

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методической работе

_____ Л. Толстик
"27" _____ 2015 г.

Регистрация _____ /уч.



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности
1-31 03 01 Математика (по направлениям)
Направление специальности 1-31 03 01-03
Математика (экономическая деятельность)**

2015 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования 1-31 03 01-2013 (30.08.2013 г.) и учебного плана № G31-139/уч. (30.05.2013 г.) для специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) (направление специальности 1-31 03 01-03 Математика (научно-экономическая деятельность)).

СОСТАВИТЕЛИ:

Радыно Евгений Мефодьевич – доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа
(протокол № 10 от 25.05.2015)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 26.05.2015)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Вероятностными идеями пронизано всё современное естествознание. Эти идеи стимулируют в наши дни развитие всего комплекса знаний, начиная от наук о неживой природе и заканчивая науками об обществе. Понятие вероятности лежит в основе математической дисциплины — теории вероятностей.

Теория вероятностей – это наука, которая изучает математические модели массовых случайных явлений. Если говорить конкретнее, то теория вероятностей устанавливает такие связи между вероятностями случайных событий в математических моделях, которые позволяют вычислять вероятности сложных событий по вероятностям более простых событий.

Призванная изучать количественные характеристики случайных явлений, теория вероятностей, как и всякая точная наука, стала таковой лишь тогда, когда было четко сформулировано понятие вероятностной модели, и была создана ее аксиоматика.

В данной дисциплине на основе аксиоматического подхода А. Н. Колмогорова рассматриваются случайные величины, их числовые характеристики, законы больших чисел, используется теория интегральных преобразований Фурье — Стилтеса (характеристические функции), на их основе изучаются предельные вероятностные закономерности.

Математическая статистика рассматривается как прикладная математическая дисциплина, в которой наиболее плодотворными являются вероятностные методы. Она решает задачи, в каком-то смысле обратные задачам теории вероятностей, а именно, математическая статистика занимается построением математических моделей исследуемых случайных явлений.

Возникновение и развитие математической статистики, как и других математических дисциплин, определялось потребностями практики. В настоящее время ее методы широко используются в различных физических и технических дисциплинах. Они играют важную роль в экономических исследованиях, биологии, медицине, геологии, психологии, социологических исследованиях и других, считавшихся далекими от математики, науках.

Предполагается, что к моменту изучения дисциплины "Теория вероятностей и математическая статистика" изучены следующие дисциплины: *Алгебра и теория чисел, Дискретная математика, Аналитическая геометрия, Математический анализ, Дифференциальные уравнения*, и изложены основы *теории функций комплексного переменного и функционального анализа* (теория меры и интеграла Лебега).

Цель курса «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»: – создать базу знаний и навыков у студентов в указанной области математиков.

Образовательная цель изучения дисциплины «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»: ознакомление студентов с основными принципами теории вероятностей и примерами их приложений.

Развивающая цель: дальнейшее формирование у студентов навыков абстрактного математического мышления и умения применять его в конкретных задачах, повышение их математической культуры.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия теории вероятностей;
- основные математические модели случайных явлений;
- предельные теоремы теории вероятностей;

уметь:

- использовать основные закономерности случайных явлений;
- применять методы теории вероятностей и математической статистики в других науках;

владеть:

- аналитическими методами теории вероятностей.

Учебная программа может применяться для дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» и «Теория вероятностей».

Учебная программа предназначена для студентов 3,4 курсов (6 и 7 семестры) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится 212 часов, в том числе аудиторных занятий – 104 часов, из них:

3 курс 5 семестр – лекционных – 18 часов, лабораторные занятия – 16 часов, УСП – 2 часа. Рекомендуемая форма отчетности – зачет.

3 курс 6 семестр – лекционных – 34 часа, лабораторные занятия – 28 часов, УСП – 6 часов. Рекомендуемая форма отчетности – экзамен.,

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Тема 1.1. Введение

Предмет теории вероятностей. Исторические сведения. Роль теории вероятностей в естествознании.

Тема 1.2. Терминология теории вероятностей.

Предмет и задачи теории вероятностей. События, операции над событиями.

Тема 1.3. Аксиоматика Колмогорова.

Свойства вероятности.

Тема 1.4. Примеры вероятностных пространств.

Классическое, конечное, дискретное вероятностные пространства. Геометрическое вероятностное пространство, парадокс Бертрانا. Статистическая вероятность и устойчивость частот.

Раздел 2.

НЕЗАВИСИМОСТЬ

Тема 2.1. Условные вероятности

Определение условной вероятности. Теоремы умножения. Формула полной вероятности и формулы Байеса.

Тема 2.2. Независимость событий

Определение независимости двух событий и независимости в совокупности нескольких событий. Независимость классов событий.

Тема 2.3. Независимые испытания

Схема Бернулли, полиномиальная схема.

Тема 2.4. Предельные теоремы

Локальные и интегральные предельные теоремы Муавра — Лапласа и Пуассона и их приложения.

Раздел 3.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Тема 3.1. Случайные величины и их распределения

Распределение вероятностей как мера на борелевской сигма-алгебре, связанная с данной случайной величиной.

Тема 3.2. Классификация случайных величин

Теорема Лебега. Распределения: биномиальное, геометрическое, пуассоновское, равномерное, нормальное, показательное, хи-квадрат, Стьюдента, Фишера, Коши и др. Функция и плотность распределения.

Тема 3.3. Многомерные случайные величины

Свойства многомерной функции распределения. Классификация многомерных случайных величин

Тема 3.4. Независимость случайных величин

Критерии независимости.

Тема 3.5. Функциональные преобразования случайных величин

Функции от случайных величин и соответствующие преобразования функции и плотности распределения. Формула свертки.

Раздел 4.

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Тема 4.1. Математическое ожидание и его свойства

Математическое ожидание случайной величины как интеграл Лебега. Выражение для математического ожидания борелевской функции от случайной величины через интеграл Лебега - Стильтьеса. Свойство мультипликативности математических ожиданий.

Тема 4.2. Моменты случайных величин

Дисперсия и ее свойства. Моменты высших порядков

Тема 4.3. Неравенства. Коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции и его свойства. Неравенства Коши — Буняковского, Чебышева, Ляпунова, Иенсена.

Раздел 5.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Тема 5.1. Определение и простейшие свойства

Примеры характеристических функций.

Тема 5.2. Формулы обращения для характеристических функций

Однозначность соответствия между характеристическими функциями и соответствующими распределениями вероятностей.

Тема 5.3. Непрерывность соответствия между множествами функций распределения и характеристических функций

Теоремы Хелли, прямая и обратная предельные теоремы.

Раздел 6.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Тема 6.1. Центральная предельная теорема

Предельная теорема для независимых одинаково распределенных слагаемых. Условие Линдеберга. Теорема Ляпунова.

Тема 6.2. Сходимость случайных величин

Различные виды сходимости случайных величин (сходимость почти наверное, сходимость по вероятности, сходимость в среднем, слабая сходимость) и связь между ними.

Тема 6.3. Законы больших чисел

Понятие о предельных законах, отличных от нормального (в обзорном порядке)

Раздел 7.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Тема 7.1. Определение случайного процесса

Процессы с дискретным и непрерывным временем. Траектории случайного процесса.

Тема 7.2. Случайные процессы с независимыми приращениями

Примеры: пуассоновский случайный процесс и случайный процесс броуновского движения.

Раздел 8.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Тема 8.1. Предмет и задачи математической статистики

Тема 8.2. Основные понятия и элементы выборочной теории

Выборка, вариационный ряд, гистограмма, полигон частот, эмпирическая функция распределения, теорема Гливленко. Асимптотическая нормальность выборочных моментов.

Тема 8.3. Оценивание неизвестных параметров

Состоятельность (сильная состоятельность) оценок. Смещенные и несме-

щенные оценки, оптимальные оценки. Неравенство Рао — Крамера. Эффективность. Методы максимального правдоподобия и моментов. Достаточные статистики. Доверительное оценивание.

Тема 8.4. Проверка статистических гипотез

Равномерно наиболее мощные критерии.

Тема 8.5. Параметрические гипотезы

Лемма Неймана — Пирсона. Примеры.

Тема 8.6. Линейная регрессия и метод наименьших квадратов

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Форма контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	5 семестр							
1.	Раздел 1. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА	4	0	0	6	0	0	
1.1.	<i>Тема 1.1. Введение</i>	1	0	0	0	0	0	
1.1.1	Предмет теории вероятностей. Исторические сведения. Роль теории вероятностей в естествознании.							
1.2.	<i>Тема 1.2. Терминология теории вероятностей.</i>	1	0	0	2	0	0	
1.2.1.	Предмет и задачи теории вероятностей. События, операции над событиями.							
1.3.	<i>Тема 1.3. Аксиоматика Колмогорова.</i>	1	0	0	2	0	0	
1.3.1.	Свойства вероятности.							
1.4.	<i>Тема 1.4. Примеры вероятностных пространств.</i>	1	0	0	2	0	0	Опрос
1.4.1.	Классическое, конечное, дискретное вероятностные пространства. Геометрическое вероятностное пространство, парадокс Бертрана. Статистическая вероятность и устойчивость частот.							
2.	Раздел 2. НЕЗАВИСИМОСТЬ	4	0	0	4	0	0	
2.1.	<i>Тема 2.1. Условные вероятности</i>	1	0	0	1	0	0	
2.1.1.	Определение условной вероятности. Теоремы умножения. Формула полной вероятности и формулы Байеса.							

