

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

А.Л. Толстик

(подпись)

31

(дата утверждения)

Регистрационный № УД 1566 /уч.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности
1-31 04 01 Физика (по направлениям),
направлений специальности
1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность),
1-31 04 01-04 Физика (управленческая деятельность)

Минск 2015 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 04 01-2013; учебных планов №G31-162уч. и №G31и-177/уч., №G31-161/уч. и №G31и-176/уч., утвержденных 30.05.2013 и типовой учебной программы «Дифференциальные и интегральные уравнения», утвержденной 27.04.2015г., регистрационный номер ТД-Г.509/тип.

Составители:

Н.К. Филиппова – доцент кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

М.А. Глецевич – старший преподаватель кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета
(протокол № 11 от 28 мая 2015 г.)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 29 июня 2015 г.)

Пояснительная записка

Учебная программа по учебной дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения» разработана в соответствии с требованиями образовательных стандартов по специальностям: 1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность), 1-31 04 01-04 Физика (управленческая деятельность).

Заложенные в основу программы вопросы отвечают современному состоянию теории дифференциальных и интегральных уравнений. Дисциплина предполагает знание студентами элементов дифференциального и интегрального исчисления, элементов линейной алгебры.

Дисциплина «Дифференциальные и интегральные уравнения» вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач. Она составляет математическую основу общей и теоретической физики и специальных дисциплин, читаемых на кафедрах.

Цель дисциплины – обеспечить студента необходимыми знаниями и привить практический навык работы с фундаментальными понятиями дифференциальных и интегральных уравнений.

Задача изучения дисциплины состоит в том, чтобы студент развил логическое мышление, освоил приемы исследования и решения математически формализованных физических задач.

Данная учебная программа по дисциплине согласована с учебными программами по дисциплинам: «Математический анализ», «Аналитическая геометрия и линейная алгебра».

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- основные типы уравнений разрешимые в квадратурах;
- условия существования, единственности и устойчивости решения обычных дифференциальных уравнений и систем;
- линейные интегральные уравнения с вырожденным и симметричным ядрами;

уметь:

- находить общее решение уравнений первого порядка и исследовать решения задачи Коши;
- решать линейные системы и линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами;

владеть:

- методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем;
- методами решения линейных систем уравнений и линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами.

Для успешного освоения курса «Дифференциальные и интегральные уравнения» студенты должны владеть теоретическим материалом в объеме программы и выполнять задания семинарских занятий.

Общее количество часов, отводимое на изучение учебной дисциплины — 234, из них количество аудиторных часов — 112.

Аудиторные занятия проводятся в виде лекций и практических занятий. На проведение лекционных занятий отводится 52 часа, на практические занятия — 54 часа, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Занятия проводятся на 1-м курсе во 2-м семестре.

Форма получения высшего образования — очная, дневная.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – зачет, экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

1. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.

Основные понятия и определения. Геометрическое и механическое истолкование уравнения и его решения. Задача Коши. Формулировка и доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Общее решение, частное решение, особое решение.

Основные интегрируемые типы уравнений 1-го порядка уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения Бернулли, уравнения Риккати, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

2. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Огибающая однопараметрического семейства кривых. Теоремы об особых решениях. Метод введения параметра, уравнения Лагранжа, уравнения Клеро. Задача об изогональных траекториях.

3. Уравнения высших порядков.

Дифференциальные уравнения высших порядков. Начальные условия. Теорема существования и единственности решения. Методы понижения порядка уравнений.

4. Системы дифференциальных уравнений.

Системы дифференциальных уравнений в нормальной форме записи. Задача Коши. Системы дифференциальных уравнений в симметрической форме записи. Понятие первого интеграла, общего интеграла.

5. Линейные уравнения с частными производными первого порядка.

Общее решение и задача Коши для линейного уравнения. Общее решение и решение Коши для квазилинейного уравнения. Характеристики и интегральные поверхности. Существование и единственность решения задачи Коши.

6. Линейные уравнения n -го порядка

Общее решение линейного однородного уравнения. Линейные неоднородные уравнения n -го порядка. Общее решение линейного неоднородного уравнения. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами и их решение. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и нахождение данного решения для различных видов свободного члена. Метод вариации произвольных постоянных. Метод Коши нахождения частного решения неоднородного уравнения. Линейное уравнение Эйлера. Простейшие сведения о граничной задаче. Решение однородной краевой задачи с помощью функции Грина. Свойства функции Грина.

7. Системы линейных дифференциальных уравнений.

Системы линейных уравнений. Системы однородных уравнений. Теоремы о решении. Вронскиан решения. Фундаментальная матрица. Общее решение и решение задачи Коши в матричной форме. Система неоднородных

уравнений. Общее решение и решение задачи Коши в матричной форме. Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения к одному уравнению более высокого порядка. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение для однородной системы и характеристические числа. Решение однородной системы. Решение неоднородной системы. Метод Эйлера. Метод вариации произвольных постоянных и неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения неоднородных систем.

8. Элементы теории устойчивости.

Основные определения и понятия теории устойчивости. Тривиальное решение и его устойчивость по Ляпунову. Простейшие типы точек покоя для однородной системы двух уравнений с двумя неизвестными и их устойчивость. Об исследовании на устойчивость по первому приближению. Метод функции Ляпунова. Основные теоремы Ляпунова.

9. Сведения об интегральных уравнениях.

Уравнения Фредгольма и Вольтерра I и II родов. Собственные значения и собственные функции интегрального однородного уравнения. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма. Существование и единственность решения уравнения Фредгольма. Сведения о приближенных методах решения интегральных уравнений.

10. Элементы вариационного исчисления.

Линейное нормированное пространство. Пространство непрерывных функций. Эпсилон-окрестность и расстояние между точками. Определение функционала. Непрерывность, линейность функционала. Экстремум функционала. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Экстремали уравнение Эйлера-Пуассона. Уравнение Эйлера-Остроградского. Вариационная задача с подвижными границами для простейшего функционала. Условия трансверсальности. Задача с подвижными границами для функционала, зависящего от двух функций одного независимого аргумента. Поле экстремалей. Условие Якоби. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия экстремума функционала. Вариационные задачи на условный экстремум. Приложения вариационного исчисления к задачам механики и физики.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Литература	Формы контроля знаний
		лекции	практические (семинарские) занятия	лабораторные занятия	иное	Количество часов УСП		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.(16ч.)	6	10				[1–5]	
1.1.	Основные понятия и определения. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.	4						
1.2.	Основные интегрируемые типы уравнений 1-го порядка	2						
1.3	Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.		2					Устный опрос
1.4	Уравнения, приводящиеся к однородному. Обобщенные однородные уравнения.		4					Контроль домашних заданий
1.5	Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли.		2					Устный опрос
1.6	Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель		2					Устный опрос
2.	Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.(8ч.)	2	4			2	[1–5]	
2.1	Дифференцирование уравнений. Теоремы об особых решениях	2						
2.2	Интегрирование уравнений. Уравнения Лагранжа и		4					Устный опрос

	Клеро.							Контроль домашних заданий
2.3	Текущий контроль успеваемости по 1.-2.					2		Контрольная работа №1
3.	Уравнения высших порядков(8ч.)	4	4				[1–5]	
3.1.	Задача Коши. Общее, частное, особое решения. Уравнения, интегрируемые в квадратурах.	2						
3.2.	Уравнения, допускающие понижение порядка.	2						
3.3	Уравнения, не содержащие искомой функции и последовательных первых производных Уравнения, не содержащие независимой переменной		2					Устный опрос
3.4	Уравнения однородные относительно искомой функции и ее производных. Уравнения, левая часть которого есть точная производная		2					Контроль домашних заданий
4.	Системы дифференциальных уравнений (6ч.)	4	2				[1–5]	
4.1.	Нормальные системы. Приведение уравнения n-го порядка к системе n уравнений первого порядка и обратная задача.	2						
4.2.	Первые интегралы.Понижение порядка нормальной системы.	2	2					Устный опрос
5.	Линейные уравнения с частными производными первого порядка(10ч)	4	4			2	[1–5]	
5.1.	Однородные линейные уравнения Общее решение. Задача Коши.	2	2					Устный опрос
5.2.	Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Общее решение. Задача Коши	2	1					
5.3	Текущий контроль успеваемости по 3.- 5.					2		Контрольная работа №2
5.4.	Текущий контроль успеваемости по 1.-5.		1					Коллоквиум Часть 1
6	Линейные уравнения n-го порядка (19ч.)	9	10				[1–5]	

6.1.	Однородные линейные уравнения.	2						
6.2.	Неоднородные линейные уравнения n-го порядка. Метод вариации произвольной постоянной. Метод Коши.	2	2					Устный опрос
6.3.	Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа, метод Эйлера.	2	4					Устный опрос Контроль домашних заданий
6.4.	Приведение однородного линейного уравнения n-го порядка к уравнению с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.	1	2					
6.5	Интегрирование линейных уравнений 2-го порядка. Степенные и обобщенно степенные ряды Решение краевой задачи с помощью функции Грина.	3	2					Контроль домашних заданий
7.	Системы линейных дифференциальных уравнений (10ч.)	5	5				[1–5]	
7.1.	Линейные однородные и неоднородные системы.	2						
7.2.	Линейные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера, матричный метод. Построение частного решения неоднородной системы.	2	4					Устный опрос
7.3	Метод вариации произвольных постоянных	1	1					
8.	Элементы теории устойчивости (9 ч.)	4	5			2	[2–6]	
8.1	Теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных и от параметров. Понятие об устойчивости и асимптотической устойчивости решения в смысле Ляпунова. Простейшие типы точек покоя, фазовые траектории. Метод функции Ляпунова. Исследование на устойчивость по первому приближению	4	3					Контроль домашних заданий
8.2.	Текущий контроль успеваемости по 6.-8.		2			2		Контрольная работа №3
9	Сведения об интегральных уравнениях (10 ч.)	4	4				[1], [7–8]	
9.1	Теоремы Фредгольма. Уравнения Фредгольма и	2						

	Вольтерра. Собственные значения и собственные функции интегрального однородного уравнения							
9.2.	Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Сведения о приближенных методах решения интегральных уравнений.	2	4					Устный опрос Контроль домашних заданий
10	Вариационное исчисление(16ч.)	10	6				[1], [3]	
10.1.	Линейное нормированное пространство. Функционал. Основная лемма вариационного исчисления. Вариационная задача с закрепленными границами для простейшего функционала	4						
10.2	Уравнение Эйлера		2					
10.3	Уравнение Эйлера-Пуассона.		1					
10.4.	Вариационная задача с подвижными границами для простейшего функционала.	2	2					Устный опрос
10.5	Вариационные задачи на условный экстремум. Приложения вариационного исчисления к задачам механики и физики.	4						
10.3.	Текущий контроль успеваемости по 8.-10.		1					Коллоквиум Часть 2

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рекомендуемая литература

Основная:

1. *Васильева, А.Б.* Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление в примерах и задачах / А.Б.Васильевна, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов, Т.А. Уразгильдина. – М.: Физматлит, 2005. – 432 с.
2. *Тихонов, А.Н.* Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – М.: Физматлит, 2005. – 236 с.
3. *Эльсгольц, Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Едиториал УРСС, 2000. – 320 с.
4. *Матвеев, Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – Издание пятое, дополненное. СПб.: Издательство Лань. 2003. – 832 с.
5. *Филиппов, А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176 с.
6. *Матвеев, Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н.М. Матвеев. – 7-е изд., доп. – СПб.: Лань, 2002. – 431 с.
7. *Краснов, М.Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию / М.Л. Краснов. – М.: Едиториал УРСС, 2010. – 304 с.
8. *Васильева А.Б.* Интегральные уравнения/ А.Б.Васильевна, Н.А. Тихонов. – М.: Физматлит, 2002. – 157 с.

Дополнительная

1. *Богданов, Ю.С.* Лекции по дифференциальным уравнениям/ Ю.С. Богданов. – Мн.:Універсітэцкае, 1977. – 240 с.
2. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. Наука, 1971. – 576.
3. *Богданов, Ю.С.* Дифференциальные уравнения / