T, S_T, C_T) = 1$ для любых состояний $\{S_T, C_T\}$. Здесь для краткости использованы обозначения: $x \equiv \{S, C\}$; $\mu(x)$ и $\sigma(x)$ – соответственно вектор дрейфа и матрица волатильности уравнения (9.36); $r(t)$ – краткосрочная процентная ставка; вектор-функция $\lambda(t, x)$ определяет рыночную цену риска. Поскольку между ценой облигации и ее доходностью имеется известное соотношение $\ln P(t, T, S_t, C_t) = -\tau y_t(\tau | S_t, C_t)$, это уравнение удобнее записать для доходности, а не цены облигации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\tau y(\tau | x)]}{\partial \tau} - \frac{\partial [\tau y(\tau | x)]}{\partial x} [\mu(x) - \sigma(x)\lambda(x)] + \\ + \frac{e^{\tau y(\tau | x)}}{2} \text{tr} \left(\sigma(x)^T \frac{\partial^2 e^{-\tau y(\tau | x)}}{\partial x^2} \sigma(x) \right) = r. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Подставив в это уравнение функцию $y(\tau | S, C)$, определяемую выражением (9.38), можно найти условия отсутствия арбитража для кривой доходности Нельсона – Сигеля. Выпишем для удобства элементы уравнения (9.46)

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\tau y(\tau | x)]}{\partial \tau} &= \tau \frac{dL(\tau)}{d\tau} + L(\tau) + Se^{-\gamma\tau} + C\gamma\tau e^{-\gamma\tau}, \\ \frac{\partial [\tau y(\tau | x)]}{\partial x} &\equiv \left(\frac{\partial [\tau y(\tau | S, C)]}{\partial S}, \frac{\partial [\tau y(\tau | S, C)]}{\partial C} \right) = \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma}, \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right), \\ \mu(x) - \sigma(x)\lambda(x) &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \bar{S} \\ \bar{C} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S \\ C \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь через ρ_{ij} обозначены элементы матрицы волатильности уравнения (9.36). Как было выяснено ранее, для получения кривой доходности Нельсона – Сигеля необходимо, чтобы $\sigma(x)$ и $\lambda(x)$ были постоянными (не зависели от $\{S, C\}$).

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} [\mu(x) - \sigma\lambda] &= S(1 - e^{-\gamma\tau}) - C\gamma\tau e^{-\gamma\tau} - \bar{S}(1 - e^{-\gamma\tau}) + \bar{C}\gamma\tau e^{-\gamma\tau} - \\ &- \frac{1}{\gamma} [(\rho_{11}\lambda_1 + \rho_{12}\lambda_2)(1 - e^{-\gamma\tau}) + (\rho_{21}\lambda_1 + \rho_{22}\lambda_2)(1 - e^{-\gamma\tau} - \gamma\tau e^{-\gamma\tau})]. \end{aligned}$$

Поскольку $y(\tau | S, C)$ линейно зависит от S и C , то

$$e^{\tau y(\tau | x)} \frac{\partial^2 e^{-\tau y(\tau | x)}}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x}$$

не зависит от этих переменных, и третье слагаемое в левой части уравнения (9.46) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} \left(\sigma(x)^T \frac{\partial^2 P(t, T, x)}{\partial x^2} \sigma(x) \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \sigma \sigma^T \left(\frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \right)^T = \\ &= \frac{\tau^2}{2} \left[\left(\frac{(1 - e^{-\gamma\tau})}{\gamma\tau} \rho_{11} + \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right) \rho_{21} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(1 - e^{-\gamma\tau})}{\gamma\tau} \rho_{12} + \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right) \rho_{22} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, подстановка в уравнение (9.46) доходности $y(\tau | S, C)$, определяемой выражением (9.38), преобразовывает это уравнение к виду

$$\begin{aligned} \tau \frac{dL(\tau)}{d\tau} + L(\tau) + S - \bar{S}(1 - e^{-\gamma\tau}) + \bar{C}\gamma\tau e^{-\gamma\tau} + \\ + \frac{1}{\gamma} [(\rho_{11}\lambda_1 + \rho_{12}\lambda_2)(1 - e^{-\gamma\tau}) + (\rho_{21}\lambda_1 + \rho_{22}\lambda_2)(1 - e^{-\gamma\tau} - \gamma\tau e^{-\gamma\tau})] + \\ + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{(1 - e^{-\gamma\tau})}{\gamma} \rho_{11} + \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right) \rho_{21} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{(1 - e^{-\gamma\tau})}{\gamma} \rho_{12} + \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right) \rho_{22} \right)^2 \right] = r. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Заметим, что фактор C исчез из полученного выражения и оно включает только среднее значение этого фактора \bar{C} . Равенство (9.47) должно удов-

летворяются для любых значений факторов $L(\tau)$ и S_t . Кроме этого, отметим, что от текущего времени t в этом выражении зависят только две величины: S_t и $r(t)$. Поэтому, чтобы доходность $y(\tau | S, C)$, определяемая выражением (9.38), удовлетворяла уравнению (9.46), необходимо выполнение двух условий, из которых однозначно определяются факторы S_t и $L(\tau)$: фактор S_t просто равен краткосрочной процентной ставке

$$S_t = r(t), \quad (9.48)$$

что полностью согласуется с равенствами (9.32), а фактор $L(\tau)$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$\begin{aligned} \frac{d[\tau L(\tau)]}{d\tau} = & \bar{S}(1 - e^{-\gamma\tau}) - \bar{C}\gamma\tau e^{-\gamma\tau} - \frac{1}{\gamma}[(\rho_{11}\lambda_1 + \rho_{12}\lambda_2)(1 - e^{-\gamma\tau}) + \\ & + (\rho_{21}\lambda_1 + \rho_{22}\lambda_2)(1 - e^{-\gamma\tau} - \gamma\tau e^{-\gamma\tau})] - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{(1 - e^{-\gamma\tau})}{\gamma} \rho_{11} + \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right) \rho_{21} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{(1 - e^{-\gamma\tau})}{\gamma} \rho_{12} + \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right) \rho_{22} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (9.49)$$

которое, по существу, не является даже уравнением, так как из него простым интегрированием находится $\tau L(\tau)$. Вычисление интеграла от (9.49) – несложное, но приводит к громоздкому результату и поэтому здесь не приводится.

Итак, условия отсутствия арбитража в модели Нельсона – Сигеля однозначно определяют факторы S_t и $L(\tau)$ с помощью равенств (9.48) и (9.49). Фактор C_t на первый взгляд остался неопределенным, но и на него имеются ограничения. Рассмотрим их.

Вернемся сначала к исходной модели (9.1), для которой доходность определяется соотношениями (9.9) с помощью функций временной структуры $A(\tau)$, $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ и факторов $X_1(t)$, $X_2(t)$. Условия отсутствия арбитража в этой модели сводятся к тому, что функции $A(\tau)$, $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ должны удовлетворять уравнениям (9.14) и (9.15) и должно выполняться равенство $\phi_1 X_1(t) + \phi_2 X_2(t) = r(t)$, в котором постоянные весовые коэффициенты ϕ_1 и ϕ_2 осуществляют согласование факторов $\{X_1(t), X_2(t)\}$ с краткосрочной ставкой $r(t)$. Факторы $\{X_1(t), X_2(t)\}$ могут рассматриваться как некоторые бескупонные доходности (Duffie, Kan, 1996), комбинация которых и составляет ставку $r(t)$. Из соотношений (9.23) и (9.32) следует, что $S_t = \phi_1 X_1(t) + \phi_2 X_2(t) = r(t)$, $C_t = \phi_1 X_2(t)$. Так что фактор C_t определяется также однозначно при выполнении условия отсутствия арбитража.

Обратим внимание, что модель Нельсона – Сигеля является частным случаем двумерной модели (9.1), когда в ней функция дрейфа $\mu(x)$ – аффин-

ная относительно переменных состояния (см. (9.13)), а матрица волатильности – постоянная. Если в этом случае принять $\phi_1 = 1$, а $\phi_2 = 0$, то получим, что $S_t = X_1(t)$, $C_t = X_2(t)$, и имеем полное совпадение модели Нельсона – Сигеля с аффинной версией двумерной модели (9.1).

ОБ УСЛОВИЯХ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА ДЛЯ РАСШИРЕНИЯ СВЕНССОНА

Рассмотрим теперь, к каким изменениям условия отсутствия арбитража приводит расширение Свенссона. Как было сказано, в модификации Свенссона форвардную кривую можно вычислять по формуле (9.12), что влечет следующий вид кривой доходности:

$$y(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right) + \\ + \beta_3 \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} + \beta_4 \left(\frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - e^{-\delta\tau} \right). \quad (9.50)$$

Как было показано выше, из соображений отсутствия арбитражных возможностей коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ не могут быть константами. Соответственно, переобозначим их: $\beta_0 = L(\tau)$, $\beta_1 = S_t$, $\beta_2 = C_t$, $\beta_3 = G_t$, $\beta_4 = H_t$. Так что

$$y(\tau) = L(\tau) + S_t \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + C_t \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right) + \\ + G_t \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} + H_t \left(\frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - e^{-\delta\tau} \right). \quad (9.51)$$

Используем это переобозначение в представлении (9.50) и подставим полученное выражение (9.51) в уравнение (9.46), в котором вектор состояния x – четырехмерный, $x = (S_t, C_t, G_t, H_t)^T$. Функция дрейфа

$$\mu(x) = K(\theta - x) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{S} - S_t \\ \bar{C} - C_t \\ \bar{G} - G_t \\ \bar{H} - H_t \end{pmatrix},$$

где матрица K определяется равенством (9.17), а $(\bar{S}, \bar{C}, \bar{G}, \bar{H})^T$ – вектор стационарных средних случайных коэффициентов (S_t, C_t, G_t, H_t) . Матрица волатильности $\sigma(x)$ – (4×4) –матрица с постоянными элементами, $\sigma(x) = \sigma$, а вектор рыночных цен риска – 4-вектор с постоянными элементами, $\lambda(x) = \lambda$.

Тогда явная форма элементов уравнения (9.46) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial \tau} &= \frac{d[\tau L(\tau)]}{d\tau} + S_t e^{-\gamma\tau} + C_t \gamma \tau e^{-\gamma\tau} + G_t e^{-\delta\tau} + H_t \delta \tau e^{-\delta\tau}, \\
\frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} &= \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma}, \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau}, \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta}, \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau} \right), \quad (9.52) \\
\frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial \tau} - \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \mu(x) &= \\
= \frac{d[\tau L(\tau)]}{d\tau} - \bar{S}(1 - e^{-\gamma\tau}) - \bar{G}(1 - e^{-\delta\tau}) + \bar{C}\gamma\tau e^{-\gamma\tau} + \bar{H}\delta\tau e^{-\delta\tau} + S_t + G_t. \\
e^{\tau y(\tau | x)} \frac{\partial^2 e^{-\tau y(\tau | x)}}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x}, \\
\frac{e^{\tau y(\tau | x)}}{2} \text{tr} \left(\sigma(x)^T \frac{\partial^2 e^{-\tau y(\tau | x)}}{\partial x^2} \sigma(x) \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \sigma \sigma^T \left(\frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \right)^T.
\end{aligned}$$

Заметим, что вектор $\frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x}$ ввиду линейности $y(\tau | x)$ относительно факторов S_t, C_t, G_t, H_t не зависит от этих факторов. Кроме того, явный вид уравнения (9.46), оказывается, вообще не содержит переменных C_t и H_t . При этом поскольку уравнение должно выполняться при любых значениях независимых переменных τ, S_t, C_t, G_t, H_t , то оно распадается на две части – уравнения относительно факторов S_t и G_t и уравнения относительно функции от переменной $\tau, L(\tau)$. От текущего времени t зависимы только $r(t), S_t$ и G_t , остальные компоненты уравнения зависят от τ . Поэтому из уравнения (9.46) получаем два соотношения, определяющих условия отсутствия арбитража:

$$S_t + G_t = r(t), \quad (9.53)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\tau L(\tau)]}{d\tau} &= \bar{S}(1 - e^{-\gamma\tau}) + \bar{G}(1 - e^{-\delta\tau}) - \bar{C}\gamma\tau e^{-\gamma\tau} - \bar{H}\delta\tau e^{-\delta\tau} - \\
&- \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \sigma \lambda - \frac{1}{2} \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \sigma \sigma^T \left(\frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \right)^T. \quad (9.54)
\end{aligned}$$

Вектор $\frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x}$ зависит только от переменной τ и параметров γ и δ и определяется равенством (9.52), это явное выражение в формуле (9.54) не используется из-за громоздкости.

Соотношение (9.53) практически является условием отсутствия арбитража – сумма факторов S_t и G_t должна быть равна краткосрочной процентной ставке $r(t)$ в любой момент времени t .

Соотношение (9.54) фактически уравнением не является, так как функция $L(\tau)$ находится из него простым интегрированием.

Что касается факторов C_t и H_t , то для выяснения их значений следует снова обратиться к исходной модели (9.1), (9.13) в ее четырехмерной версии. Тогда согласно соотношениям (9.24) получаем

$$S_t = \phi_1 X_1(t) + \phi_2 X_2(t), C_t = \phi_1 X_2(t), G_t = \phi_3 X_3(t) + \phi_4 X_4(t), H_t = \phi_3 X_4(t).$$

При этом подтверждается одно из основных свойств доходности

$$\lim_{T \rightarrow t} y(t, T, r) = \phi_1 X_1(t) + \phi_2 X_2(t) + \phi_3 X_3(t) + \phi_4 X_4(t) = r(t).$$

Строго говоря, представление (9.51) не совпадает с расширением Свенссона, так как в нем имеется «лишнее» слагаемое (с фактором G_t). Возможно, наличие этого слагаемого улучшит аппроксимацию кривой доходности – это вопрос открытый. Однако следует выяснить, каковы условия отсутствия арбитража без этого «лишнего» слагаемого, приняв в качестве кривой доходности выражение

$$y(\tau) = L(\tau) + S_t \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + C_t \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right) + H_t \left(\frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - e^{-\delta\tau} \right), \quad (9.55)$$

в точности соответствующее расширению Свенссона. В этом случае имеем три фактора $X(t) = (S_t, C_t, H_t)$. Функция дрейфа будет такой

$$\mu(x) = K(\theta - x) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{S} - S_t \\ \bar{C} - C_t \\ \bar{H} - H_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\bar{S} - \bar{C} - S_t + C_t) \\ \gamma(\bar{C} - C_t) \\ \delta(\bar{H} - H_t) \end{pmatrix}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (9.46) и вычислим его компоненты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial \tau} &= \frac{d[\tau L(\tau)]}{d\tau} + S_t e^{-\gamma\tau} + C_t \gamma \tau e^{-\gamma\tau} + H_t \delta \tau e^{-\delta\tau}, \\ \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} &= \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma}, \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau}, \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau} \right), \\ \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial \tau} - \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \mu(x) &= \frac{d[\tau L(\tau)]}{d\tau} - \\ &- \bar{S}(1 - e^{-\gamma\tau}) + \bar{C} \gamma \tau e^{-\gamma\tau} - \bar{H}(1 - e^{-\delta\tau}(1 + \delta\tau)) + S_t + H_t(1 - e^{-\delta\tau}). \end{aligned}$$

Получается, что в этом случае условия отсутствия арбитража сводятся к следующему:

$$S_t + H_t(1 - e^{-\delta\tau}) = r(t), \quad (9.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\tau L(\tau)]}{d\tau} = & \bar{S}(1 - e^{-\gamma\tau}) - \bar{C}\gamma\tau e^{-\gamma\tau} + \bar{H}(1 - e^{-\delta\tau}(1 + \delta\tau)) - \\ & - \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \sigma \lambda - \frac{1}{2} \frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \sigma \sigma^T \left(\frac{\partial[\tau y(\tau | x)]}{\partial x} \right)^T. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Если соотношение (9.57) – это уже известное, встречавшееся ранее, то равенство (9.56) является необычным. Из него получается, что краткосрочная ставка зависит от срока до погашения, чего, конечно, быть не может. Поэтому расширение Свенссона в его строгом виде (9.55) (без «лишнего» слагаемого) приводит к неосуществимому условию отсутствия арбитража.

ВЫВОДЫ

Таким образом, требование выполнения условий отсутствия арбитража уточняет модель Нельсона – Сигеля – Свенссона в том смысле, что придает коэффициентам этой модели явный экономический смысл: свободный коэффициент должен быть функцией срока до погашения τ , а остальные коэффициенты должны зависеть от переменных состояния рынка $\{x_i\}$, которые, в свою очередь, являются выборочными значениями случайных процессов $\{X_i(t)\}$ в момент t , для которого конструируется временная структура, т. е. случайными величинами. Заметим, что описание случайных процессов $\{X_i(t)\}$ производится при вероятностной мере P , т. е. с учетом рыночных цен риска $\lambda(x)$. Сама модель является представителем семейства аффинных моделей доходности и порождается двухмерной моделью краткосрочной процентной ставки для модели Нельсона – Сигеля или четырехмерной моделью краткосрочной процентной ставки для модели Нельсона – Сигеля – Свенссона. Случайные процессы $\{X_i(t)\}$, лежащие в основе NS- и NSS-моделей, порождаются линейными стохастическими дифференциальными уравнениями, в связи с чем переменные состояния рынка $\{x_i\}$ имеют нормальное распределение и могут с положительной вероятностью принимать отрицательные значения, что является определенным недостатком моделей NS и NSS.

Отметим, что зависимость коэффициентов NS-модели от текущего времени обсуждалась Ф. Диболдом и К. Ли (Diebold, Li, 2006). Связь NS-модели с аффинными безарбитражными моделями, основанными на трехфакторном случайном процессе при нейтральной к риску Q -мере, рассмотрена Й. Христенсеном, Ф. Диболдом и Г. Рюдбашем (Christensen, Diebold, Rudebusch, 2008). Применение аффинной безарбитражной NS-модели к реальным задачам динамики обменного курса валют описано Йей Ваем (Yu, 2012).

Глава 10

КВАДРАТИЧНЫЕ МОДЕЛИ ДОХОДНОСТИ

Обычно отправным пунктом при анализе квадратичных моделей временной структуры являются следующие предположения. Считается, что существует некоторое пространство состояний финансового рынка, описываемое n -мерным вектором x , в котором состояние эволюционирует согласно диффузионному случайному процессу $x(t)$, описываемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = \xi(x(t))dt + \sigma(x(t))dW(t), \quad t > t_0, \quad x(t_0) = x_0,$$

с векторной функцией дрейфа $\xi(x)$ и матрицей волатильности $\sigma(x)$, $W(t)$ – n -мерный вектор независимых винеровских процессов. Предполагается, что краткосрочная ставка доходности $r(t)$ связана с состоянием финансового рынка $x(t)$ соотношением (верхний индекс T означает транспонирование)

$$r(t) = \alpha + x(t)^T \Psi x(t) + x(t)^T \psi, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \quad \Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \psi \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \quad (10.1)$$

При этом считается, что состояние финансового рынка (вектор $x(t)$) непосредственно не наблюдается, а процентная ставка $r(t)$ – наблюдаемый процесс. Так что $x(t)$ – совокупность неких латентных переменных, которые сами не наблюдаются, но влияют на временную структуру доходности активов, стоимость которых определяется процентной ставкой. Заметим, что поскольку по экономическому смыслу процентная ставка $r(t)$ принимает положительные значения для любых ненулевых $x(t)$, то естественно считать матрицу Ψ положительно определенной. Кроме того, поскольку $x(t)^T \Psi x(t) = x(t)^T \Psi^T x(t)$, для любых $x(t)$, не нарушая общности, можно считать матрицу Ψ также симметрической. Согласно (10.1) процентная ставка принимает свое минимальное значение, когда $2\Psi x(t) + \psi = 0$, т. е. при $x(t) = x_{\min} \equiv -\Psi^{-1}\psi/2$, и минимальное значение процентной ставки в этой модели равно $r_{\min} \equiv \alpha - \psi^T \Psi^{-1} \psi/4$.

КВАДРАТИЧНЫЕ МОДЕЛИ С ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ДРЕЙФА

Модель (10.1), называемая квадратичной, составляет некоторую конкуренцию аффинным моделям временной структуры доходности, которые допускают аналитическое представление решений, но довольно неточно описывают реальные временные структуры доходности. Считается, что квадратичная модель будет приспосабливаться к реальным временным структурам более точно. Попытаемся рассмотреть этот вопрос для класса диффузионных процессов $x(t)$ с линейной функцией дрейфа $\xi(x) = k(\vartheta - x)$ и постоянной матрицей волатильности $\sigma(x) = \sigma$:

$$dx(t) = k(\vartheta - x(t))dt + \sigma dW(t), \quad t > t_0, \quad x(t_0) = x_0. \quad (10.2)$$

Как это принято, временную структуру доходности находят с помощью уравнения временной структуры (Vasiček, 1977), или, как его иногда называют (Ahn, Dittmar, Gallant, 2001), фундаментального уравнения с частными производными для цен бескупонных облигаций $P(r(x), t; T)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} k(\vartheta - x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \sigma \sigma^T \right) - r(x) P(r(x), t; T) = \\ = \frac{\partial P}{\partial x} \sigma \lambda(x), \quad P(r(x), t; T) = 1. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Здесь T – дата погашения облигации; $\lambda(x)$ – вектор-функция рыночной цены риска. Цена облигации $P(r(x), t; T)$ определяется как условное математическое ожидание по объективной вероятностной мере при фиксированном текущем состоянии, т. е. при фиксированных t и $r(x)$, а следовательно, и $x(t)$. Рыночная цена риска задается вектором $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x$, где λ_0 и λ_1 – вектор и матрица постоянных коэффициентов. Решение уравнения (10.3) имеет достаточно простой вид

$$P(r(x), t; t + \tau) = \exp[-x^T a(\tau)x - x^T b(\tau) - c(\tau)], \quad (10.4)$$

где для удобства введен символ $\tau = T - t$ для обозначения срока до погашения облигации, а также $(n \times n)$ -матрица $a(\tau)$, n -вектор $b(\tau)$ и скалярная функция $c(\tau)$. Заметим, что, с одной стороны, с возрастанием компонент вектора x (точнее с возрастанием $x^T \Psi x$) процентная ставка r увеличивается. С другой стороны, по экономическому смыслу с увеличением процентной ставки цена актива $P(r(x), t; t + \tau)$ должна уменьшаться. Следовательно, с увеличением $x^T \Psi x$ величина $x^T a(\tau)x$ тоже должна увеличиваться. Кроме того, для любых x справедливо равенство $x^T a(\tau)x = x^T a(\tau)^T x$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что матрица $a(\tau)$ является положительно определенной и симметрической. Функции $a(\tau)$, $b(\tau)$ и $c(\tau)$ находятся из следующей системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{da(\tau)}{d\tau} + 2a(\tau)\sigma\sigma^T a(\tau) + a(\tau)(k + \sigma\lambda_1) + (k + \sigma\lambda_1)^T a(\tau) - \Psi &= 0, \\
\frac{db(\tau)}{d\tau} + 2a(\tau)\sigma\sigma^T b(\tau) + (k + \sigma\lambda_1)^T b(\tau) - 2a(\tau)(k\vartheta - \sigma\lambda_0) - \psi &= 0, \\
\frac{dc(\tau)}{d\tau} - \text{tr}[\sigma\sigma^T a(\tau)] + \frac{1}{2}b(\tau)^T \sigma\sigma^T b(\tau) - b(\tau)^T (k\vartheta - \sigma\lambda_0) - \alpha &= 0
\end{aligned} \quad (10.5)$$

с начальными условиями $a(0) = 0$, $b(0) = 0$, $c(0) = 0$.

Чаще всего для представления временной структуры процентных ставок доходности используют кривую доходности $y(\tau, x)$ или форвардную кривую $f(\tau, x)$, которые согласно определениям выражаются через цену бескупонной облигации по формулам

$$\begin{aligned}
y(\tau, x) &= -\frac{\ln P(x, t, t + \tau)}{\tau} = \frac{x^T a(\tau)x + b(\tau)^T x + c(\tau)}{\tau}, \\
f(\tau, x) &= -\frac{\partial \ln P(x, t, t + \tau)}{\partial \tau} = x^T \frac{da(\tau)}{d\tau} x + \left(\frac{db(\tau)}{d\tau} \right)^T x + \frac{dc(\tau)}{d\tau}.
\end{aligned}$$

К сожалению, система уравнений (10.5) в общем случае не имеет аналитического решения, поэтому особенности кривых доходности $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$ не удастся исследовать аналитическим путем, хотя численный анализ не представляет особого труда, если заданы параметры k , ϑ , σ , α , ψ , Ψ , λ_0 и λ_1 . Тем не менее в некоторых частных случаях аналитические решения найти удастся и некоторый анализ провести удастся. Рассмотрим эти случаи.

Однако сначала представим математически эквивалентное, но более компактное описание рассматриваемой квадратичной модели. Поскольку матрица Ψ положительно определенная и симметрическая, ее собственные числа положительные, а она имеет диагональную форму $\Psi = L^T \Phi L$, где Φ – диагональная матрица, по диагонали которой расположены положительные собственные числа $\{\phi\}$; L – матрица нормированных собственных векторов, которая обладает следующими свойствами: $L^T = L^{-1}$, $L^T L = L L^T = I$, где I – единичная матрица. Преобразуем пространство состояний $\{x\}$ в пространство состояний $\{X\}$ с помощью линейного преобразования $X = Lx - L\Psi^{-1}\psi/2$. Тогда вместо модели процентной ставки (10.1) и (10.2) можно получить эквивалентное описание процентной ставки соотношениями

$$dX(t) = K(\vartheta - X(t)) dt + S dW(t), \quad t > t_0, \quad X(t_0) = X_0, \quad (10.6)$$

$$r(t) = r_{\min} + X(t)^T \Phi X(t), \quad X(t) \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}^1, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (10.7)$$

где обозначено $K = LkL^T$; $\vartheta = L\vartheta + L\Psi^{-1}\psi/2$; $S = L\sigma$; $X_0 = Lx_0 - L\Psi^{-1}\psi/2$. Модель (10.6) и (10.7) отличается от модели (10.1) и (10.2) более простым, но эквивалентным представлением процентной ставки $r(t)$ через другие латентные переменные $\{X\}$, взаимно однозначно связанные с исходными латентными

переменными $\{x\}$. Свойства диффузионных процессов $X(t)$ и $x(t)$ совпадают с точностью до значений факторов уравнений (10.2) и (10.6). Модель (10.6) и (10.7) приводит к уравнению (10.3) для функции $P(r(X), t; t + \tau)$, в котором вместо k, ϑ и σ используются K, θ и S соответственно, а также вместо $\lambda(x)$ – функция рыночной цены риска $\Lambda(X) = \Lambda_0 + \Lambda_1 X$, где вектор Λ_0 и матрица Λ_1 постоянных коэффициентов определяются формулами $\Lambda_0 = \lambda_0 + \lambda_1 \Psi^{-1} \psi / 2$, $\Lambda_1 = \lambda_1 L^T$. Решение этого уравнения имеет вид, аналогичный выражению (10.4)

$$P(r(X), t; t + \tau) = \exp[-X^T A(\tau) X - X^T B(\tau) - C(\tau)],$$

где функции $A(\tau)$, $B(\tau)$ и $C(\tau)$ находятся из системы

$$\begin{aligned} \frac{dA(\tau)}{d\tau} + 2A(\tau)SS^T A(\tau) + A(\tau)(K + S\Lambda_1) + (K + S\Lambda_1)^T A(\tau) - \Phi &= 0, \\ \frac{dB(\tau)}{d\tau} + 2A(\tau)SS^T B(\tau) + (K + S\Lambda_1)^T B(\tau) - 2A(\tau)(K\theta - S\Lambda_0) &= 0, \\ \frac{dC(\tau)}{d\tau} - \text{tr}[SS^T A(\tau)] + \frac{1}{2} B(\tau)^T SS^T B(\tau) - B(\tau)^T (K\theta - S\Lambda_0) - r_{\min} &= 0 \end{aligned} \quad (10.8)$$

с начальными условиями $A(0) = 0$, $B(0) = 0$, $C(0) = 0$. Эта система, так же как и система (10.5), в общем случае в аналитическом виде не разрешима. Поэтому, прежде чем переходить к частным случаям, которые разрешимы, попытаемся обсудить в общих чертах свойства решений системы (10.8), если они существуют.

В литературе достаточно много внимания уделено свойствам кривых доходности и форвардных кривых для аффинных моделей временных структур (Медведев, 2005). В этом классе моделей кривые $y(\tau)$ и $f(\tau)$ стартуют из одной точки (это общее свойство по определению этих кривых, оно основано на том, что краткосрочная доходность равна процентной ставке r) и при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к одному и тому же постоянному пределу. Достаточным условием последнего может служить тот факт, что при $\tau \rightarrow \infty$ функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ имеют конечные пределы $A(\infty)$ и $B(\infty)$, что обеспечивает независимость предельных значений $y(\infty)$ и $f(\infty)$ от текущих (начальных) значений переменных состояния рынка $X(t)$ и предельное равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dA(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A(\tau)}{\tau} = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dB(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{B(\tau)}{\tau} = 0.$$

При этом предельные значения $A = A(\infty)$ и $B = B(\infty)$ могут быть найдены из системы алгебраических матричных уравнений

$$\begin{aligned} 2ASS^T A + A(K + S\Lambda_1) + (K + S\Lambda_1)^T A &= \Phi, \\ 2ASS^T B + (K + S\Lambda_1)^T B - 2A(K\theta - S\Lambda_0) &= 0. \end{aligned}$$

Наконец, предельное свойство функции $C(\tau)$ находится из третьего уравнения системы

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dC(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{C(\tau)}{\tau} = \text{tr}[SS^T A] - \frac{1}{2} B^T SS^T B + B^T (K\theta - S\Lambda_0) + r_{\min}.$$

Используя перечисленные свойства функций временной структуры $A(\tau)$, $B(\tau)$ и $C(\tau)$, можно установить соответствующие свойства кривых $y(\tau)$ и $f(\tau)$: при $\tau = 0$ они стартуют из одной общей точки $y(0) = f(0) = r(X)$ и при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к одному общему пределу

$$y(\infty) = f(\infty) = \text{tr}[SS^T A(\infty)] - \frac{1}{2} B(\infty)^T SS^T B(\infty) + B(\infty)^T (K\theta - S\Lambda_0) + r_{\min}.$$

Характер поведения кривых между этими предельными точками существенно зависит от стартового значения процентной ставки $r(X)$, как это имеет место в аффинных моделях (Медведев, 2005). Однако поскольку некоторому фиксированному значению ставки $r(X) = r_0$ соответствует некоторое множество векторов X , вполне возможна зависимость кривых и от величины векторов из этого множества. Для того чтобы выяснить этот вопрос, рассмотрим частный случай, допускающий аналитическое решение системы (10.8).

Сделаем следующие предположения.

Предположение 1. Процесс латентных переменных $X(t)$, порождаемый уравнением (10.6), является нормальным процессом со стационарным математическим ожиданием θ . Предположим, что $\theta = 0$. Заметим, что такое предположение принимается довольно часто, например в моделях Г. Константинидеса (Constantinides, 1992) и М. Лайпоулда и Л. Ву (M. Leippold, L. Wu, 2003).

Предположение 2. Рассмотрим случай, когда вероятностные свойства процентной ставки $r(X)$ подчиняются нейтральной к риску вероятностной мере. Это означает, что средняя ставка доходности актива совпадает с краткосрочной процентной ставкой, иначе говоря, пусть $\Lambda(X) = \Lambda_0 + \Lambda_1 X = 0$, т. е. $\Lambda_0 = 0$ и $\Lambda_1 = 0$. Такое предположение упрощает анализ, но идеализирует рыночные отношения. Получающиеся при этом результаты отражают основные закономерности, а введение в расчеты рыночных цен риска обычно только изменяет численные значения, не меняя закономерностей (см., напр., рис. 3.6–3.8 в книге Медведева (2005) для аффинных моделей).

При этих предположениях система (10.8) упрощается к виду

$$\begin{aligned} \frac{dA(\tau)}{d\tau} + 2A(\tau)SS^T A(\tau) + A(\tau)K + K^T A(\tau) - \Phi &= 0, \quad A(0) = 0, \\ \frac{dB(\tau)}{d\tau} + 2A(\tau)SS^T B(\tau) + K^T B(\tau) &= 0, \quad B(0) = 0, \\ \frac{dC(\tau)}{d\tau} - \text{tr}[SS^T A(\tau)] + \frac{1}{2} B(\tau)^T SS^T B(\tau) - r_{\min} &= 0, \quad C(0) = 0. \end{aligned}$$

Выясняется, что уравнение для функции $B(\tau)$ оказывается линейным однородным дифференциальным уравнением с нулевыми начальными условиями, а это приводит к тому, что функция $B(\tau)$ равна нулю для всех значений $\tau > 0$. Таким образом, система (10.8) становится еще проще

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} = -2A(\tau)SS^T A(\tau) - A(\tau)K - K^T A(\tau) + \Phi, \quad A(0) = 0, \quad (10.9)$$

$$\frac{dC(\tau)}{d\tau} = \text{tr}[SS^T A(\tau)] + r_{\min}, \quad C(0) = 0. \quad (10.10)$$

При этом собственно уравнением является только первое – для матрицы $A(\tau)$, а второе – это формула для производной функции $C(\tau)$.

Предположение 3. Латентные переменные, составляющие вектор $X(t)$, являются независимыми случайными процессами. Это достигается в том случае, когда матрицы K и S являются положительно определенными диагональными. Такое предположение вовсе не означает, что исходные переменные состояния в уравнении (10.2) независимы, поскольку диагональность матриц K и S в уравнении (10.6) не означает, что матрицы k и σ в уравнении (10.2) являются диагональными. Они связаны соотношениями $K = LkL^T$, $S = L\sigma$, где L – матрица нормированных собственных векторов, которая обычно диагональной не является.

Пусть k_i – элемент матрицы K , стоящий на i -м месте главной диагонали, s_i – элемент матрицы S , стоящий на i -м месте главной диагонали, ϕ_i – i -е собственное число матрицы Ψ , занимающее i -е место главной диагонали матрицы Φ . Если использовать предположение 3 в матричном уравнении (10.9) и рассмотреть систему скалярных дифференциальных уравнений для элементов матрицы $A(\tau)$, то можно заметить, что для каждого элемента $A_{jk}(\tau)$, $j \neq k$, получается однородное линейное дифференциальное уравнение с нулевым начальным условием. Это означает, что решения всех этих уравнений – нулевые, т. е. $A_{jk}(\tau) = 0$, $j \neq k$, для всех $\tau > 0$. Учитывая этот факт, можно получить для каждого элемента матрицы $A(\tau)$, стоящего на главной диагонали, уравнение в следующем виде:

$$\frac{dA_{ii}(\tau)}{d\tau} = -2s_i^2 A_{ii}(\tau)^2 - 2k_i A_{ii}(\tau) + \phi_i, \quad A_{ii}(0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (10.11)$$

Таким образом, при сделанных предположениях матричное уравнение (10.9) распадается на n независимых уравнений Риккати (10.11) для диагональных элементов матрицы $A(\tau)$, а недиагональные элементы оказываются нулевыми, т. е. матрица $A(\tau)$ – диагональная. Поскольку коэффициенты уравнения (10.11) являются константами, используя разделение переменных, можно привести это уравнение к симметричной форме (для краткости индексы здесь опускаем):

$$\frac{dA}{2s^2 A^2 + 2kA - \phi} = -d\tau,$$

что с учетом начального условия $A(0) = 0$ дает следующее решение:

$$A_{ii}(\tau) = \frac{\phi_i [1 - \exp(-2\tau \sqrt{k_i^2 + 2s_i^2 \phi_i})]}{k_i + \sqrt{k_i^2 + 2s_i^2 \phi_i} + (\sqrt{k_i^2 + 2s_i^2 \phi_i} - k_i) \exp(-2\tau \sqrt{k_i^2 + 2s_i^2 \phi_i})}, \quad (10.12)$$

$$1 \leq i \leq n.$$

Таким образом, для положительных k_i , s_i и ϕ_i функция $A_{ii}(\tau)$ является монотонно возрастающей от $A_{ii}(0) = 0$ при $\tau = 0$ до конечного предела при $\tau \rightarrow \infty$:

$$A_{ii}(\infty) = \frac{\phi_i}{k_i + \sqrt{k_i^2 + 2s_i^2 \phi_i}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

В дальнейшем для краткости будем обозначать $v_i \equiv \sqrt{k_i^2 + 2s_i^2 \phi_i}$. Для функции $C(\tau)$ из равенства (10.10) получаем соотношение

$$\frac{dC(\tau)}{d\tau} = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2 \phi_i [1 - \exp(-2v_i \tau)]}{k_i + v_i + (v_i - k_i) \exp(-2v_i \tau)}, \quad (10.13)$$

поэтому

$$C(\tau) = \tau r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{1 + \omega_i \exp(2v_i \tau)}{1 + \omega_i} \right) - (v_i + k_i) \tau \right), \quad \omega_i \equiv \frac{v_i + k_i}{v_i - k_i}. \quad (10.14)$$

Таким образом, в рассматриваемом иллюстративном частном случае кривую доходности $y(\tau, X)$ и форвардную кривую $f(\tau, X)$ можно выразить в явной аналитической форме:

$$y(\tau, X) = \frac{1}{\tau} \left(\sum_{i=1}^n A_{ii}(\tau) X_i^2 + C(\tau) \right),$$

где функции $A_{ii}(\tau)$ и $C(\tau)$ вычисляются по формулам (10.12) и (10.14)

$$f(\tau, X) = \sum_{i=1}^n \frac{dA_{ii}(\tau)}{d\tau} X_i^2 + \frac{dC(\tau)}{d\tau},$$

а производные функций $A_{ii}(\tau)$ и $C(\tau)$ вычисляются по формулам (10.11)–(10.13).

Кривые доходности $y(\tau, X)$ и $f(\tau, X)$ определяются выражениями, из которых видно, что кривые зависят не от компонент вектора X , а от их квадратов. Кроме того, они явно зависят не от собственных чисел $\{\phi_i\}$, а от чисел $\{v_i\}$, взаимно однозначно связанных с ϕ_i . Поэтому для удобства рассуждений в дальнейшем введем в рассмотрение вместо переменных $\{X_i^2, \phi_i\}$ переменные $\{z_i, v_i\}$ согласно формулам преобразования:

$$z_i \equiv \phi_i X_i^2 \geq 0, \quad v_i \equiv \sqrt{k_i^2 + 2s_i^2 \phi_i} \geq k_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$X_i^2 \equiv \frac{z_i}{\phi_i}, \quad \phi_i \equiv \frac{v_i^2 - k_i^2}{2s_i^2} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Равенства (10.12)–(10.14) можно представить в более компактной форме с помощью гиперболических функций, что дает более компактные выражения для кривых $y(\tau, X)$ и $f(\tau, X)$ в виде

$$Y(\tau | z, \phi) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\tau} \left(\frac{2z_i}{v_i \text{cth}(v_i \tau) + k_i} + \ln \left(\text{ch}(v_i \tau) + \frac{k_i}{v_i} \text{sh}(v_i \tau) \right) - k_i \tau \right), \quad (10.15)$$

$$F(\tau | z, \phi) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i^2 z_i}{(v_i \text{ch}(v_i \tau) + k_i \text{sh}(v_i \tau))^2} + \frac{1}{2} \frac{v_i^2 - k_i^2}{v_i \text{cth}(v_i \tau) + k_i} \right). \quad (10.16)$$

Используя выражения (10.7), (10.11)–(10.14), можно убедиться, что имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{dA_{ii}(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{A_{ii}(\tau)}{\tau} = \phi_i, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{dC(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{C(\tau)}{\tau} = r_{\min},$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau, X) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau, X) = r = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \phi_i X_i^2 = r_{\min} + \sum_{i=1}^n z_i,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dA_{ii}(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A_{ii}(\tau)}{\tau} = 0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dC(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{C(\tau)}{\tau} = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2 \phi_i}{k_i + v_i} = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{v_i - k_i}{2},$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau, X) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau, X) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{v_i - k_i}{2} \equiv y(\infty).$$

Так что обе кривые $Y(\tau | z, \phi)$ и $F(\tau | z, \phi)$ при изменении τ от нуля до ∞ , стартуя от значения процентной ставки r , определяемой текущими значениями переменных состояния, стремятся к общему пределу $y(\infty)$, не зависящему от текущего состояния, а зависящему только от параметров модели.

Заметим, что функции (10.15) и (10.16) для малых τ имеют следующие производные:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dY(\tau | \phi, X)}{d\tau} \right|_{\tau=0} &= \frac{1}{2} \left. \frac{dF(\tau | \phi, X)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i (s_i^2 - 2k_i X_i^2) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (v_i^2 - k_i^2 - 4k_i z_i). \end{aligned}$$

Это говорит о том, что при малых τ , во-первых, форвардная кривая изменяется в два раза быстрее, чем кривая доходности, и, во-вторых, вектор ла-

тентных переменных X может определять знак производных. Поэтому при фиксированной стартовой процентной ставке r в зависимости от вектора X кривые $Y(\tau | z, \phi)$ и $F(\tau | z, \phi)$ для малых τ могут как возрастать, так и убывать.

Анализ временных структур аффинного класса показал, что характер кривых доходностей существенно зависит от текущей (стартовой) процентной ставки r , хотя предельное значение долгосрочной доходности от текущей ставки не зависит и определяется только параметрами модели. В квадратичных моделях текущая процентная ставка r при построении кривых доходности в явном виде не используется, вместо нее используются значения латентных переменных X , которые при известных параметрах модели однозначно определяют процентную ставку r тоже. Однако в квадратичных моделях одно и то же значение процентной ставки r может быть получено для некоторого набора различных переменных состояния X . Интересно выяснить, каково разнообразие кривых доходности при фиксированной процентной ставке, определяемой разнообразием переменных состояния, соответствующих этой фиксированной процентной ставке, точнее какова ширина полосы, в которой лежат все возможные кривые доходности (или форвардные кривые), соответствующие некоторой фиксированной ставке r и различным стартовым векторам X .

Рассмотрим множество кривых доходности, стартующих от процентной ставки r и имеющих предельную доходность $y(\infty)$. Процентная ставка в скалярной форме определяется с помощью соотношения (10.7) выражением

$$r = r_{\min} + X^T \Phi X = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \phi_i X_i^2 = r_{\min} + \sum_{i=1}^n z_i. \quad (10.17)$$

С помощью (10.15) запишем

$$Y(\tau | z, \phi) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{1}{\tau} \frac{z_i}{v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i} \right) + \left(\frac{1}{2\tau} \ln \left(\operatorname{ch}(v_i \tau) + \frac{k_i}{v_i} \operatorname{sh}(v_i \tau) \right) - \frac{k_i}{2} \right) \right]. \quad (10.18)$$

Рассмотрим сначала случай, когда матрица Φ (т. е. набор собственных чисел $\{\phi_i\}$) фиксирована. Будем называть кривую доходности $Y(\tau | z, \phi)$ (форвардную кривую) допустимой, если $Y(0 | z, \phi) = r$ и $Y(\infty | z, \phi) = y(\infty)$. Ширина полосы, в которой лежат все возможные допустимые кривые доходности, определяется разностью $Y_{\max}(\tau, z) - Y_{\min}(\tau, z)$, где $Y_{\max}(\tau, z)$ – максимум $Y(\tau | z, \phi)$ по z при ограничении (10.17), а $Y_{\min}(\tau, z)$ – аналогичный минимум. Переменные z_i – неотрицательные величины, которые принимают значения в интервале $(0, r - r_{\min})$. Как следует из (10.18), доходность определяется как сумма n положительных слагаемых, каждое из которых, в свою очередь, распадается на два положительных слагаемых, из которых только первое зависит от z_i . Тогда максимизация (минимизация) доходности $Y(\tau | z, \phi)$ достигается просто: нужно найти максимальный (минимальный) коэффици-

ент при z_i и назначить максимальное значение для соответствующего ему параметра z_i . Обозначим символом M индекс i , для которого

$$v_i \text{cth}(v_i \tau) + k_i \leq v_j \text{cth}(v_j \tau) + k_j \text{ для всех } j.$$

Аналогично обозначим символом m индекс i , для которого

$$v_i \text{cth}(v_i \tau) + k_i \geq v_j \text{cth}(v_j \tau) + k_j \text{ для всех } j.$$

Тогда верхняя и нижняя границы рассматриваемой полосы при заданной матрице Φ определяются соотношениями

$$Y_{\max}(\tau, z) = r_{\min} + \frac{1}{\tau} \frac{r - r_{\min}}{v_M \text{cth}(v_M \tau) + k_M} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\tau} \ln \left(\text{ch}(v_i \tau) + \frac{k_i}{v_i} \text{sh}(v_i \tau) \right) - \frac{k_i}{2} \right),$$

$$Y_{\min}(\tau, z) = r_{\min} + \frac{1}{\tau} \frac{r - r_{\min}}{v_m \text{cth}(v_m \tau) + k_m} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\tau} \ln \left(\text{ch}(v_i \tau) + \frac{k_i}{v_i} \text{sh}(v_i \tau) \right) - \frac{k_i}{2} \right).$$

Таким образом, ширина полосы, в которой лежат все возможные допустимые кривые доходности $Y(\tau | z, \phi)$ при фиксированной процентной ставке r и заданной матрице Φ , равна

$$\Delta_Y = Y_{\max}(\tau, z) - Y_{\min}(\tau, z) = \left(\frac{r - r_{\min}}{v_M \text{cth}(v_M \tau) + k_M} - \frac{r - r_{\min}}{v_m \text{cth}(v_m \tau) + k_m} \right) \frac{1}{\tau}.$$

Аналогично решается проблема определения верхней $F_{\max}(\tau, z)$ и нижней границ $F_{\min}(\tau, z)$ для допустимых форвардных кривых

$$F(\tau | z, \phi) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{v_i^2 z_i}{(v_i \text{ch}(v_i \tau) + k_i \text{sh}(v_i \tau))^2} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{v_i^2 - k_i^2}{v_i \text{cth}(v_i \tau) + k_i} \right) \right].$$

Пусть символом H обозначается индекс i , для которого $\text{ch}(v_i \tau) + (k_i/v_i) \text{sh}(v_i \tau) \leq \text{ch}(v_j \tau) + (k_j/v_j) \text{sh}(v_j \tau)$ для всех j . Аналогично обозначим символом h индекс i , для которого $\text{ch}(v_i \tau) + (k_i/v_i) \text{sh}(v_i \tau) \geq \text{ch}(v_j \tau) + (k_j/v_j) \text{sh}(v_j \tau)$ для всех j . Тогда верхняя и нижняя границы рассматриваемой полосы при заданной матрице Φ определяются соотношениями

$$F_{\max}(\tau, z) = r_{\min} + \frac{v_H^2 (r - r_{\min})}{(v_H \text{ch}(v_H \tau) + k_H \text{sh}(v_H \tau))^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{v_i^2 - k_i^2}{v_i \text{cth}(v_i \tau) + k_i},$$

$$F_{\min}(\tau, z) = r_{\min} + \frac{v_h^2 (r - r_{\min})}{(v_h \text{ch}(v_h \tau) + k_h \text{sh}(v_h \tau))^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{v_i^2 - k_i^2}{v_i \text{cth}(v_i \tau) + k_i}.$$

Ширина полосы, в которой лежат все возможные допустимые форвардные кривые $F(\tau | z, \phi)$ при фиксированной процентной ставке r и заданной матрице Φ , равна

$$\Delta_F = F_{\max}(\tau, z) - F_{\min}(\tau, z) =$$

$$= \left(\frac{v_H^2 (r - r_{\min})}{(v_H \operatorname{ch}(v_H \tau) + k_H \operatorname{sh}(v_H \tau))^2} - \frac{v_h^2 (r - r_{\min})}{(v_h \operatorname{ch}(v_h \tau) + k_h \operatorname{sh}(v_h \tau))^2} \right) \frac{1}{\tau}.$$

Теперь проанализируем влияние матрицы Φ на исследуемое множество допустимых кривых доходности (форвардных кривых), составляющих рассматриваемую полосу. Элементы этой матрицы определяют не только процентную ставку (10.17), но и предельную доходность $y(\infty)$

$$y(\infty) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{v_i - k_i}{2}. \quad (10.19)$$

Поскольку матрица Φ задается набором собственных чисел $\{\phi_i\}$, то и допустимый набор матриц может определяться в пространстве положительных собственных чисел. Однако проблема выбора матриц Φ будет сложнее, так как эти матрицы определяют не только стартовую процентную ставку r , но и предельную долгосрочную доходность $y(\infty)$. Поэтому обсуждаемое разнообразие матриц (или, что одно и то же, разнообразие наборов чисел $\{v_i\}$) должно удовлетворять не только равенству (10.17), но и соотношению (10.19) при фиксированных r и $y(\infty)$.

Заметим, что из (10.19) следует $-k_i \leq v_i \leq 2(y(\infty) - r_{\min}) + k_i$, $1 \leq i \leq n$. В первом слагаемом, зависящем от z_i в выражении (10.18) для кривой доходности $Y(\tau|z, \phi)$, знаменатель $v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i$ монотонно возрастает с увеличением v_i . Следовательно, минимальное по v_i значение знаменателя $k_i(\operatorname{cth}(k_i \tau) + 1)$ достигается при $v_i = k_i$, а минимальное по v_i и k_i значение знаменателя достигается при минимальном $k_i = k_0$. Второе слагаемое в выражении (10.18) оказывается равным нулю, когда $v_i = k_i$, т. е. принимает свое минимальное значение. С ростом v_i оно монотонно возрастает и достигает своего наибольшего значения при $v_i = 2(y(\infty) - r_{\min}) + k_i$. Поэтому наибольшее значение второго слагаемого достигается при максимальном $k_i = k^0$, для которого $v_i = v^0 = 2(y(\infty) - r_{\min}) + k^0$. Так что границы множества допустимых кривых доходности $Y(\tau|z, \phi)$ при варьировании по $\{z, v\}$ имеют вид

$$Y_{\max}(\tau|z, \phi) = r_{\min} + \frac{1}{\tau} \frac{r - r_{\min}}{k_0 \operatorname{cth}(k_0 \tau) + k_0} + \frac{1}{2\tau} \ln \left(\operatorname{ch}(v^0 \tau) + \frac{k^0}{v^0} \operatorname{sh}(v^0 \tau) \right) - \frac{k^0}{2},$$

$$Y_{\min}(\tau|z, \phi) = r_{\min} + \frac{1}{\tau} \frac{r - r_{\min}}{v^0 \operatorname{cth}(v^0 \tau) + k^0} + \frac{1}{2\tau} \ln \left(\operatorname{ch}(v_0 \tau) + \frac{k_0}{v_0} \operatorname{sh}(v_0 \tau) \right) - \frac{k_0}{2}.$$

Аналогичный анализ форвардных кривых $F(\tau|z, \phi)$ дает следующие границы множества допустимых форвардных кривых при варьировании по $\{z, v\}$:

$$F_{\max}(\tau|z, \phi) = r_{\min} + \frac{r - r_{\min}}{\exp(2k_0 \tau)} + \frac{1}{2} \frac{(v^0)^2 - (k^0)^2}{v^0 \operatorname{cth}(v^0 \tau) + k^0},$$

$$F_{\min}(\tau|z, \phi) = r_{\min} + \frac{r - r_{\min}}{(\operatorname{ch}(v^0 \tau) + (k^0/v^0) \operatorname{sh}(v^0 \tau))^2} + \frac{1}{2} \frac{(v_0)^2 - (k_0)^2}{v_0 \operatorname{cth}(v_0 \tau) + k_0}.$$

Заметим, что вычисление границ множества допустимых кривых при варьировании по $\{z, v\}$ при максимизации первых слагаемых требует предположения $v_i = k_i$, что, в свою очередь, подразумевает равенство нулю, по крайней мере, одного собственного числа матрицы Φ . А это противоречит предположению о положительной определенности этой матрицы. Поэтому такие границы являются реально недостижимыми. Реальная граница будет настолько близкой к этой недостижимой, насколько близким к нулю будет минимальное собственное число матрицы Φ .

Проиллюстрируем сказанное численным примером для простейшего случая $n = 2$. Пусть $r_{\min} = 0$ и

$$K = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,13 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0,07 & 0 \\ 0 & 0,08 \end{pmatrix}.$$

Для определения базовых кривых будем использовать следующую пару (Φ, X) :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,08 \end{pmatrix}.$$

В этом случае значение стартовой процентной ставки $r = 0,0481$, значение предельной доходности $y(\infty) = 0,06954$. На рис. 10.1 представлены кривая доходности $Y_0(u)$ и форвардная кривая $F_0(u)$ для этого случая. Чтобы представить эти кривые «целиком» для всего интервала значений сроков до погашения $\tau \in (0, \infty)$, использовано нелинейное преобразование сроков до погашения $u = 1 - e^{-\rho \tau}$, которое отображает положительную полуось $(0, \infty)$ в единичный интервал $(0, 1)$. Принятое при расчетах численное значение $\rho = \ln 10/30 = 0,07675$ соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал $(0, 0,9)$. Так что $Y_0(u) = y(\tau, X)$, $F_0(u) = f(\tau, X)$, где $\tau = -\ln(1 - u)/\rho$. По обычно принятой классификации полученные кривые относятся к типу «нормальных кривых», т. е. монотонно возрастающих до конечного предела на всем интервале изменения τ .

На рис. 10.2 изображены кривая доходности $Y_0(u)$ (сплошная линия) и верхняя и нижняя границы $Y_{\max}(u)$ и $Y_{\min}(u)$ той полосы, в которой лежат все возможные кривые доходности, соответствующие допустимым векторам переменных состояния. Допустимыми векторами считаются те, которые обеспечивают значения $r = 0,0481$, $y(\infty) = 0,06954$ при фиксированной (базовой) матрице Φ . При этих же условиях на рис. 10.3 представлена форвардная кривая $F_0(u)$ (сплошная линия) и верхняя и нижняя границы $F_{\max}(u)$ и $F_{\min}(u)$ полосы форвардных кривых, соответствующих допустимым векторам переменных состояния X .

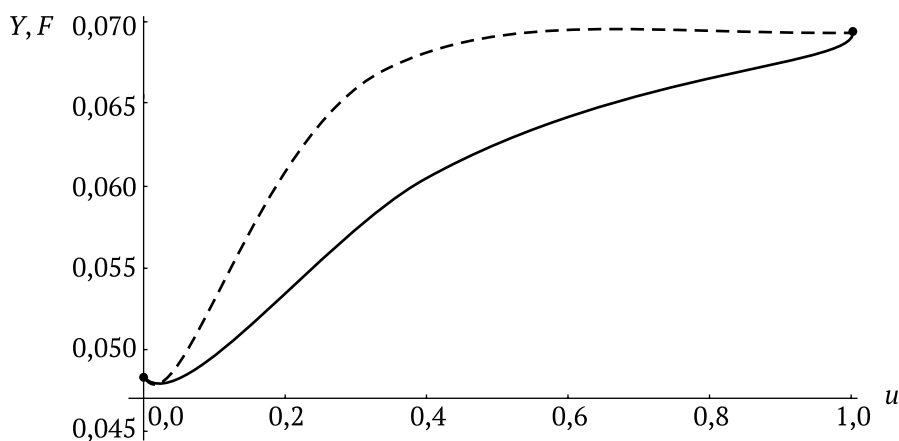


Рис. 10.1. Кривая доходности $Y_0(u)$ (сплошная линия) и форвардная кривая $F_0(u)$ (штриховая линия) для базового варианта (параметры $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = 4$, $X_1 = 0,15$, $X_2 = 0,08$ соответствуют значениям $r = 0,0481$, $y(\infty) = 0,06954$)

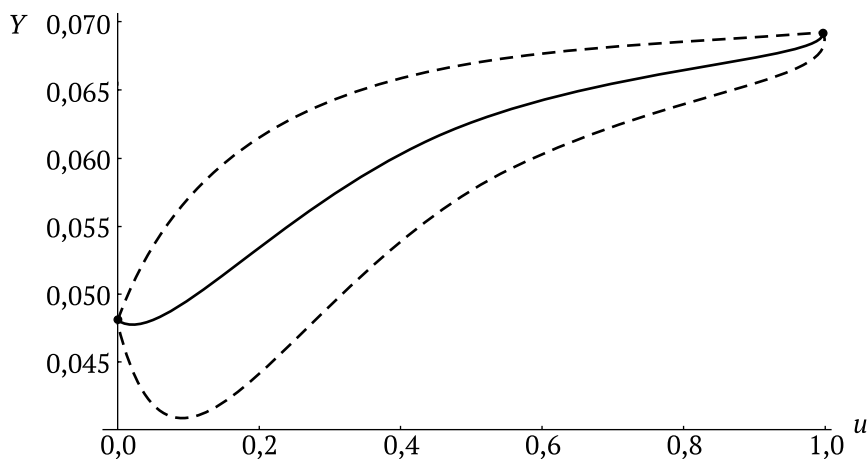


Рис. 10.2. Кривая доходности $Y_0(u)$ (сплошная линия) и верхняя и нижняя границы $Y_{\max}(u)$ и $Y_{\min}(u)$ полосы, в которой лежат все возможные кривые доходности, соответствующие допустимым векторам переменных состояния, обеспечивающим значения $r = 0,0481$, $y(\infty) = 0,06954$ при фиксированной (базовой) матрице Φ

На рис. 10.4 и 10.5 показаны те же кривые, что и на рис. 10.2 и 10.3: кривая доходности $Y_0(u)$ (сплошная линия) и форвардная кривая $F_0(u)$ (сплошная линия) и верхняя и нижняя границы (пунктирные линии) полос соответствующих допустимых кривых, но уже для случая, когда могут варьироваться не только допустимые вектора переменных состояния X , но и допустимые матрицы Φ , что, как видно, существенно расширяет полосу возможных кривых доходности.

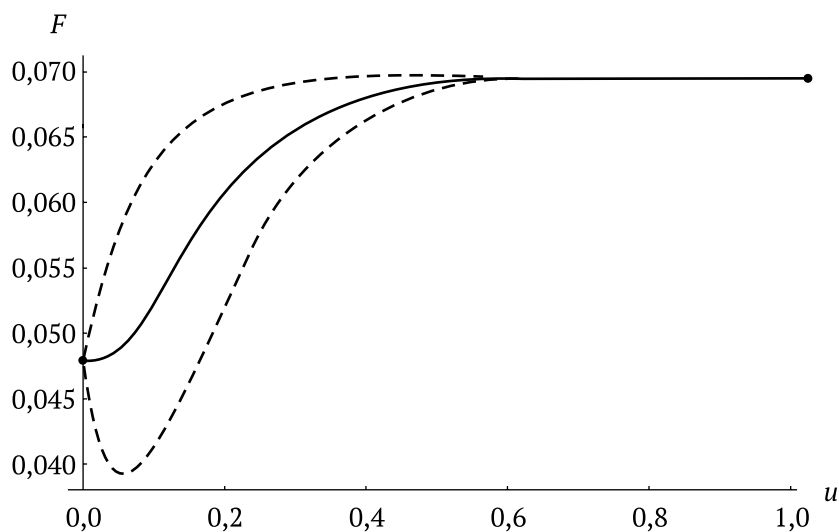


Рис. 10.3. Форвардная кривая $F_0(u)$ (сплошная линия) и верхняя и нижняя границы $F_{\max}(u)$ и $F_{\min}(u)$ (пунктирные линии) полосы форвардных кривых, соответствующих допустимым векторам переменных состояния X при фиксированной (базовой) матрице Φ

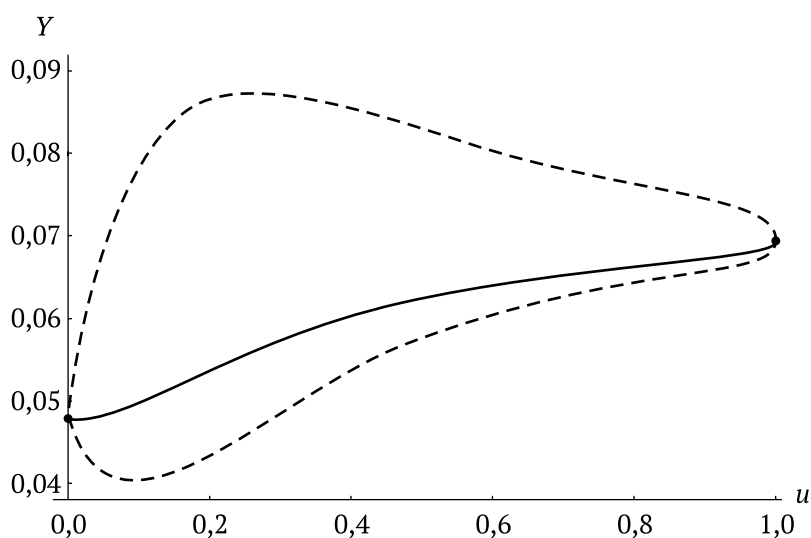


Рис. 10.4. Кривая доходности $Y_0(u)$ (сплошная линия) и верхняя и нижняя границы $Y_{\max}(u)$ и $Y_{\min}(u)$ (пунктирные линии) полосы, в которой лежат все возможные кривые доходности, соответствующие допустимым векторам переменных состояния X и матрицам Φ , обеспечивающим значения $r = 0,0481$, $y^{(\infty)} = 0,06954$

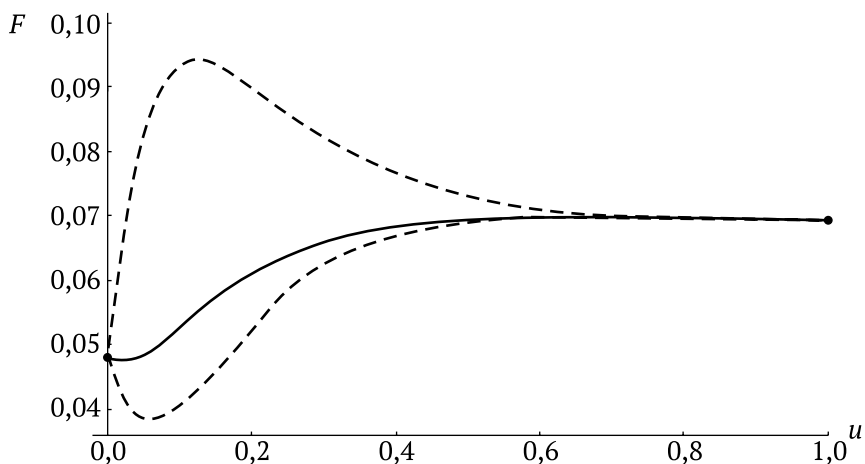


Рис. 10.5. Форвардная кривая $F_0(u)$ (сплошная линия) и верхняя и нижняя границы $F_{\max}(u)$ и $F_{\min}(u)$ (пунктирные линии) полосы, в которой лежат все возможные форвардные кривые, соответствующие допустимым векторам переменных состояния X и матрицам Φ , обеспечивающим значения $r = 0,0481$, $y(\infty) = 0,06954$

Изменение ширины полос допустимых кривых в зависимости от срока до погашения для кривых, изображенных на рис. 10.2–10.5, показаны на рис. 10.6. Для удобства сравнения на этом рисунке приведены сведения для обоих случаев: 1) допустимые кривые соответствуют различным векторам X при фиксированной матрице Φ ; 2) допустимые кривые определяются изменением как векторов X , так и матриц Φ .

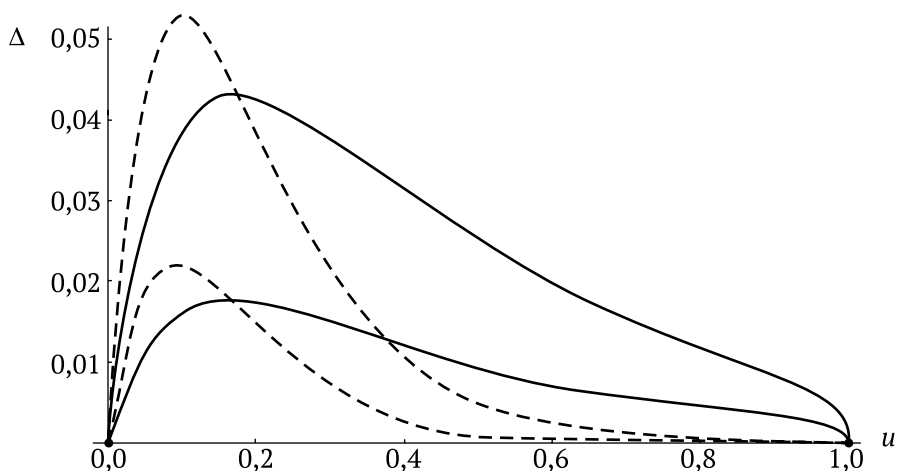


Рис. 10.6. Ширины Δ полос, представленных на рис. 10.2–10.5, для кривых доходности (сплошные линии) и форвардных кривых (пунктирные линии) при варьировании только вектором X (нижние кривые) и при варьировании парой X , Φ (верхние кривые)

В заключение отметим еще одну особенность квадратичных моделей временных структур на основе рассмотренного численного примера. При принятых исходных данных базовые кривые $Y_0(u) = y(\tau, X)$ и $F_0(u) = f(\tau, X)$ относятся к типу «нормальных кривых», т. е. монотонно возрастают на всем интервале изменения τ от стартовой процентной ставки r до конечного предела $y(\infty)$ долгосрочной доходности. В аффинной модели временной структуры это будет единственным решением. В квадратичной модели мы получаем целое семейство кривых, обладающих свойством $Y(0|z, \phi) = r$ и $Y(\infty|z, \phi) = y(\infty)$. При этом в данном семействе имеются кривые, относящиеся как к типу «нормальных кривых», так и к другим типам, предполагающим наличие максимума или минимума.

Представленные результаты иллюстрируют тот факт, что квадратичные модели временной структуры доходности позволяют получать более богатый спектр допустимых кривых доходности и форвардных кривых, чем аффинные модели, которые для фиксированной стартовой процентной ставки позволяют получить только одну кривую, в то время как квадратичные модели при условиях фиксированных стартовой и долгосрочной предельной ставок r и $y(\infty)$ могут давать довольно широкий спектр кривых доходности. Следовательно, теоретически они обладают большими возможностями для подгонки теоретических кривых к реальным рыночным временным структурам. Однако это будет реально осуществимым, если будет возможность контролировать используемые в квадратичной модели латентные переменные. До сих пор в литературе пока отсутствует какое-либо описание этих переменных в экономическом смысле.

СРАВНЕНИЕ АФФИННОЙ И КВАДРАТИЧНОЙ МОДЕЛЕЙ

В рамках теории диффузионных процессов существуют разнообразные версии изменения краткосрочных процентных ставок доходности. Тем не менее до сих пор не появилось такой модели, которая смогла бы быть подходящей основой для построения временной структуры доходности, близкой к существующей на реальном финансовом рынке. Наиболее известны модели процентных ставок, приводящие к аффинным временным структурам доходности, поскольку они просты и подразумевают решение в аналитическом виде. Однако воспроизведения реальных временных структур с помощью аффинных моделей неточны. В последнее время развитие моделей идет в двух направлениях: увеличение размерности моделей и отказ от аффинных свойств. В качестве представителей такого развития наиболее популярны сейчас «квадратичные модели» процессов процентных ставок, в которых процесс процентной ставки $r(t)$ задается уравнениями

$$dX(t) = \xi(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t), t > t_0, X(t_0) = X_0,$$

$$r(t) = \alpha + X(t)^T \Psi X(t), X(t) \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1, \Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Обычно $\alpha \geq 0$, Ψ – симметрическая положительно определенная матрица. Когда вектор $\xi(X)$ линейно зависит от X , а матрица $\sigma(X)$ не зависит от X , процесс $X(t)$ является гауссовым и в стационарном режиме имеет, скажем, математическое ожидание μ и матрицу ковариации V .

При принятых условиях производящая функция моментов процесса процентной ставки $r(t)$ определяется соотношением

$$M(z) = e^{\alpha z - \mu^T V^{-1} \mu / 2 + \mu^T (V - 2zV\Psi V)^{-1} \mu / 2} \frac{|V|^{1/2}}{|V - 2zV\Psi V|^{1/2}},$$

где $|V| = \det V$, z – вещественная переменная с областью определения, задаваемой неравенством

$$|V - 2zV\Psi V| > 0.$$

Кроме того, стационарное математическое ожидание процесса $r(t)$

$$E[r] = \alpha + \mu^T \Psi \mu + V o \Psi,$$

где o – сумма произведений соответствующих элементов матриц,

$$V o \Psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} \Psi_{ij}.$$

Пусть Ψ и V – диагональные матрицы $\Psi = \psi I$, $V = vI$. В этом случае

$$M(z) = e^{\alpha z - \mu^T \mu z \psi / (1 - 2z v \psi)} \frac{1}{(1 - 2z v \psi)^{n/2}},$$

а основные стационарные моменты процесса $r(t)$ вычисляются по формулам

$$E[r] = \alpha + n v \psi + \mu^T \mu \psi, \text{ Var}[r] = 2v(nv + 2\mu)\psi^2,$$

$$E[(r - E[r])^3] = 8v^2(nv + 3\mu)\psi^3.$$

Если эти условия дополнить равенством $\mu = 0$, то маргинальным распределением процесса $r(t)$ будет сдвинутое распределение гамма с параметром сдвига α , параметром масштаба $1/2v\psi$ и параметром формы $n/2$.

Заметим, что сдвинутое распределение гамма характеризует также краткосрочную процентную ставку в модели Даффи – Кана (см. главу 4), где процесс $r(t)$ следует стохастическому дифференциальному уравнению

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kD \frac{r(t) - \alpha}{\theta - \alpha}} dW(t). \quad (10.20)$$

Таким образом, модель Даффи – Кана (10.20) и квадратичная модель

$$dX(t) = -KX(t) dt + \Sigma dW(t), t > t_0, X(t_0) = X_0,$$

$$r(t) = \alpha + X(t)^T \Psi X(t), X(t) \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1, \Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (10.21)$$

порождают случайные процессы $r(t)$ с одним и тем же распределением, когда выполняются условия: $K = kI$, Σ – диагональная матрица с элементами $\sqrt{2kv}$, $\Psi = \psi I$. При этом параметры уравнения (10.20) должны быть согласованы с параметрами модели (10.21) следующими равенствами:

$$\theta = \alpha + nv\psi, D = 2nv^2\psi^2.$$

Представляет интерес выяснить, насколько разными (или близкими) будут временные структуры процентных ставок доходности для этих двух моделей при данных условиях. Рассмотрим этот вопрос в нейтральной к риску постановке, когда рыночные цены риска равны нулю.

Основываясь на известных результатах, временную структуру процентных ставок доходности $y(\tau)$ (кривую доходности) и форвардных процентных ставок $f(\tau)$ (форвардную кривую) для модели Даффи – Кана можно записать в виде

$$y_1(\tau) = \alpha + (r - \alpha) \frac{B(\tau)}{\tau} + \frac{knv\psi}{G} \left(1 - \frac{\ln(1 + gB(\tau))}{\tau g} \right), \quad (10.22)$$

$$f_1(\tau) = R + nv\psi KB(\tau) - KB(\tau)(R - \alpha) - 2KV\psi B(\tau)^2(R - \alpha), \quad (10.23)$$

где $B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon\tau} - 1} + G \right)^{-1}$, $\varepsilon = \sqrt{k^2 + 4kv\psi}$, $g = (\varepsilon - k)/2$, $G = (\varepsilon + k)/2$.

Заметим, что обе эти кривые имеют одни и те же предельные значения как при краткосрочных, так и при долгосрочных доходностях:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f_1(\tau) = r;$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f_1(\tau) \equiv y(\infty) = \alpha + \frac{ng}{2} < \theta. \quad (10.24)$$

Для модели (10.21) эти кривые определяются с помощью гиперболических функций соотношениями

$$y_2(\tau) = \alpha + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\tau} \left(\frac{2\psi_i X_i^2}{\varepsilon_i \text{cth}(\varepsilon_i \tau) + k_i} + \ln \left(\text{ch}(\varepsilon_i \tau) + \frac{k_i}{\varepsilon_i} \text{sh}(\varepsilon_i \tau) \right) - k_i \tau \right), \quad (10.25)$$

$$f_2(\tau) = \alpha + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon_i^2 \psi_i X_i^2}{(\varepsilon_i \text{ch}(\varepsilon_i \tau) + k_i \text{sh}(\varepsilon_i \tau))^2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i^2 - k_i^2}{\varepsilon_i \text{cth}(\varepsilon_i \tau) + k_i} \right), \quad (10.26)$$

где $\varepsilon_i \equiv \sqrt{k_i^2 + 4k_i v_i \psi_i} \geq k_i$, $1 \leq i \leq n$.

Согласно (10.21) имеем $r = \alpha + \sum_{i=1}^n \psi_i X_i^2$. Для нашего случая, когда по принятым предположениям параметры k , v и ψ не зависят от индекса, формулы (10.25) и (10.26) упрощаются к виду

$$y_2(\tau) = \alpha + \frac{r - \alpha}{\tau \operatorname{cth}(\varepsilon\tau) + \tau k} + \frac{n}{2\tau} \ln \left(\operatorname{ch}(\varepsilon\tau) + \frac{k}{\varepsilon} \operatorname{sh}(\varepsilon\tau) \right) - \frac{nk}{2}, \quad (10.27)$$

$$f_2(\tau) = \alpha + \frac{\varepsilon^2(r - \alpha)}{(\varepsilon \operatorname{ch}(\varepsilon\tau) + k \operatorname{sh}(\varepsilon\tau))^2} + \frac{n}{2} \frac{\varepsilon^2 - k^2}{\varepsilon \operatorname{th}(\varepsilon\tau) + k}, \quad (10.28)$$

который не предусматривает явной зависимости от конкретных значений латентных переменных состояния X , а параметры k , ε и v те же, что и в формулах (10.22) и (10.23). Анализ показывает, что кривые (10.27) и (10.28) имеют одинаковые предельные значения как при краткосрочных, так и при долгосрочных доходностях, точно такие же, как у кривых (10.22) и (10.23), приведенных в равенствах (10.24).

Из представлений (10.27) и (10.28) видно, что при сделанных предположениях в квадратичной модели (10.21) при фиксированной процентной ставке r в отличие от ожидаемого семейства кривых существуют единственные кривые $y_2(\tau)$ и $f_2(\tau)$. Это объясняется тем, что эти кривые зависят не от конкретных значений X_i , а от суммы квадратов всех переменных состояний X_i , которая как раз задает фиксированную процентную ставку r .

Заметим, что функции (10.22) и (10.23), (10.27) и (10.28) для малых τ имеют следующие производные:

$$\left. \frac{dy_1(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \left. \frac{df_1(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \left. \frac{dy_2(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{4} \left. \frac{df_2(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{k(\theta - r)}{2},$$

где $\theta = \alpha + nv\psi$ – стационарное математическое ожидание процесса процентной ставки $r(t)$. Это говорит, в частности, о том, что при малых τ , во-первых, форвардная кривая изменяется в два раза быстрее, чем кривая доходности для обеих моделей, во-вторых, вектор латентных переменных X не влияет на знак производных, и в-третьих, кривые квадратичной модели при малых τ изменяются в два раза быстрее, чем кривые аффинной модели Даффи – Кана.

Как известно, в практике обычно встречаются кривые доходности (и форвардные кривые) трех типов: нормальные (монотонно возрастающие), инверсные (монотонно убывающие) и кривые с максимумом («горбатые»). Все эти три типа могут порождаться рассматриваемыми здесь моделями в зависимости от значения стартовой процентной ставки r . Когда $r < y(\infty)$, получается нормальная кривая. Когда $r > \theta$, кривые доходности инверсные. Если $y(\infty) < r < \theta$, кривая доходности имеет максимум. На рис. 10.7–10.9 для иллюстрации эти случаи приводятся. Чтобы представить эти кривые «целиком» для всего интервала значений сроков до погашения $\tau \in (0, \infty)$, использовано нелинейное преобразование сроков до погашения $u = 1 - e^{-\rho\tau}$, которое отображает положительную полуось $(0, \infty)$ в единичный интервал $(0, 1)$. Принятое при расчетах численное значение $\rho = \ln 10/30 = 0,07675$ соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал $(0, 0,9)$. Так что $y(\tau)$ отображает $Y(u)$, а $f(\tau)$ отображает $F(u)$, где $\tau = -\ln(1 - u)/\rho$.

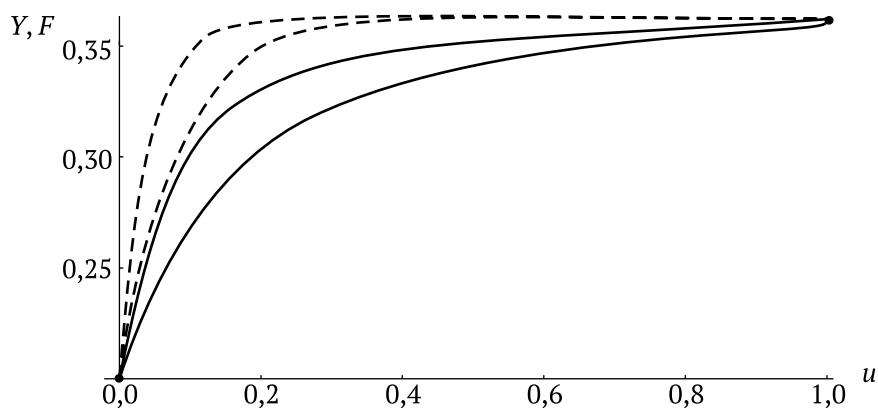


Рис. 10.7. Нормальные типы кривых $Y(u)$ и $F(u)$, $r = 0,2 < y(\infty) = 0,3625$

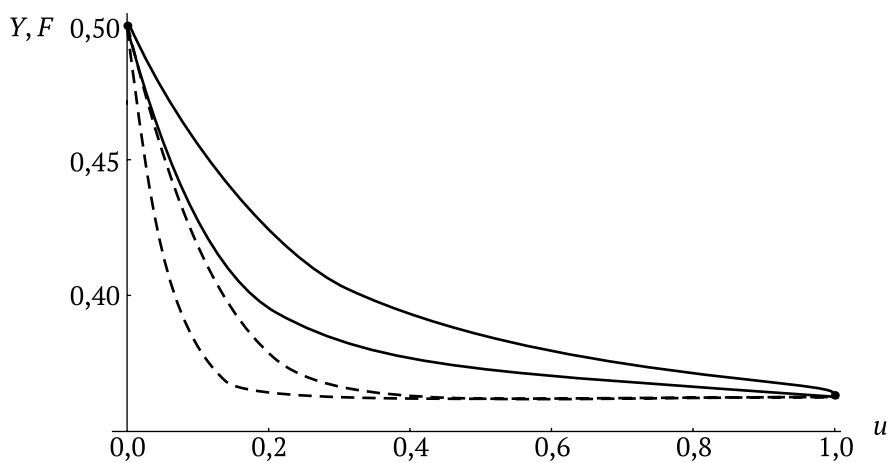


Рис. 10.8. Инверсные типы кривых, $r = 0,5 > \theta = 0,4$

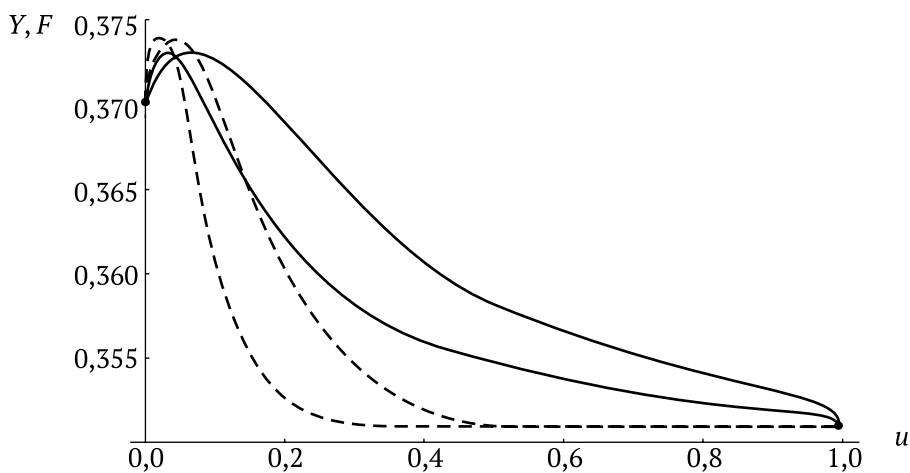


Рис. 10.9. Кривые с максимумом, $y(\infty) = 0,3508 < r = 0,37 < \theta = 0,4$

Кривые доходности $Y(u)$ показаны сплошными линиями, а форвардные кривые $F(u)$ – пунктирными. Круглыми маркерами показаны предельные значения доходностей при $\tau \rightarrow 0$ ($u \rightarrow 0$) и при $\tau \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow 1$). Кривые доходности для модели Даффи – Кана располагаются ниже соответствующих кривых квадратичной модели для нормального типа (рис. 10.7) и выше – для инверсного типа (рис. 10.8). В качестве параметров моделей были выбраны следующие: $\alpha = 0$, $n = 5$, $v = 0,08$, $\psi = 1$, $k = 0,7$ ($k = 0,5$ для рис. 10.9), $\theta = 0,4$, $y(\infty) = 0,3625$ ($y(\infty) = 0,3508$ для рис. 10.9).

Таким образом, когда в квадратичной модели любой размерности n латентные переменные состояния X независимы и одинаково распределены по нормальному закону с нулевым средним, то временная структура процентных ставок доходности не зависит от конкретных значений переменных X , а определяется только стартовым значением r текущей краткосрочной процентной ставки, точно так же как и в аффинных моделях. При этом долгосрочные предельные ставки получаются такими же, как и в модели Даффи – Кана. Причем распределение вероятностей процесса краткосрочной процентной ставки в этих моделях оказывается идентичным – сдвинутым гамма-распределением.

Особенностью квадратичной модели является более быстрая, чем в модели Даффи – Кана, сходимость к предельному значению долгосрочной доходности, которая иллюстрируется на рис. 10.10 с помощью отношений

$$\delta Y = \frac{Y_2(u) - y(\infty)}{Y_1(u) - y(\infty)}, \quad \delta F = \frac{F_2(u) - y(\infty)}{F_1(u) - y(\infty)}.$$

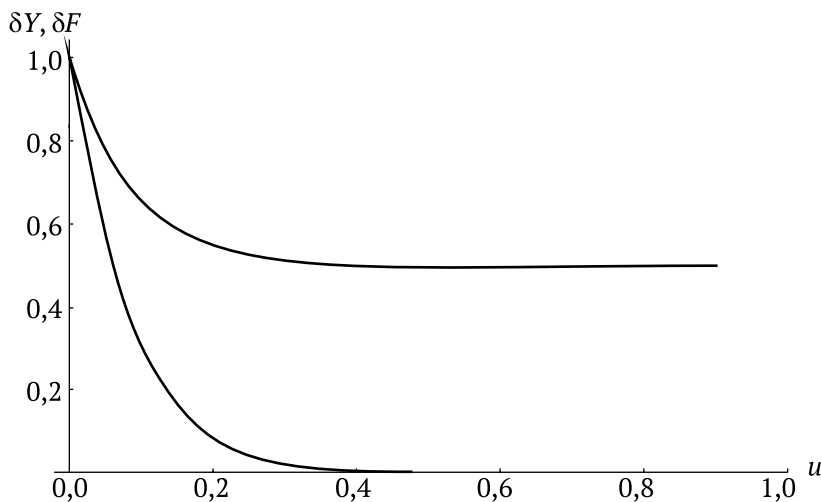


Рис. 10.10. Отношения δY (верхняя кривая) и δF (нижняя кривая), характеризующие сравнительную скорость сходимости кривых доходности рис. 10.7 к предельному значению $y(\infty)$

Из рис. 10.10 следует, что для данных рис. 10.7 практически для всех сроков погашения кривая $y_2(\tau)$ в два раза ближе к предельному значению $y(\infty)$, чем кривая $y_1(\tau)$. Что касается форвардной кривой $f_2(\tau)$, то она практически уже достигает своего предельного значения для $\tau > 9$ лет ($u > 0,5$).

К сожалению, хотя квадратичные модели доходности активно обсуждаются в литературе, природа квадратичных моделей оказывается загадочной, поскольку они являются математическими абстракциями. Ни один из авторов, описывающих свойства этих моделей, не привел объяснения, каким образом пользователь этих моделей может наблюдать значения латентных переменных состояния X , и вообще, существуют ли они, как они определяются и каков их экономический смысл.

Глава 11

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДОХОДНОСТИ

ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ДОХОДНОСТИ

Пусть состояние финансового рынка описывается процентной ставкой $r(t)$, которая следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr(t) = \mu(r(t)) dt + \sigma(r(t)) dw(t)$$

с функцией дрейфа $\mu(x)$, функцией волатильности $\sigma(x)$ и стандартным винеровским процессом $w(t)$.

Уравнение временной структуры, определяющее зависимость цены бескупонной облигации $P(r, \tau)$ от срока до ее погашения τ , в этом случае имеет вид

$$-\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} + (\mu(r) - \lambda(r)\sigma(r))\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(r)\frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} - rP(r, \tau) = 0.$$

Для упрощения записи введем функцию дрейфа $m(r) = \mu(r) - \lambda(r)\sigma(r)$ и диффузии $s(r) = 0,5\sigma^2(r)$. При этом уравнение временной структуры преобразуется к виду

$$-\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} + m(r)\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial r} + s(r)\frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} - rP(r, \tau) = 0, \quad P(r, 0) = 1.$$

Обозначим $\ln P(r, \tau) = z(r, \tau)$. Тогда можно записать уравнение временной структуры для функции $z(r, \tau)$ в следующем виде:

$$-\frac{\partial z(r, \tau)}{\partial \tau} + m(r)\frac{\partial z(r, \tau)}{\partial r} + s(r)\left[\frac{\partial^2 z(r, \tau)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial z(r, \tau)}{\partial r}\right)^2\right] - r = 0, \quad z(r, 0) = 0. \quad (11.1)$$

Предположим, что функции дрейфа $m(r)$ и диффузии $s(r)$ являются полиномами, т. е.

$$m(r) = \sum_{i=0}^{\beta} b_i r^i, \quad s(r) = \sum_{i=0}^{\alpha} c_i r^i.$$

Возникает вопрос, может ли в этом случае решение уравнения (11.1) тоже представляться в форме полинома по переменной r , т. е. существует ли полином

$$z(\tau, r) = \sum_{i=0}^k a_i(\tau) r^i, \quad (11.2)$$

удовлетворяющий уравнению (11.1).

Подстановка представления (11.2) в уравнение (11.1) приводит к тому, что левая часть равенства (11.1) будет суммой трех полиномов по переменной r , которые условно назовем полиномом доходности, полиномом дрейфа и полиномом диффузии.

Полином доходности

$$-\frac{\partial z(r, \tau)}{\partial \tau} - r = -\sum_{i=0}^k a'_i(\tau) r^i - r$$

имеет степень k (штрих обозначает производную по τ).

Полином дрейфа степени $\beta + k - 1$ имеет вид

$$m(r) \frac{\partial z(r, \tau)}{\partial r} = \sum_{i=0}^{\beta} \sum_{j=1}^k j b_i a_j(\tau) r^{i+j-1}.$$

Полином диффузии имеет степень $\alpha + 2k - 2$ и определяется выражением

$$s(r) \left[\frac{\partial^2 z(r, \tau)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial z(r, \tau)}{\partial r} \right)^2 \right] = \\ = \sum_{i=0}^{\alpha} c_i r^i \left[\sum_{j=2}^k j(j-1) a_j(\tau) r^{j-2} + \left(\sum_{j=1}^k j a_j(\tau) r^{j-1} \right)^2 \right].$$

Это выражение выписано для случая, когда $k \geq 2$. Если это неравенство не выполняется, то первая сумма в квадратных скобках отсутствует.

Поскольку постановка задачи предполагает, что рассматриваемая модель задана, то функции $\mu(r)$, $\sigma(r)$ и $\lambda(r)$ известны. Следовательно, наборы параметров $\{b_i\}$ и $\{c_i\}$ тоже являются известными. Таким образом, задача состоит в определении набора функций $\{a_i(\tau)\}$, которые определяют решение (11.2), если оно существует.

ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА КАК ПОЛИНОМ

Как мы выяснили, левая часть уравнения (11.1) представляет из себя полином по переменной r степени $\gamma \equiv \max\{k, \alpha + 2k - 2, \beta + k - 1\} \geq k$. Этот полином равномерно по r равен нулю. Поскольку степенные функции $\{r^i\}$ линейно независимы, то в этом случае коэффициенты при r^i , $i = 0, 1, 2, \dots, \gamma$, должны быть равны нулю. Это дает систему $(\gamma + 1)$ уравнений для определения $(k + 1)$ функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Заметим, что $(k + 1)$ уравнений этой системы являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, а остальные $(\gamma - k)$ уравнений – нелинейные алгебраические. Когда $\gamma > k$, система уравнений относительно функций $a_i(\tau)$ является переопределенной. Сделаем также естественные предположения, что α , β и k – целые числа, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $k \geq 1$.

Пусть $\delta \equiv \max\{\alpha + 2k - 2, \beta + k - 1\}$. Рассмотрим последовательно все три возможных случая: $k > \delta$, $k = \delta$, $k < \delta$.

Предположим, что $k > \delta$. Найдем все возможные пары чисел $\{\alpha, \beta\}$, которые соответствуют этому предположению. Для этого нужно решить следующую систему неравенств:

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, k \geq 1, k > \beta + k - 1, k > \alpha + 2k - 2.$$

Два последние неравенства дают $\beta < 1$, $\alpha + k < 2$, поэтому получаем, что существует единственный вариант возможного решения уравнения (11.1): $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $k = 1$.

Для определения функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, получаем систему уравнений:

$$a'_0(\tau) = b_0 a_1(\tau) + c_0 a_1^2(\tau), \quad a_0(0) = 0; \quad a'_1(\tau) = -1, \quad a_1(0) = 0,$$

решение которой имеет вид

$$a_1(\tau) = -\tau, \quad a_0(\tau) = -b_0 \tau^2/2 + c_0 \tau^3/3.$$

Наконец, решение (11.2) уравнения (11.1) выглядит следующим образом:

$$z(\tau, r) = -b_0 \tau^2/2 + c_0 \tau^3/3 - \tau r,$$

поэтому временная структура доходности в этом случае будет иметь вид полинома первой степени по переменной r

$$y(\tau, r) = -\frac{z(\tau, r)}{\tau} = r + \frac{b_0 \tau}{2} - \frac{c_0 \tau^2}{3}.$$

Заметим, что цена облигации с такой доходностью рассматривалась Р. Мертоном (R. Merton, 1970).

Предположим теперь, что $k = \delta$. В этом случае имеется три варианта построения решения:

$$\{\beta + k - 1 = k, \alpha + 2k - 2 < k\}, \text{ откуда } \beta = 1, \alpha + k < 2 \text{ и } \alpha = 0, \beta = 1, k = 1;$$

$\{\beta + k - 1 = k, \alpha + 2k - 2 = k\}$, откуда $\beta = 1, \alpha + k = 2$ и $\alpha = 1, \beta = 1, k = 1$;

$\{\beta + k - 1 < k, \alpha + 2k - 2 = k\}$, откуда $\beta < 1, \alpha + k = 2$ и $\alpha = 1, \beta = 0, k = 1$.

Как видно, все эти варианты соответствуют полиному первой степени ($k = 1$).

В случае $\{\alpha = 0, \beta = 1\}$ для определения функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, имеем систему уравнений

$$a'_0(\tau) = b_0 a_1(\tau) + c_0 a_1^2(\tau), \quad a_0(0) = 0; \quad a'_1(\tau) = b_1 a_1(\tau) - 1, \quad a_1(0) = 0.$$

Используем обозначения, которые обычно применяются в литературе о временных структурах процентных ставок: $a_0(\tau) = A(\tau)$, $a_1(\tau) = -B(\tau)$, $b_0 = k\theta - \lambda\sigma$, $b_1 = -k$, $c_0 = \sigma^2/2$. Тогда решение этой системы уравнений запишется в виде

$$A(\tau) = -\tau \left(\theta - \frac{\sigma\lambda}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) + \left(\theta - \frac{\sigma\lambda}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) B(\tau) - \frac{\sigma^2}{4k} B(\tau)^2,$$

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-k\tau}}{k},$$

в котором легко узнаются функции временной структуры модели Васичека (Vasiček, 1977).

В случае $\{\alpha = 1, \beta = 1\}$ для определения функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, имеем систему уравнений:

$$a'_0(\tau) = b_0 a_1(\tau) + c_0 a_1^2(\tau), \quad a_0(0) = 0;$$

$$a'_1(\tau) = b_1 a_1(\tau) + c_1 a_1^2(\tau) - 1, \quad a_1(0) = 0.$$

При использовании традиционных обозначений $a_0(\tau) = A(\tau)$, $a_1(\tau) = -B(\tau)$, $b_0 = k\theta - \lambda\sigma_0$, $b_1 = -(k + \lambda\sigma_1)$, $c_0 = \sigma_0/2$, $c_1 = \sigma_1/2$ эта система преобразуется к виду

$$A' = -(k\theta - \lambda\sigma_0)B(\tau) + \sigma_0[B(\tau)]^2/2, \quad A(0) = 0,$$

$$B' = 1 - (k + \lambda\sigma_1)B(\tau) - \sigma_1[B(\tau)]^2/2, \quad B(0) = 0.$$

Полученные уравнения определяют функции временной структуры модели Даффи – Кана.

$$A(\tau) = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} [B(\tau) - \tau] - \frac{2k}{\sigma_1^2} (\sigma_1\theta - \sigma_0) [\nu\tau - \ln(1 + \nu B(\tau))],$$

$$B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon\tau} - 1} + V \right)^{-1},$$

где $\varepsilon = \sqrt{(k + \lambda\sigma_1)^2 + 2\sigma_1}$, $\nu = (\varepsilon - k - \lambda\sigma_1)/2$, $V = (\varepsilon + k + \lambda\sigma_1)/2$.

Наконец, в случае $\{\alpha = 1, \beta = 0\}$ функции $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, удовлетворяют системе уравнений

$$a'_0(\tau) = b_0 a_1(\tau) + c_0 a_1^2(\tau), \quad a_0(0) = 0; \quad a'_1(\tau) = c_1 a_1^2(\tau) - 1, \quad a_1(0) = 0,$$

решение которой в традиционных обозначениях $a_0(\tau) = A(\tau)$, $a_1(\tau) = -B(\tau)$, $b_0 = k\theta - \lambda\sigma_0$, $c_0 = \sigma_0/2$, $c_1 = \sigma_1/2$ (в рассматриваемом случае $\lambda\sigma_1 = -k$) выражается через гиперболические функции

$$A(\tau) = \frac{1}{\sigma_1} \left[\sigma_0 \tau - \frac{2k}{\sigma_1} (\sigma_1 \theta + \sigma_0) \ln \left(\operatorname{ch} \left(\tau \sqrt{\sigma_1/2} \right) \right) \right],$$

$$B(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\sigma_1}} \operatorname{th} \left(\tau \sqrt{\frac{\sigma_1}{2}} \right).$$

Отметим, что модели временной структуры Васичека и Даффи – Кана в литературе достаточно подробно изучены (см., напр., книгу Медведева (2005)), но последний случай $\{\alpha = 1, \beta = 0\}$, предусматривающий ограничение $\lambda\sigma_1 = -k$ (возможно, редко встречающийся на реальном рынке), еще нигде не обсуждался. Для него кривая доходности

$$y(\tau, r) = \frac{rB(\tau) - A(\tau)}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 \tau} \left(r \sqrt{2\sigma_1} \operatorname{th} \left(\tau \sqrt{\frac{\sigma_1}{2}} \right) - \sigma_0 \tau + \frac{2k}{\sigma_1} (\sigma_1 \theta + \sigma_0) \ln \left[\operatorname{ch} \left(\tau \sqrt{\frac{\sigma_1}{2}} \right) \right] \right)$$

и форвардная кривая

$$f(\tau, r) = r \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1} \left[(\sigma_0 + \sigma_1 r) \operatorname{sch} \left(\tau \sqrt{\frac{\sigma_1}{2}} \right)^2 + \frac{k(\sigma_1 \theta + \sigma_0)}{\sqrt{2\sigma_1}} \operatorname{th} \left(\tau \sqrt{\frac{\sigma_1}{2}} \right) \right] - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$$

являются полиномами первой степени.

Заметим, что обе эти кривые имеют одинаковое предельное значение при $\tau \rightarrow \infty$, равное

$$k \left(\theta + \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right) \sqrt{\frac{2}{\sigma_1}} - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}.$$

На рис. 11.1 кривые $y(\tau, r)$ и $f(\tau, r)$ представлены для следующих значений параметров: $r = 0,01, 0,1, 0,2, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9$; $k = 0,4$; $\theta = 9^{-1}$; $\sigma_0 = 0,16$; $\sigma_1 = 0,18$. Для представления кривых «целиком» для всего интервала возможных значений сроков до погашения $\tau \in (0, \infty)$ использовано нелинейное преобразование сроков до погашения: $u = 1 - e^{-\rho\tau}$, которое отображает

положительную полуось $(0, \infty)$ в единичный интервал $(0, 1)$. Принятое при расчетах численное значение $\rho = \ln 10/30 = 0,07675$ соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал $(0, 0,9)$.

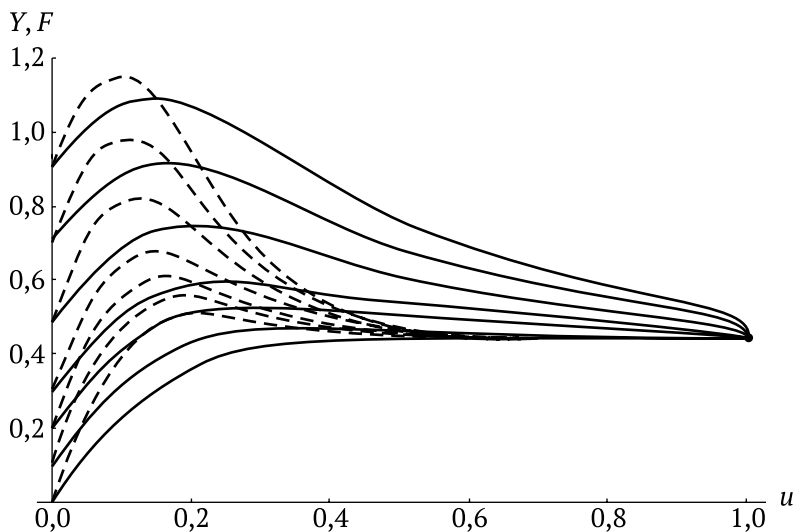


Рис. 11.1. Кривые доходности $Y(u, r)$ (сплошные линии) и форвардные кривые $F(u, r)$ (штриховые линии)

Кривые стартуют из точки $Y(0, r) = F(0, r) = r$ и при $u \rightarrow 1$ стремятся к одному и тому же пределу $Y(1, r) = F(1, r) = 0,444$.

Предположим наконец, что $k < \delta = \max\{\alpha + 2k - 2, \beta + k - 1\}$. Из уравнения временной структуры (11.1) получаем равенство

$$\begin{aligned}
 & -r - \sum_{i=0}^k \frac{da_i(\tau)}{d\tau} r^i + \sum_{j=0}^{\beta} b_j r^j \sum_{i=1}^k i a_i(\tau) r^{i-1} + \\
 & + \sum_{j=0}^{\alpha} c_j r^j \left(\sum_{i=2}^k i(i-1) a_i(\tau) r^{i-2} + \left(\sum_{i=1}^k i a_i(\tau) r^{i-1} \right)^2 \right) = 0.
 \end{aligned}$$

В этом случае для определения $(k+1)$ функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, получается система $(k+1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнения этой системы являются однородными, за исключением одного, при $i = 1$) и система $(\delta - k) \geq 1$ однородных алгебраических уравнений. Поскольку $\{r^i\}$ – это система линейно независимых функций, уравнения для $a_i(\tau)$ можно найти приравниванием к нулю коэффициентов при r^i , $i = 0, 1, 2, \dots, \delta$. Коэффициенты при r^i , $0 \leq i \leq k$, приводят к системе дифференциальных уравнений, а коэффициенты при r^i , $k < i \leq \delta$, – к системе алгебраических уравнений. Заметим, что коэффициент при r^δ имеет вид либо $k^2 c_\alpha a_k(\tau)^2$ в случае $\delta = \alpha + 2k - 2$, либо $kb_\beta a_k(\tau)$ в случае $\delta = \beta + k - 1$, либо $(k^2 c_\alpha a_k(\tau) + kb_\beta) a_k(\tau)$,

когда $\delta = \alpha + 2k - 2 = \beta + k - 1$. Во всех этих случаях он имеет в качестве множителя функцию $a_k(\tau)$ и равномерно по τ должен быть равен нулю. Следовательно, равномерно по τ равна нулю функция $a_k(\tau)$, равна нулю и ее производная. Отсюда имеем, что степень полинома доходности понижается до $(k - 1)$. Вместе с этим понижается и порядок системы дифференциальных уравнений (уравнение с производной функции $a_k(\tau)$ становится алгебраическим). После приравнивания нулю функции $a_k(\tau)$ и ее производной в оставшейся системе в уравнении, полученном приравниванием коэффициента при $\tau^{\delta-1}$ нулю, окажется множителем функция $a_{k-1}(\tau)$. Ввиду однородности уравнения эта функция равномерно по τ должна быть равна нулю. Так что равна нулю и ее производная. Степень полинома доходности понижается до $(k - 2)$. Продолжение этой процедуры приводит к тому, что функция $a_1(\tau)$ должна быть равна нулю, но при $i = 1$ уравнение является неоднородным, и это исключается, что приводит к противоречию. Отсюда следует, что не существует конечного k , для которого полином (11.2) мог бы быть решением уравнения (11.1).