2.2.	<i>Тема 2.2. Независимость событий</i>	1	0	0	1	0	0	
2.2.1.	Определение независимости двух событий и независимости в совокупности нескольких событий. Независимость классов событий.							
2.3.	<i>Тема 2.3. Независимые испытания</i>	1	0	0	1	0	0	
2.3.1.	Схема Бернулли, полиномиальная схема.							
2.4.	<i>Тема 2.4. Предельные теоремы</i>	1	0	0	1	0	0	Коллоквиум
2.4.1.	Локальные и интегральные предельные теоремы Муавра — Лапласа и Пуассона и их приложения.							
3.	Раздел 3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	10	0	0	6	0	2	
3.1	<i>Тема 3.1. Случайные величины и их распределения</i>	2	0	0	1		0	
3.1.1.	Распределение вероятностей как мера на борелевской сигма-алгебре, связанная с данной случайной величиной.					0		
3.2.	<i>Тема 3.2. Классификация случайных величин</i>	2	0	0	1	0	0	
3.2.1.	Теорема Лебега. Распределения: биномиальное, геометрическое, пуассоновское, равномерное, нормальное, показательное, хи-квадрат, Стьюдента, Фишера, Коши и др. Функция и плотность распределения.							
3.3.	<i>Тема 3.3. Многомерные случайные величины</i>	2	0	0	1	0	0	
3.3.1.	Свойства многомерной функции распределения. Классификация многомерных случайных величин							
3.4.	<i>Тема 3.4. Независимость случайных величин</i>	2	0	0	1	0	0	
3.4.1.	Критерии независимости.							
3.5.	<i>Тема 3.5. Функциональные преобразования случайных величин</i>	2	0	0	2	0	2	Контрольная работа
3.5.1.	Функции от случайных величин и соответствующие преобразования функции и плотности распределения. Формула свертки.							
	Всего за семестр	18			16		2	
	6 семестр							
4.	Раздел 4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙ-	6	0	0	8	0	2	

	НЫХ ВЕЛИЧИН							
4.1.	<i>Тема 4.1. Математическое ожидание и его свойства</i>	2	0	0	4	0	0	Опрос
4.1.1.	Математическое ожидание случайной величины как интеграл Лебега. Выражение для математического ожидания борелевской функции от случайной величины через интеграл Лебега - Стильеса. Свойство мультипликативности математических ожиданий.							
4.2.	<i>Тема 4.2. Моменты случайных величин</i>	2	0	0	2	0	0	Опрос
4.2.1.	Дисперсия и ее свойства. Моменты высших порядков							
4.3.	<i>Тема 4.3. Неравенства. Коэффициент корреляции</i>	2	0	0	2	0	2	Контрольная работа
4.3.1.	Коэффициент корреляции и его свойства. Неравенства Коши — Буняковского, Чебышева, Ляпунова, Иенсена.							
5.	Раздел 5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	8	0	0	4	0	2	
5.1.	<i>Тема 5.1. Определение и простейшие свойства</i>	2	0	0	2	0	0	Опрос
5.1.1.	Примеры характеристических функций.							
5.2.	<i>Тема 5.2. Формулы обращения для характеристических функций</i>	2	0	0	1	0	0	Опрос
5.2.1.	Однозначность соответствия между характеристическими функциями и соответствующими распределениями вероятностей.							
5.3.	<i>Тема 5.3. Непрерывность соответствия между множествами функций распределения и характеристических функций</i>	4	0	0	1	0	2	Коллоквиум
5.3.1.	Теоремы Хелли, прямая и обратная предельные теоремы.							
6.	Раздел 6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ	6		0	4	0	0	
6.1.	<i>Тема 6.1. Центральная предельная теорема</i>	2		0	2		0	Опрос
6.1.1.	Предельная теорема для независимых одинаково распределенных слагаемых. Условие Линдеберга.							

	Теорема Ляпунова.							
6.2.	<i>Тема 6.2. Сходимость случайных величин</i>	2		0	1	0	0	Опрос
6.2.1.	Различные виды сходимости случайных величин (сходимость почти наверное, сходимость по вероятности сходимость в среднем, слабая сходимость) и связь между ними.							
6.3.	<i>Тема 6.3. Законы больших чисел</i>	2		0	1	0	0	Проверка индивидуальных заданий
6.3.1.	Понятие о предельных законах, отличных от нормального (в обзорном порядке)							
7.	Раздел 7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	4	0	0	0	0	0	
7.1.	<i>Тема 7.1. Определение случайного процесса</i>	2	0	0	0	0	0	Опрос
7.1.1.	Процессы с дискретным и непрерывным временем. Траектории случайного процесса.							
7.2.	<i>Тема 7.2. Случайные процессы с независимыми приращениями</i>	2	0	0	0	0	0	Опрос
7.2.1.	Примеры: пуассоновский случайный процесс и случайный процесс броуновского движения.							
8.	Раздел 8. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	10	0	0	12	0	2	
8.1	<i>Тема 8.1. Предмет и задачи математической статистики</i>	2	0	0	2	0	0	
8.2.	<i>Тема 8.2. Основные понятия и элементы выборочной теории</i>	2	0	0	2	0	0	Опрос
8.2.1.	Выборка, вариационный ряд, гистограмма, полигон частот, эмпирическая функция распределения, теорема Гливенко. Асимптотическая нормальность выборочных моментов.							
8.3.	<i>Тема 8.3. Оценивание неизвестных параметров</i>	2	0	0	2	0	0	Опрос
8.3.1.	Состоятельность (сильная состоятельность) оценок. Смещенные и несмещенные оценки, оптимальные оценки. Неравенство Рао — Крамера. Эффективность. Методы максимального правдо-							

	подобия и моментов. Достаточные статистики. Доверительное оценивание.							
8.4.	<i>Тема 8.4. Проверка статистических гипотез</i>	2	0	0	2	0	0	Опрос
8.4.1.	Равномерно наиболее мощные критерии.							
8.5.	<i>Тема 8.5. Параметрические гипотезы</i>	1	0	0	2	0	0	Опрос
8.5.1.	Лемма Неймана — Пирсона. Примеры.							
8.6.	<i>Тема 8.6. Линейная регрессия и метод наименьших квадратов</i>	1	0	0	4	0	2	Коллоквиум, контрольная работа
	Всего за семестр	34	0	0	28	0	6	
	ВСЕГО по дисциплине	52	0	0	44	0	8	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
2. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1978.
3. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища шк., 1979.
4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.
5. Зуеў М. М., Сячко Ул. Ул. Тэорыя імавернасцей і матэматычная статыстыка. Мазыр: Белы вецер, 2000.
6. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика. М.: Высш. шк., 1984.
7. Лазакович Н.В., Сташулёнок С.П., Яблонский О.Л. Теория вероятностей : учебник. – 3-е изд., с изменен. – Минск : БГУ, 2013.
8. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика. М.: Наука, 1985.
9. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982.
10. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987.
11. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.

Дополнительная литература:

12. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.
13. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
14. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1976.
15. Круглов В. М. Дополнительные главы теории вероятностей. М.: Высш. шк., 1984.
16. Лазакович Н.В., Сташулёнок С.П., Яблонский О.Л. Курс теории вероятностей : электронное учебное пособие. – Минск : Электронная книга БГУ, 2003.
17. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.
18. Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М.: Мир, 1983.
19. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.Т.1,2.
20. Хеннекен П. А., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1974.

Сборники задач по дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика":

21. Жданович В.Ф., Лазакович Н.В. Радыно Н.Я. Задания к лабораторным работам по курсу теории вероятностей и математической статистики в двух частях. Ч.1. Минск, 1998.
22. Жданович В.Ф., Лазакович Н.В. Радыно Н.Я., Стушулёнок С.П. Задания к лабораторным работам по курсу теории вероятностей и математической статистики в двух частях. Ч.2. Минск, 1999.
23. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М: МГУ, 1963.
24. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М: Наука, 1986.
25. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей. М: Наука, 1989.
26. Теория вероятностей : практикум : учеб. пособие для студ вузов по мат. спец. : в 2 ч. Ч. 1 / [авт.: Н. В. Лазакович, Е. М. Радыно, С. П. Сташулёнок, С. Л. Штин, О.Л. Яблонский] ; под ред. Н. В. Лазаковича. - Минск : БГУ, 2011. – 147 с.
27. Теория вероятностей : практикум : учеб. пособие для студ вузов по мат. спец. : в 2 ч. Ч. 2 / [авт.: Н. В. Лазакович, Е. М. Радыно, С. П. Сташулёнок, А. Г. Яблонская, О.Л. Яблонский] ; под ред. Н. В. Лазаковича. - Минск : БГУ, 2014.– 175с.

Справочная литература:

28. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973
29. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Королук В. С., Портенко Н. И., Скороход А.В., Турбин А. Ф.—М: Наука, 1985.

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ

на ____ / ____ учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
(протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой

(степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

(степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)