

Белорусский государственный университет

950

Проректор по учебной работе  
« 26 » \_\_\_\_\_ 2015 г.  
Регистрация \_\_\_\_\_ 839 /уч.



**КОМБИНАТОРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И  
ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности**

**1-31 03 08 Математика и информационные технологии**

2015г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 08 и учебного плана, утвержденного 30.05.2013, регистрационный № G31-134/уч. по специальности 1-31 03 08 Математика и информационные технологии.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Бахтин Виктор Иванович**, профессор кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Лебедев Андрей Владимирович**, профессор кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Пиндрик Ольга Исааковна**, доцент кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой нелинейного анализа и аналитической экономики  
(протокол № 12 от 22.05.2015)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета  
Белорусского государственного университета  
(протокол № 6 от 26.05.2015)

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время методы комбинаторного моделирования и исследования операций широко применяются в самых различных областях человеческой деятельности. В нашей стране теоретическим и практическим применениям методов исследования операций придается исключительно большое значение, так как подавляющее большинство производственных задач решаются при помощи этих методов.

Исследование операций и комбинаторное моделирование как самостоятельное научное направление возникло из потребностей наилучшей организации боевых действий, а также прогнозирования их исхода при принятии командованием различных решений. С помощью методов исследования операций можно планировать стратегические и тактические операции, в частности, в условиях неполного знания о состоянии вооруженных сил противника.

Математические методы этой науки первоначально использовались при проектировании авиационных, ракетных и космических комплексов. Основу математического аппарата проектирования составляют линейное, нелинейное и динамическое программирование, теория принятия решений и теория игр.

После второй мировой войны методы исследования операций получили широкое применение при перспективном и текущем планировании научно-исследовательских работ, проектировании различных объектов, управлении производственными и технологическими процессами, прогнозировании развития отдельных отраслей промышленности и сельского хозяйства. Особенно часто к ним обращаются при решении задач минимизации расходов, максимизации прибыли, распределения трудовых ресурсов и запасов, назначения сроков профилактического ремонта оборудования, выбора средств транспортировки грузов, составления графиков расписаний перевозок, размещения новых заводов и складов, сбора информации в автоматизированных системах управления и целого ряда других. Следует отметить, что при решении таких задач наряду со строгим математическим аппаратом программирования, теории графов, потоков в сетях и оптимального управления применяются эвристические методы, основанные на интуиции разработчиков.

Дисциплина «Комбинаторное моделирование и исследование операций» является неотъемлемой частью современных знаний и предполагается владение студентами основными понятиями и теоремами следующих дисциплин типового учебного плана: «Функциональный анализ» (интеграл Лебега, нормированные пространства, пространства интегральных функций, теоремы отделимости), «Теория вероятностей и математическая статистика» (все основные понятия теории вероятности, центральная предельная теорема, основные распределения, используемые в статистике, точечные оценки параметров, проверка статистических гипотез).

Основными методами изучения дисциплины «Комбинаторное моделирование и исследования операций» являются освоение теоретических

знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Методы привития студентам практических навыков использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических занятий в форме проверки домашних заданий, а также на контрольных работах и зачетах.

### **Цель учебной дисциплины**

Основной целью учебной дисциплины «Комбинаторное моделирование и исследование операций» является повышение уровня профессиональной компетентности в исследовании проблем оптимизации сложной организационной деятельности и разрешении конфликтных ситуаций в социальных и производственных структурах.

**Образовательная цель:** изложение методов разработки алгоритмов оптимизации в задачах управления сложными технологическими процессами.  
**Развивающая цель:** формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, построение математических моделей сложных технологических процессов и изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

**Основные задачи,** изучения дисциплины «Комбинаторное моделирование и исследование операций» состоит в том, чтобы привить навыки построения математических моделей различных прикладных задач либо с помощью теории графов, либо используя другие методы дискретной оптимизации, либо применяя модели теории игр.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен **знать:**

- основные теоремы и утверждения линейного программирования;
- точные и эвристические алгоритмы решения задач целочисленного программирования;
- основные методы понижения размерности задач;
- основные понятия теории игр и теории расписаний;
- понятия и алгоритмы, связанные с дискретными задачами оптимизации, которые формулируются на языке ориентированных графов;
- методы динамического программирования;
- понятия и методы линейного программирования;
- приложения линейного программирования в исследовании операций;
- основные понятия и методы теории принятия решений.

**уметь:**

- использовать симплекс-метод для решения задач линейного программирования;
- строить модели комбинаторных задач в терминах линейного и целочисленного программирования;

- использовать основные методы и алгоритмы теории математического программирования для решения задач дискретной оптимизации;
- применять основные методы теории расписаний;
- строить математические модели дискретных задач оптимизации, задач динамического программирования, линейного программирования;
- решать задачи дискретной оптимизации, динамического программирования, линейного программирования.

**владеть:**

- методами решения экстремальных задач теории графов;
- методами исследования сетевых моделей.

Учебная программа предназначена для студентов 3 курса (5, 6 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится 214 часов, в том числе аудиторных занятий – 104 часа, из них лекции – 34 часа, практические занятия – 62 часа, УСП – 8 часов:

- в 5 семестре 92 часа, в том числе аудиторных занятий – 54 часа, из них лекции – 18 часов, практические занятия – 32 часа, УСП – 4 часов, рекомендуемая форма отчетности – зачет;
- в 6 семестре 122 часа, в том числе аудиторных занятий – 50 часов, из них лекции – 16 часов, практические занятия – 30 часов, УСП – 4 часа, рекомендуемая форма отчетности – экзамен.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Раздел 1. Экстремальные задачи на графах

### Тема 1.1.

Элементарные понятия, связанные с ориентированными графами.

### Тема 1.2.

Алгоритмы нахождения минимального расстояния между фиксированной вершиной и остальными, и между любыми двумя вершинами.

### Тема 1.3.

Сети, потоки.

### Тема 1.4.

Метод ветвей и границ.

### Тема 1.5.

Сетевое планирование.

## Раздел 2. Динамическое программирование

### Тема 2.1.

Основные понятия динамического программирования.

### Тема 2.2.

Решение задачи коммивояжера при помощи методов динамического программирования.

### Тема 2.3.

Задача о распределении ресурсов (дискретный и непрерывный случай).

## Раздел 3. Линейное программирование

### Тема 3.1. Введение.

### Тема 3.2.

Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.

### Тема 3.3.

Выпуклые множества, их свойства.

### Тема 3.4.

Многогранные выпуклые множества.

### Тема 3.5.

Структура допустимых множеств задач линейного программирования.

### Тема 3.6.

Необходимые и достаточные условия экстремума в задаче линейного программирования

## Раздел 4. Приложения линейного программирования в исследовании операций

### Тема 4.1.

Транспортная задача.

### Тема 4.2.

Задача о назначении.

### **Тема 4.3.**

Целочисленное программирование.

## **Раздел 5. Теория принятия решений**

### **Тема 5.1.**

Основные понятия теории принятия решений.

### **Тема 5.2.**

Принятие решений в условиях риска.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	<b>1 семестр</b>							
<b>1</b>	<b>Раздел 1. Экстремальные задачи на графах</b>	<b>7</b>	<b>12</b>				<b>4</b>	
	<b>Тема 1.1. Элементарные понятия, связанные с ориентированными графами.</b>	<b>1</b>	<b>2</b>					
1.1	Ориентированные графы. Маршруты, цепи, циклы.	1	2					
	<b>Тема 1.2. Алгоритмы нахождения минимального расстояния между фиксированной вершиной и остальными, и между любыми двумя вершинами</b>	<b>1</b>	<b>4</b>					
1.2	Задача о нахождении кратчайшей цепи между двумя заданными вершинами. Алгоритм Дейкстры. Поиск всех кратчайших путей в графе.	0.5	2					Проверка индивидуальных заданий
1.2.2	Алгоритм Флойда. Нахождение отрицательных циклов в графе. Задача об узких местах.	0.5	2					
	<b>Тема 1.3. Сети, потоки.</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					
1.3.1	Мощность потока, разрезы, дивергенция на разрезе, пропускная способность разреза. Теорема о разложении положительного потока. Алгоритмы нахождения потока максимальной мощности (алгоритм Форда-Фалкерсона)	1	2					Проверка индивидуальных заданий
1.3.2	Алгоритмы нахождения потоков заданной мощности, минимальной стоимости (алгоритмы Басакера-Гоуэна, Клейна).	1	2					
	<b>Тема 1.4. Метод ветвей и границ.</b>	<b>1</b>	<b>2</b>					
1.4.1	Задача коммивояжера и алгоритм Литтла. Задача о рюкзаке.	1	2					
	<b>Тема 1.5. Сетевое планирование.</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					

1.5.1	Сетевые модели. Алгоритм построения сетевой модели.	1	2					
1.5.2	Критический путь, критическое время. Распределение ресурсов.	1	2					
	<b>Раздел 2. Динамическое программирование</b>	<b>6</b>	<b>6</b>				<b>2</b>	
	<b>Тема 2.1. Основные понятия динамического программирования.</b>	<b>2</b>	<b>2</b>					
2.1.1	Состояние, шаг, управление, оптимальное управление, условно оптимальное управление. Рекуррентные соотношения, уравнение Беллмана.	1	2					Проверка индивидуальных заданий
	<b>Тема 2.2. Решение задачи коммивояжера при помощи методов динамического программирования.</b>	<b>2</b>	<b>2</b>					
2.2.1	Гамильтоновы циклы. Метод ветвей и границ.	2	2					
	<b>Тема 2.3. Задача о распределении ресурсов</b>	<b>2</b>	<b>2</b>					
2.3.1	Задача о распределении ресурсов (дискретный и непрерывный случай).	2	2				2	Контрольная работа
	<b>Раздел 3. Линейное программирование</b>	<b>11</b>	<b>22</b>				<b>2</b>	
	<b>Тема 3.1. Введение.</b>	<b>1</b>	<b>4</b>					
3.1.1	Примеры задач линейного программирования (задача нахождения максимальной прибыли, задача о диете, транспортная задача). Основные понятия : целевая функция, допустимое множество, допустимые точки (планы), оптимальные планы.	0.5	2					
3.1.2	Построение математической модели для задач линейного программирования.	0.5	2					
	<b>Тема 3.2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.</b>	<b>2</b>	<b>2</b>					
3.2.1	Графический метод решения при $n=2$ .	2	2					
	<b>Тема 3.3. Выпуклые множества, их свойства.</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					
3.3.1	Теоремы об отделяющей гиперплос-	1	2					

	скости.							
3.3.2	Выпуклый, двойственный, бидвойственный конусы и их свойства.	1	2				2	Контроль ная работа
	<b>Всего за семестр</b>	<b>18</b>	<b>32</b>				<b>4</b>	
	<b>2 семестр</b>							
	<b>Тема 3.4. Многогранные выпуклые множества</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					
3.4.1	Выпуклая комбинация, выпуклый многогранник	1	2					
3.4.2	Крайние точки, коническая оболочка множества, многогранный заостренный конус, крайние векторы.	1	2					Проверка индивидуальных заданий
	<b>Тема 3.5. Структура допустимых множеств задач линейного программирования</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					
3.5.1	Внутренние и граничные точки, носитель граничной точки, критерий крайней точки, регулярные множества.	1	2					
3.5.2	Представление допустимого множества задачи линейного программирования.	1	2					
	<b>Тема 3.6. Необходимые и достаточные условия экстремума в задаче линейного программирования</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					Проверка индивидуальных заданий
3.6.1	Невырожденная задача..	1	2					
3.6.2	Геометрическая интерпретация невырожденности	1	2					
	<b>Раздел 4. Приложения линейного программирования в исследовании операций</b>	<b>6</b>	<b>10</b>				<b>2</b>	
	<b>Тема 4.1. Транспортная задача</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					
4.1.1	Методы нахождения начального решения: метод северо-западного угла	1	2					
4.1.2	Метод наименьшей стоимости, метод Фогеля, метод потенциала	1	2					
	<b>Тема 4.2. Задача о назначении</b>	<b>2</b>	<b>2</b>					
4.2.1	Интерпретация задачи как задачи линейного программирования. Венгерский алгоритм.	2	2				2	Контроль ная работа
	<b>Тема 4.3. Целочисленное программирование.</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					

4.3.1	Метод ветвей и границ.	1	2					
4.3.2	Примеры задач целочисленного программирования. Метод ветвей и границ.	1	2					
	<b>Раздел 5. Теория принятия решений</b>	<b>4</b>	<b>8</b>				<b>2</b>	
	<b>Тема 5.1. Основные понятия теории принятия решений.</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					
5.1.1	Множество стратегий, исходов, состояний среды.	1	2					
5.1.2	Критерии оценки исходов в случае принятия решения в условиях неопределенности	1	2					
	<b>Тема 5.2. Принятие решений в условиях риска.</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					
5.2.1	Склонность к риску. Основные критерии принятия решения.	1	2					
5.2.2	Основные критерии принятия решения.	1	2				2	Контроль ная работа
	<b>Всего за семестр</b>	<b>16</b>	<b>30</b>				<b>4</b>	
	<b>Всего по курсу</b>	<b>34</b>	<b>62</b>				<b>8</b>	

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Список литературы

#### Основная литература

1. Бахтин В.И., Коваленок А.П., Лебедев А.В., Лысенко Ю.В. Исследование операций. – Минск, БГУ, 2003.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – Москва: Наука, 1990.
3. Вентцель Е.С. Элементы динамического программирования. – Москва: Наука, 1961.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. – Москва: Высшая школа, 2001.
5. Таха Х.А. Введение в исследование операций. - Изд.дом: Вильямс, 2005.
6. Альсевич В.В., Крахотко В.В. Методы оптимизации: задачи и упражнения. – Минск, БГУ, 2005.
7. Ашманов С.А. Линейное программирование. – Москва:Наука, 1981.
8. Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию – Москва: Наука, 1969.

#### Дополнительная литература

9. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. 1977.
- 10.Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. 1974.
- 11.Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. 1974.
- 12.Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. 1966.
- 13.Харари Ф. Теория графов. 1973.
- 14.Оре О. Теория графов. 1980.
- 15.Мулен Р. Теория игр и экономические приложения. 1979.
- 16.Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. 1970.
- 17.Льюис Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. 1961.
- 18.Оуэн Г. Теория игр. 1971.
- 19.Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М., Высшая школа, 1998.

## РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Ориентированные графы. Задача о построении кратчайшего пути между двумя заданными вершинами. Алгоритм Дейкстры.
2. Задача о построении кратчайших путей между любыми двумя вершинами. Алгоритм Флойда.
3. Модификации алгоритма Флойда.
4. Сети, потоки, разрезы, дивергенция, мощность потока. Их элементарные свойства.
5. Теорема о разложении положительной циркуляции.
6. Теорема о разложении положительного потока.
7. Потоки максимальной мощности. Пропускная способность разреза.
8. Теорема Форда-Фалкерсона о потоке максимальной мощности.
9. Построение максимальных потоков. Алгоритм Форда-Фалкерсона.
10. Задачи, сводящиеся к алгоритму Форда-Фалкерсона.
11. Потоки минимальной стоимости. Критерий оптимальности потока фиксированной мощности.
12. Алгоритм Басакера-Гоуэна.
13. Алгоритм Клейна.
14. Метод ветвей и границ. Алгоритм Литтла.
15. Метод ветвей и границ в задаче коммивояжера.
16. Метод управления проектами. Сетевая модель, алгоритм построения сетевой модели.
17. Критическое время, критический путь в сетевой модели. Гант-карта.
18. Динамическое программирование. Идея методов динамического программирования. Уравнение Беллмана.
19. Задача коммивояжера с точки зрения динамического программирования.
20. Задача о распределении ресурсов с точки зрения динамического программирования.
21. Линейное программирование. Примеры задач. Основные определения и свойства. Точки экстремума в задаче линейного программирования.
22. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для замкнутого множества.
23. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для произвольного (не обязательно замкнутого) множества.
24. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделении двух множеств.
25. Выпуклый конус. Теорема об опорной гиперплоскости к выпуклому конусу.
26. Двойственный, бидвойственный конусы. Их свойства.
27. Выпуклые линейные комбинации, выпуклая оболочка множества.
28. Крайние точки множества. Структура компактного выпуклого множества.
29. Выпуклые многогранники. Их свойства.
30. Коническая оболочка множества. Многогранные выпуклые конусы и их свойства.
31. Крайние векторы, заостренные конусы. Структура многогранного заостренного конуса.
32. Допустимое множество задачи линейного программирования. Его свойства. Внутренние и граничные точки. Носитель граничной точки.

33. Критерий крайней точки.
34. Конус  $K = \{x | Ax \leq 0\}$ . Его свойства. Критерий заостренности конуса  $K$ .
35. Регулярные множества. Теорема о крайних точках регулярного множества.
36. Структура регулярного множества.
37. Структура произвольного допустимого множества задачи линейного программирования.
38. Теоремы о достижении экстремума в задаче линейного программирования.
39. Графический метод решения задач линейного программирования.
40. Симлекс-метод.
41. Метод искусственного базиса ( $w$ -задача).
42. Транспортная задача.
43. Задача о назначении.
44. Теория игр. Игра в нормальной форме.
45. Различные стратегии. Матричные игры. Седловая точка, цена игры.
46. Смешанное расширение матричной игры. Теорема Нэша.
47. Решение матричной игры при наличии двух стратегий у одного из игроков.

# УПРАВЛЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

На контроль самостоятельной работы студентов отводится 8 часов для решения задач по темам «Экстремальные задачи теории графов», «Задача коммивояжера», «Линейное программирование», «Теория игр».

## • ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

### Контрольная работа №1

1. Найти кратчайшие пути от вершины  $S$  до всех остальных вершин.
2. Построить максимальный поток и указать минимальный разрез в сети.
3. Построить поток мощности  $m$  минимальной стоимости с помощью алгоритма Клейна. Доказать, что стоимость минимальна.
4. Докажите, что положительный поток положительной мощности можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров и вдоль путей, идущих от источника к стоку (считая, что в сети один источник и один сток)

### Контрольная работа №2

#### ВАРИАНТ № 1

1. Найти все решения задачи коммивояжера, определяемой матрицей стоимостей

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 7 & 5 & 7 \\ 4 & \infty & 5 & 4 & 10 \\ 5 & 4 & \infty & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 5 & \infty & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

2. Построить сетевую модель, найти критический путь и построить график распределения трудовых ресурсов.

№	Каким работам предшествует	Сроки выполнения	Потребность в рабочей силе
1	2	9	6
2	—	5	9
3	6, 10, 11	7	4
4	3, 5	5	7
5	6, 11	6	5
6	2	7	5
7	6, 10, 11	8	4
8	6, 10, 11	5	3
9	1, 8	3	8
10	2	9	3
11	—	8	8

3. В условиях предыдущей задачи
  - а) оптимизировать распределение трудовых ресурсов;
  - б) составить оптимальный график работ, при котором потребность в рабочей силе не превосходит 17.
4. Доказать, что если мощность потока  $f$  в сети положительна, то его можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров и путей, ведущих из  $s$  в  $t$ .

## Контрольная работа № 3

### Вариант №

1. Используя геометрические построения, решить задачу ЛП:

$$z = ax_1 + 2x_2 \rightarrow \text{extr}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \Omega = \begin{cases} x_2 - x_1 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \end{cases}.$$

2. Решить задачу симплекс-методом, найдя начальный опорный план при помощи метода искусственного базиса:

$$z = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{max},$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}.$$

3. Построить двойственную задачу:

$$z = 3x_1 - 5x_2 + x_4 \rightarrow \text{max},$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 7x_4 \geq 3 \\ 8x_1 - 4x_3 + 2x_4 \leq -2 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \leq 0. \end{cases}.$$

## Контрольная работа № 4

### ВАРИАНТ

Задача 1. Найти решение игры

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Задача 2. Найти множество недоминируемых стратегий игрока  $A$ , если множество его стратегий  $X = [-4, 0]$ , множество стратегий игрока  $B$  есть  $Y = \{0, 1\}$ , а функция выигрыша игрока  $A$  есть

$$u_A(x, y) = 10y \cos x + 5(1 - y) \sin x.$$

Задача 3. Найти равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях в биматричной игре

$$\begin{bmatrix} (2; 2) & (5; 1) \\ (9; 3) & (4; 4) \end{bmatrix}$$

Задача 4. Дана биматричная игра. Найти: а) равновесия по Нэшу в чистых стратегиях; б) равновесия по Парето; в) осторожные стратегии каждого игрока; г) недоминируемые стратегии каждого игрока. Вычислить минимальные гарантированные выигрыши каждого игрока.

$$\begin{bmatrix} (5; 7) & (5; 4) & (6; 5) \\ (5; 3) & (2; 4) & (4; 3) \\ (3; 3) & (8; 5) & (3; 2) \end{bmatrix}$$

Задача 5. Задана игра двух лиц  $G = (X, Y, u_1, u_2)$ , где  $X, Y$  — компактные множества и функции  $u_1, u_2$  непрерывны. Будут ли замкнуты множества  $ND_i$  недоминируемых стратегий  $i$ -го игрока?



ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ  
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на \_\_\_\_/\_\_\_\_ учебный год

№п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
(протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

(степень, звание)

\_\_\_\_\_

(подпись)

\_\_\_\_\_

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

\_\_\_\_\_

(степень, звание)

\_\_\_\_\_

(подпись)

\_\_\_\_\_

(И.О.Фамилия)