Для иллюстрации описанной процедуры приведем пример. Пусть $k = \alpha = \beta = 2$, когда $\delta = 4$. Тогда относительно функций $\{a_i(\tau)\}$ получается система трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{da_0(\tau)}{d\tau} &= a_1(\tau)b_0 + a_1^2(\tau)c_0 + 2a_2(\tau)c_0, \\ \frac{da_1(\tau)}{d\tau} &= a_1(\tau)b_1 + a_1^2(\tau)c_1 + 2a_2(\tau)c_1 + 2a_2(\tau)b_0 + 4a_1(\tau)a_2(\tau)c_0 - 1, \\ \frac{da_2(\tau)}{d\tau} &= a_1(\tau)b_2 + a_1^2(\tau)c_2 + 2a_2(\tau)c_2 + 2a_2(\tau)b_1 + 4a_1(\tau)a_2(\tau)c_1 + 4a_2^2(\tau)c_0\end{aligned}$$

и система двух алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}2a_2(\tau)b_2 + 4a_1(\tau)a_2(\tau)c_{21} + 4a_2^2(\tau)c_1 &= 0, \\ 4a_2^2(\tau)c_2 &= 0.\end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что $a_2(\tau) = 0$ для всех возможных τ , поэтому равна нулю и производная этой функции. Используем это в исходной системе уравнений. Тогда она преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\frac{da_0(\tau)}{d\tau} &= a_1(\tau)b_0 + a_1^2(\tau)c_0, \\ \frac{da_1(\tau)}{d\tau} &= a_1(\tau)b_1 + a_1^2(\tau)c_1 - 1, \\ a_1(\tau)b_2 + a_1^2(\tau)c_2 &= 0.\end{aligned}$$

Из третьего уравнения получаем, что $a_1(\tau) = 0$ для всех возможных τ , поэтому равна нулю и производная этой функции. Однако это противоречит второму уравнению. Следовательно, решения в виде (11.2) не существует.

ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА КАК СТЕПЕННОЙ РЯД

Итак, решения (11.2) для конечных k не существует, но может оно существует при неограниченном k , т. е. может быть существует решение в виде функционального ряда

$$z(\tau, r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\tau) r^i. \quad (11.3)$$

Проверим эту версию. После подстановки представления (11.3) в уравнение (11.1) оно преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & -r - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{da_i(\tau)}{d\tau} r^i + \sum_{j=0}^{\beta} b_j r^j \sum_{i=1}^{\infty} i a_i(\tau) r^{i-1} + \\ & + \sum_{j=0}^{\alpha} c_j r^j \left(\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i(\tau) r^{i-2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} i a_i(\tau) r^{i-1} \right)^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Изменяя порядок суммирования в двойных суммах этого выражения, его можно записать в более удобном для анализа виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{da_i(\tau)}{d\tau} - B_i(\tau) - C_i(\tau) + \delta_{i1} \right) r^i = 0, \quad (11.4)$$

где δ_{i1} – символ Кронекера ($\delta_{11} = 1$, $\delta_{i1} = 0$, если $i \neq 1$), а функции $B_i(\tau)$ и $C_i(\tau)$ определяются равенствами

$$B_i(\tau) = \sum_{j=u}^i b_{i-j} (j+1) a_{j+1}(\tau) + \sum_{j=v}^i c_{i-j} (j+1)(j+2) a_{j+2}(\tau), \quad (11.5)$$

$$C_i(\tau) = \sum_{j=v}^i c_{i-j} \left(\sum_{l=1}^{j+1} l(j+2-l) a_l(\tau) a_{j+2-l}(\tau) \right), \quad (11.6)$$

где $u = \max\{0, i - \beta\}$, $v = \max\{0, i - \alpha\}$.

Поскольку равенство (11.4) должно удовлетворяться равномерно по переменным r и τ , а степенные функции $\{r^i\}$ линейно независимы, то для справедливости (11.4) при всех значениях индекса $i = 0, 1, 2, \dots$ должны выполняться равенства

$$\frac{da_i(\tau)}{d\tau} - B_i(\tau) - C_i(\tau) + \delta_{i1} = 0, \quad a_i(0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.7)$$

которые с учетом (11.5) и (11.6) образуют бесконечную систему дифференциальных уравнений относительно функций $\{a_i(\tau)\}$. Заметим, что эта система является неоднородной. Решение ее в аналитическом виде проблематично, поскольку, во-первых, уравнения (11.7) – нелинейные из-за функции $C_i(\tau)$ в виде (11.6), и во-вторых, из-за того, что в уравнении (11.7) для функции $a_i(\tau)$ используются не только предыдущие $a_j(\tau)$, $j \leq i$, но и последующие функции $a_{i+1}(\tau)$ и $a_{i+2}(\tau)$, нельзя реализовать стандартную рекуррентную процедуру для последовательного решения дифференциальных уравнений системы (11.7).

Вместе с тем можно попытаться вычислить функции $\{a_i(\tau)\}$ с помощью следующей эвристической процедуры. Заметим, что формулы (11.5) и (11.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} B_i(\tau) &= c_0(i+1)(i+2)a_{i+2}(\tau) + (i+1)(b_0 + ic_1)a_{i+1}(\tau) + \\ &+ i(b_1 + (i-1)c_2)a_i(\tau) + (i-1)(b_2 + (i-1)c_3)a_{i-1}(\tau) + \dots \\ C_i(\tau) &= 2c_0[(i+1)a_1(\tau)a_{i+1}(\tau) + 2ia_2(\tau)a_i(\tau) + 3(i-1)a_3(\tau)a_{i-1}(\tau) + \dots] + \\ &+ 2c_1[ia_1(\tau)a_i(\tau) + 2(i-1)a_2(\tau)a_{i-1}(\tau) + \dots] + 2c_2[(i-1)a_1(\tau)a_{i-1}(\tau) + \dots] + \dots \end{aligned}$$

С помощью этих представлений уравнения (11.7) можно переписать так, чтобы функция $a_i(\tau)$ выражалась только через функции с предыдущими индексами или их производные

$$\begin{aligned} a_2(\tau) &= \frac{1}{2c_0} \left(\frac{da_0(\tau)}{d\tau} - b_0a_1(\tau) - c_0a_1(\tau)^2 \right), \\ a_3(\tau) &= \frac{1}{6c_0} \left(\frac{da_1(\tau)}{d\tau} - b_02a_2(\tau) - b_1a_1(\tau) - c_04a_1(\tau)a_2(\tau) - c_1(2a_2(\tau) + a_1(\tau)^2) + 1 \right), \\ a_4(\tau) &= \frac{1}{12c_0} \left(\frac{da_2(\tau)}{d\tau} - 3b_0a_3(\tau) - 2b_1a_2(\tau) - b_2a_1(\tau) - c_0(6a_1(\tau)a_3(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + 4a_2(\tau)^2) - c_1(6a_3(\tau) + 4a_1(\tau)a_2(\tau)) - c_2(2a_2(\tau) + a_1(\tau)^2) \right), \\ a_5(\tau) &= \frac{1}{20c_0} \left(\frac{da_3(\tau)}{d\tau} - 4b_0a_4(\tau) - 3b_1a_3(\tau) - 2b_2a_2(\tau) - b_3a_1(\tau) - \right. \\ &\quad \left. - c_0(8a_1(\tau)a_4(\tau) + 12a_2(\tau)a_3(\tau)) - c_1(12a_4(\tau) + 6a_1(\tau)a_3(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + 4a_2(\tau)^2) - c_2(6a_3(\tau) + 4a_1(\tau)a_2(\tau)) - c_3(2a_2(\tau) + a_1(\tau)^2) \right) \end{aligned}$$

и вообще для $i > 3$

$$a_{i+2}(\tau) = \frac{1}{c_0(i+1)(i+2)} \left(\frac{da_i(\tau)}{d\tau} - (i+1)[b_0 + ic_1 + 2c_0a_1(\tau)]a_{i+1}(\tau) - \right.$$

$$-i[b_1 + (i-1)c_2 + 2c_1a_1(\tau) + 4c_0a_2(\tau)]a_i(\tau) - (i-1)[b_2 + (i-2)c_3 + \\ + 2c_2a_1(\tau) + 4c_1a_2(\tau) + 6c_0a_3(\tau)]a_{i-1}(\tau) - \dots \Bigg).$$

Из этих выражений следует, что все функции $a_i(\tau)$ для $i > 1$ могут быть последовательно выражены через две первые функции $a_0(\tau)$ и $a_1(\tau)$. Если удастся определить эти функции каким-либо образом или оценить их, рассматривая выборку наблюдений, остальные функции можно последовательно определить.

К сожалению, с ростом индекса i будет увеличиваться громоздкость выражений для функций $a_i(\tau)$. Кроме того, такая процедура не гарантирует того, что получающиеся функции $a_i(\tau)$ будут удовлетворять начальным условиям $a_i(0) = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Имеются и другие требования к функциям $\{a_i(\tau)\}$, основанные на их экономическом смысле. Если решение (11.3) уравнения (11.1) существует, то кривая доходности до погашения выражается в виде

$$y(\tau, r) = -\frac{z(\tau, r)}{\tau} = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i(\tau)}{\tau} r^i, \quad (11.8)$$

что налагает на функции $a_i(\tau)$ определенные свойства.

Для равномерной сходимости ряда (11.8) необходимо, чтобы $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i(\tau) = 0$ равномерно по τ . Предельная долгосрочная доходность $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau, r) \equiv y(\infty)$ должна быть неотрицательной, конечной и не зависеть от значений краткосрочной ставки r .

В связи с этим функция $a_0(\tau)$ должна иметь прямолинейную асимптоту $\text{const} - \tau y(\infty)$, так как $\lim_{\tau \rightarrow \infty} a_0(\tau)/\tau = -y(\infty)$. При этом каждая функция $a_i(\tau)$, $i \geq 1$, должна удовлетворять условию $\lim_{\tau \rightarrow \infty} a_i(\tau)/\tau = 0$. Для этого достаточно, чтобы для каждой функции существовал конечный предел $\lim_{\tau \rightarrow \infty} a_i(\tau) = a_i$. В этом случае

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{da_i(\tau)}{d\tau} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому предельные значения a_i находятся из системы алгебраических уравнений

$$2c_0a_2 + b_0a_1 + c_0a_1^2 + y(\infty) = 0, \\ 6c_0a_3 + b_02a_2 + b_1a_1 + c_04a_1a_2 + c_1(2a_2 + a_1^2) = 1, \\ (i+1)(i+2)c_0a_{i+2} + \sum_{j=i}^i b_{i-j}(j+1)a_{j+1} + \sum_{j=i+1}^i j(j+1)c_{i-j+1}a_{j+1} +$$

$$+ \sum_{j=v}^i c_{i-j} \left(\sum_{l=1}^{j+1} l(j+2-l) a_l a_{j+2-l} \right) = 0, \quad i > 1.$$

Как видно из этой системы, значения $a_i, i > 1$, последовательно выражаются по рекуррентным формулам через две величины a_1 и $y(\infty)$:

$$a_2 = -\frac{a_1 b_0 + a_1^2 c_0 + y(\infty)}{2c_0} = 0,$$

$$a_3 = \frac{c_0 + a_1(b_0^2 + c_0(2a_1^2 c_0 - b_1) + b_0(3a_1 c_0 + c_1)) + (b_0 + 2a_1 c_0 + c_1)y(\infty)}{6c_0^2},$$

$$a_4 = \frac{1}{24c_0^3} (3a_1 b_0 b_1 c_0 - a_1 b_0^3 - b_0 c_0 - 7a_1^2 b_0^2 c_0 - 2a_1 c_0^2 - 12a_1^3 b_0 c_0^2 + 4a_1^2 b_1 c_0^2 - 2a_1 b_2 c_0^2 - \\ - 6a_1^4 c_0^3 - 3a_1 b_0^2 c_1 - 2c_0 c_1 - 4a_1^2 b_0 c_0 c_1 + 2a_1 b_1 c_0 c_1 - 2a_1 b_0 c_1^2 + 2a_1 b_0 c_0 c_2 + (2c_0 c_2 - \\ - b_0^2 - 8a_1 b_0 c_0 + 2b_1 c_0 - 8a_1^2 c_0^2 - 3b_0 c_1 - 2a_1 c_0 c_1 - 2c_1^2)y(\infty) + 2c_0 y^2(\infty)) \text{ и т. д.}$$

К сожалению, с ростом индекса очень быстро растет сложность получающихся выражений a_i через величины a_1 и $y(\infty)$, причем значения самих величин в рамках этой системы уравнений не определяются.

В то же время по определению $\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau, r) = r$. Следовательно, если представление (11.8) имеет место, то

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau, r) = -\lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i(\tau)}{\tau} r^i = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{da_i(\tau)}{d\tau} \bigg|_{\tau=0} r^i = r,$$

так что

$$\frac{da_1(\tau)}{d\tau} \bigg|_{\tau=0} = -1, \quad \frac{da_i(\tau)}{d\tau} \bigg|_{\tau=0} = 0, \quad i \neq 1.$$

ТЕСТИРОВАНИЕ ИЗВЕСТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Таким образом, если набор функций $\{a_i(\tau)\}$ обладает перечисленными выше свойствами, есть надежда, что временная структура доходности имеет представление в виде степенного ряда (11.8). Функции $\{a_i(\tau)\}$ определяются уравнениями (11.5)–(11.7) с помощью наборов коэффициентов $\{b_j | 0 \leq j \leq \beta\}$ и $\{c_j | 0 \leq j \leq \alpha\}$. В свою очередь, набор коэффициентов определяется принятой моделью процесса краткосрочной процентной ставки. Рассмотрим некоторые примеры известных моделей краткосрочной ставки. Более интересны модели, для которых уравнения для функций $\{a_i(\tau)\}$ по-

лучаются такими, что последующие функции определяются только через предыдущие. Тогда функции $a_i(\tau)$ можно найти в аналитическом виде. К таким моделям относятся модель CIR (1980) (Cox, Ingersoll, Ross, 1980) и модель Ана – Гао (Ahn, Gao, 1999). Рассмотрим их.

Пусть процесс краткосрочной ставки $r(t)$ задается моделью CIR (1980), которая предусматривает, что

$$dr(t) = \sigma r(t)^\gamma dw(t), \quad r(t) \geq r_0,$$

где r_0 – нижняя граница возможных значений процентной ставки (см. главу 1). Примем $\gamma = 2,5$, что обеспечивает процессу $r(t)$ существование стационарного режима с математическим ожиданием $E[r(t)] = 2r_0$ и дисперсией $\text{Var}[r(t)] = 2r_0^2$. Для такой модели наборы коэффициентов $\{b_j\}$ и $\{c_j\}$ определяются так: $b_j = 0, j \geq 0$; $c_5 = 0,5\sigma^2$, $c_j = 0, j \neq 5$. Подставляя эти значения в соотношения (11.5)–(11.7), получаем систему уравнений, решения которых для $\{a_i(\tau), i \leq 10\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_0(\tau) = a_2(\tau) = a_3(\tau) = a_4(\tau) = a_6(\tau) = a_7(\tau) = a_{10}(\tau) = 0, \\ a_1(\tau) = -\tau, \quad a_5(\tau) = \frac{c_5 \tau^3}{3}, \quad a_8(\tau) = \frac{5c_5^2 \tau^4}{3}, \quad a_9(\tau) = -\frac{2c_5^2 \tau^5}{3}. \end{aligned}$$

Нетрудно выяснить, что ненулевые функции с последующими индексами тоже будут степенными функциями со степенями, увеличивающимися с номером индекса, что противоречит свойству $\lim_{\tau \rightarrow \infty} a_i(\tau)/\tau = 0$. Следовательно, кривая доходности для модели CIR (1980) не может быть представлена в виде ряда (11.8).

Рассмотрим теперь в качестве модели процесса краткосрочной ставки $r(t)$ модель Ана – Гао, задаваемую соотношением

$$dr(t) = k(\theta - r(t))r(t) + \sigma r(t)^{3/2} dw(t).$$

Для этой модели наборы коэффициентов $\{b_j\}$ и $\{c_j\}$ определяются так: $b_0 = 0$, $b_1 = k\theta > 0$, $b_2 = -k$; $b_j = 0, j \geq 3$; $c_3 = 0,5\sigma^2$; $c_j = 0, j \neq 3$. Аналитический вид первых функций $a_i(\tau)$ оказывается таким:

$$\begin{aligned} a_0(\tau) = 0, \quad a_1(\tau) = -\frac{1}{b_1}(e^{\tau b_1} - 1), \quad a_2(\tau) = -\frac{b_2}{2b_1^2}(e^{\tau b_1} - 1)^2, \\ a_3(\tau) = -\frac{b_2^2 - c_3 + b_2 c_3}{3b_1^3}(e^{\tau b_1} - 1)^3, \\ a_4(\tau) = -\frac{b_2^3 + 3(b_2 - 1)b_2 c_3 + 2(b_2 - 1)c_3^2}{4b_1^4}(e^{\tau b_1} - 1)^4 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Как видно, функции $a_i(\tau)$ экспоненциально возрастают по абсолютной величине с ростом τ , что препятствует сходимости ряда (11.8).

Приведенные примеры демонстрируют, что представление временной структуры доходности в виде ряда если возможно, то не всегда. Правда, это не доказывает того факта, что не существует таких моделей краткосрочной процентной ставки, для которых временная структура может быть представлена в виде степенного ряда (11.8). Для такого доказательства нужно отдельное исследование.

ВЫВОДЫ

В большинстве диффузионных моделей краткосрочных процессов процентных ставок функции дрейфа и диффузии задаются в виде полиномов. Среди известных в аналитическом виде временных структур доходности, соответствующих этим моделям, имеется класс аффинных моделей, в котором временные структуры тоже описываются полиномами. Возникает вопрос: существуют ли еще такие модели краткосрочных процессов процентных ставок, для которых временные структуры – полиномы по значениям процентной ставки? В главе показано, что ответ на этот вопрос – отрицательный. Несколько более сложным для анализа оказывается предположение о том, что в рассматриваемом случае временные структуры могут описываться степенным рядом по значениям процентной ставки. В главе найдена структура такого предположительного ряда, для коэффициентов которого получена система дифференциальных уравнений, и обсуждены условия, при которых такой ряд мог бы быть описанием временной структуры доходности. Для диффузионных моделей краткосрочных процессов процентных ставок CIR (1980) и Ана – Гао системы дифференциальных уравнений решены аналитически, и показано, что степенной ряд по значениям процентной ставки не может быть использован в качестве модели временной структуры для этих моделей. К сожалению, доказательства этого в общем случае пока не найдено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ahn, D.-H.* Quadratic term structure models: Theory and evidence / D.-H. Ahn, R. F. Dittmar, A. R. Gallant // Review of Financial Studies. 2001. Vol. 15. P. 243–288.
- Ahn, D.-H.* A parametric nonlinear model of term structure dynamics / D.-H. Ahn, B. Gao // The Review of Financial Studies. 1999. Vol. 12, № 4. P. 721–762.
- Ait-Sahalia, Y.* Testing continuous-time models of the spot interest rate / Y. Ait-Sahalia // Review of Financial Studies. 1996. Vol. 9, № 2. P. 385–426.
- Ait-Sahalia, Y.* Transition densities for interest rate and nonlinear diffusion / Y. Ait-Sahalia // J. of Finance. 1999. Vol. 54. P. 1361–1395.
- Bali, T.* An empirical comparison of continuous time models of the short term interest rate / T. Bali // Journal of Futures Markets. 1999. Vol. 19, № 7. P. 777–797.
- Bank for International Settlements. Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation // BIS Papers. 2005. № 25. P. 1–55.
- BDFS: A simple approach to three factor affine term structure models / P. Balduzzi [et al.] // J. of Fixed Income. 1996. Vol. 6. P. 43–53.
- Black, F.* A one factor model of interest rates and its application to treasury bond options / F. Black, E. Derman, W. Toy // Financial Analysts J. 1990. January – February. P. 33–39.
- Bodie, Z.* Investment / Z. Bodie, A. Kane, J. Marcus. Chicago : Irwin Prof. Publ., 1996.
- Brennan, M. J.* A continuous time approach to the pricing of bond / M. J. Brennan, E. S. Schwartz // J. of Banking and Finance. 1979. Vol. 3. P. 135–155.
- Brown, R.* Interest rate Volatility and Shape of the Term Structure / R. Brown, S. Schaefer // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1994. Vol. A 347. P. 563–576.
- Campbel, J.* The Econometrics of Financial Markets / J. Campbel, A. Lo, A. MacKinlay. Princeton : Princeton Univ. Press, 1997.
- Chen, L.* A three factor of the affine term structure of interest rates and its application to the pricing of interest rate derivatives / L. Chen. N. Y. : Blackwell Publishers. 1996.
- Christensen, J.* The affine arbitrage-free class of Nelson – Siegel term structure models / J. Christensen, F. Diebold, G. Rudebusch // PIER Working Paper № 08–030. 2008. P. 1–38.
- Constantinides, G.* A theory of the nominal structure of interest rates / G. Constantinides // Review of Financial Studies. 1992. Vol. 5. P. 531–552.
- Cox, J. C.* The valuation of options for alternative stochastic processes / J. C. Cox, S. A. Ross // J. of Financial Economics. 1976. Vol. 3. P. 145–166.

- Cox, J. Duration and the Measurement of Basis Risk / J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross // J. of Business. 1979. Vol. 52. P. 51–61.
- CIR: An analysis of variable rate loan contracts / J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross // J. of Finance. 1980. Vol. 35. P. 389–403.
- CIR: A theory of the term structure of interest rate / J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross // Econometrica. 1985. Vol. 53. P. 385–467.
- CKLS: An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate / K. C. Chan [et al.] // J. of Finance. 1992. Vol. 47. P. 1209–1227.
- Dai, Q. Specification analysis of affine term structure models / Q. Dai, K. Singleton // J. of Finance. 2000. Vol. 55(5). P. 1943–1978.
- Diebold, F. Forecasting the term structure of government bond yields / F. Diebold, C. Li // J. of Econometrics. 2006. № 130. P. 337–364.
- Dothan, M. On the term structure of interest rates / M. Dothan // J. of Financial Economics. 1978. Vol. 6. P. 59–69.
- Duffie, D. A yield-factor model of interest rates / D. Duffie, R. Kan // Math. Finance. 1996. Vol. 6. P. 379–406.
- Duffie, D. Singleton An econometric model of the term structure of interest-rate swap yields / D. Duffie, K. J. Singleton // J. of Finance. 1997. Vol. 52. P. 1287–1321.
- Elton, E. Tax and liquidity effects in pricing government bonds / E. Elton, C. Green // J. of Finance. 1998. Vol. 53. P. 1533–1562.
- Fabozzi, F. Bond Markets, Analysis, and Strategies. 4th ed. / F. Fabozzi. N. Y. : Prentice Hall Publishing, 2000.
- Feller, W. Two Singular Diffusion Problems / W. Feller // Ann. Math. 1951. Vol. 54. P. 173–181.
- Fisher, M. Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines / M. Fisher, D. Nychka, D. Zervos // Federal Reserve Board: Discussion Series, Division of Research and Statistics. Washington : DC, 1995.
- Fong, H. G. Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor / H. G. Fong, O. A. Vasiček // Working Paper. Gifford Fong Associates. 1991.
- Fong, H. G. Fixed-income volatility management / H. G. Fong, O. A. Vasiček // J. of Portfolio Management. 1991. P. 41–56.
- Green, R. Are there tax effects in the relative pricing of U. S. government bonds? / R. Green, B. Odegaard // J. of Finance. 1997. Vol. 52. P. 609–633.
- Hu, Z. The Yield Curve and Real Activity / Z. Hu // International Monetary Fund: Working Paper WP/93/19. 1993.
- Hull, J. Options, Futures, and other Derivative Securities / J. Hull. Englewood : Prentice Hall, 1993.
- Hull, J. Numerical procedure for implementing structural models I: Single-factor models / J. Hull, A. White // J. of Derivatives. 1994. Vol. 2. P. 7–16.
- Kloeden, E. Numerical solution of stochastic differential equations / E. Kloeden, E. Platen. Berlin : Springer-Verlag, 1992.
- Kortanek, K. Building and Using Dynamic Interest Rate Models / K. Kortanek, V. Medvedev. N. Y. : John Wiley & Sons, 2001.
- Leippold, M. Design and Estimation of Quadratic Term Structure Models / M. Leippold, L. Wu // European Finance Review. 2003. Vol. 7. P. 47–73.
- Longstaff, F. A. A Nonlinear general Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rate / F. A. Longstaff // J. of Financial Economics. 1989. Vol. 23. P. 195–224.

Longstaff, F. A. Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model / F. A. Longstaff, E. S. Schwartz // J. of Finance. 1992. Vol. 47. P. 1259–1282.

McCulloch, J. H. Measuring the term structure of interest rates / J. H. McCulloch // J. of Business. 1971. Vol. 44. P. 19–31.

Medvedev, G. The Market Price of Risk for Affine Interest Rate Term Structures / G. Medvedev, S. Cox // Proc. of the 6th Intern. AFIR Symposium. Nuremberg. 1996. P. 913–924.

Медведев, Г. А. Стохастические процессы финансовой математики / Г. А. Медведев. Минск : БГУ, 2005.

Медведев, Г. А. О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека / Г. А. Медведев // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 102–111.

Медведев, Г. А. О временной структуре доходности. 2. Модель Кокса – Ингерсолла – Росса / Г. А. Медведев // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 102–111.

Медведев, Г. А. О временной структуре доходности. 3. Однофакторная модель Даффи – Кана / Г. А. Медведев // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3(20). С. 71–80.

Медведев, Г. А. О временной структуре доходности. 4. Двухфакторные модели Даффи – Кана / Г. А. Медведев // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4(21). С. 89–99.

Медведев, Г. А. О временной структуре доходности. 5. Двухфакторные модели Даффи – Кана (продолжение) / Г. А. Медведев // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 64–74.

Медведев, Г. А. О временной структуре доходности. 6. Трехфакторные модели / Г. А. Медведев // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3(24). С. 113–122.

Медведев, Г. А. Кривые доходности в двухфакторных моделях Васичека / Г. А. Медведев // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : сб. науч. ст. – Минск : РИВШ, 2014. С. 136–141.

Медведев, Г. А. О временной структуре доходности. 7. Новая версия / Г. А. Медведев // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4(25). С. 71–83.

Медведев, Г. А. О безарбитражных моделях доходности Нельсона – Сигеля – Свенссона / Г. А. Медведев // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы междунар. науч. конф. Минск : РИВШ, 2015. С. 150–157.

Medvedev, G. A. On the Nelson-Siegel-Svensson no-arbitrage yield curve models / G. A. Medvedev // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Informatika I vychislitel'naya tekhnika (Tomsk State University J. of Control and Computer Science). 2015. № 3(32). С. 44–55.

Medvedev, G. A. The Nelson-Siegel-Svensson yields. Probability properties and estimation / G. A. Medvedev // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Informatika I vychislitel'naya tekhnika (Tomsk State University J. of Control and Computer Science). 2015. № 4(33). С. 38–45.

Медведев, Г. А. Условия отсутствия арбитража в моделях доходности Нельсона, Сигеля и Свенссона / Г. А. Медведев // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2016. № 1. С. 90–96.

Medvedev, G. A. Probability Properties of Interest Rate Models / G. A. Medvedev // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications ; eds.: A. Dudin [et al.]. Cham, 2016. Vol. 638. P. 228–237. (Communications in Computer and Information Science).

Medvedev, G. A. On the probability distribution processes some models of interest rates / G. A. Medvedev // Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and Applied Stochastics: Proc. of the Eleventh Intern. Conf., Minsk, Sept. 6–10, 2016. Minsk : Publishing Center of BSU, 2016. P. 213–217.

Medvedev, G. A. Probability Properties of the Interest Rate Models / G. A. Medvedev // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016) : материалы XV Междунар. конф. имени А. Ф. Терпугова, Томск, 12–16 сент. 2016 г. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2016. Ч. 2. С. 3–8.

Медведев, Г. А. Плотности вероятностей процессов процентных ставок доходности / Г. А. Медведев // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 3(36). С. 35–48.

Медведев, Г. А. Об одной квадратичной модели краткосрочных процентных ставок / Г. А. Медведев // XII Белорус. мат. конф. Минск : Ин-т математики НАН Беларуси, 2016. Ч. 4. С. 12–13.

Медведев, Г. А. О квадратичных моделях доходности в риск-нейтральной среде / Г. А. Медведев, Д. А. Павлив // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 4(37). С. 44–56.

Медведев, Г. А. Об одной квадратичной модели временной структуры доходности / Г. А. Медведев // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 1(38). С. 24–29.

Медведев, Г. А. Полиномиальные модели временной структуры доходности / Г. А. Медведев // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 2(39). С. 39–48.

Медведев, Г. А. Модель временной структуры доходности Лонгстаффа – Шварца и ее расширение // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 3(40). С. 41–51.

Merton, R. C. A Dynamic General Equilibrium Model of the Asset Markets and its Application to the Pricing of the Capital Structure of the Firm / R. C. Merton // Working Paper № 497–70. Massachusetts Institute of Technology. 1970.

Merton, R. C. Theory of Rational Option Pricing / R. C. Merton // Bell J. of Economics and Management Science. 1973. Vol. 4(1). P. 141–183.

Nelson, C. R. Parsimonious modeling of yield curves / C. R. Nelson, A. F. Siegel // J. of Business. 1987. Vol. 60. P. 473–489.

RiskMetrics. <http://www.riskmetrics.com>

Samuelson, P. A. Rational Theory of Warrant Pricing / P. A. Samuelson // Industrial Management Review. 1965. Vol. 6. P. 13–31.

Schaefer, S. M. A two factor model of the term structure: an approximate analytical solution / S. M. Schaefer., E. S. Schwartz // J. of Financial and Quantitative Analysis. 1984. Vol. 19, № 4. P. 413–424.

Schlogl, E. Factor Models and the Shape of the Term Structures / E. Schlogl, D. Sommer // Working Paper № B–395. 1997.

Shiu, E. Closed-Form Formulas for Generalized Cox, Ingersoll and Ross Models / E. Shiu, Y. Yao // Proceedings of AFIR Colloquim. Tokyo, 1999. P. 407–418.

Siegel, A. Long-term behavior of yield curves / A. F. Siegel, C. R. Nelson // J. of Financial and Quantitative Analysis. 1988. Vol. 23. P. 105–110.

Svensson, L. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992–1994 / L. Svensson // Working Paper WP/94/114. International Monetary Fund. 1994.

Svensson, L. Estimating forward interest rates with the extended Nelson – Siegel method / L. Svensson // Quarterly Review. Sveriges Riksbank. 1995. № 3. P. 13–26.

Vasiček, O. A. An equilibrium characterization of the term structure / O. A. Vasiček // J. of Financial Economics. 1977. Vol. 5. P. 177–188.

Welch, G. An Introduction to the Kalman Filter / G. Welch, G. Bishop // UNC–Chapel Hill: TR 95–041. 2006.

Yu, Y. Modeling a two-currency affine arbitrage-free Nelson – Siegel term structure model / Y. Yu // M. Litt. in Finance. 2012. P. 1–52.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. КРАТКОСРОЧНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ И ИХ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА	15
Модель Васичека.....	16
Модель Кокса – Ингерсолла – Росса	16
Модель Даффи – Кана	17
Модель Лонгстаффа.....	18
Модель Ана – Гао	19
Модель Бреннана – Шварца	20
Модель Блэка – Дермана – Тоя	21
Модель Эйт-Сахэйлиа.....	22
Модель SKLS.....	23
Модель без ограничений I.....	23
Модель без ограничений II	25
Модель CEV	26
Модель CIR (1980)	29
Модель Мертона	31
Модель Дотана	31
Модель GBM	31
Выводы	32
Глава 2. ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ДОХОДНОСТИ.....	33
Общие свойства многофакторных моделей временной структуры доходностей	34
Выводы	40
Глава 3. МОДЕЛЬ ВАСИЧЕКА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ.....	41
Кривые доходности и форвардные кривые	41
Кривые доходности в двухфакторных моделях Васичека	46
Глава 4. МОДЕЛЬ КОКСА – ИНГЕРСОЛЛА – РОССА	54
Однофакторная модель Кокса – Ингерсолла – Росса	55
Обобщение модели CIR на многофакторный случай	58

Модель Лонгстаффа – Шварца и ее расширение	63
Числовой пример.....	72
Выводы	76
Глава 5. ОДНОФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ДАФФИ – КАНА	78
Форвардная кривая и кривая доходности в однофакторной модели	
Даффи – Кана.....	80
Свойства форвардной кривой и кривой доходности.....	82
Выводы	87
Глава 6. ДВУХФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ДАФФИ – КАНА	88
Метод малого параметра в двухфакторной модели «ставка – ее локальное среднее»	90
Приближенный анализ двухфакторной модели «ставка – ее мгновенная дисперсия»	96
Свойства двухфакторной модели «ставка – ее локальное среднее».....	99
Свойства двухфакторной модели «ставка – ее мгновенная дисперсия».....	104
Выводы	110
Глава 7. ТРЕХФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ.....	112
Стохастическая волатильность процесса $\theta(t)$	112
Процесс $\theta(t)$ с квадратным корнем.....	115
Гауссовский процесс $\theta(t)$	118
Выводы	120
Глава 8. ДРУГАЯ ВЕРСИЯ ПЕРЕМЕННОЙ СРОКА ДО ПОГАШЕНИЯ ...	123
Однофакторная модель Даффи – Кана	126
Двухфакторные модели	128
Трехфакторные модели.....	131
Выводы	135
Глава 9. МОДЕЛЬ ДОХОДНОСТИ НЕЛЬСОНА – СИГЕЛЯ – СВЕНССОНА.....	137
Модель Нельсона – Сигеля	139
Вероятностные свойства процесса $x(t)$	146
Латентные факторы	148
Оценивание латентных факторов.....	150
Условия отсутствия арбитража для модели Нельсона – Сигеля – Свенссона ..	155
Об условиях отсутствия арбитража для расширения Свенссона	158
Выводы	161
Глава 10. КВАДРАТИЧНЫЕ МОДЕЛИ ДОХОДНОСТИ.....	162
Квадратичные модели с линейной функцией дрейфа	163
Сравнение аффинной и квадратичной моделей.....	177
Глава 11. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДОХОДНОСТИ.....	184
Временная структура доходности	184
Временная структура как полином	186
Временная структура как степенной ряд.....	191
Тестирование известных моделей	194
Выводы	196
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	197

Научное издание

Медведев Геннадий Алексеевич

**ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ДОХОДНОСТИ
В ДИФФУЗИОННЫХ МОДЕЛЯХ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК**

Ответственный за выпуск *Т. М. Турчиняк*

Художник обложки *Т. Ю. Таран*

Технический редактор *Л. В. Жаборова*

Компьютерная верстка *С. Н. Егоровой*

Корректор *Л. С. Мануленко*

Подписано в печать 22.05.2018. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 16,45. Уч.-изд. л. 10,94. Тираж 100 экз. Заказ 263.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.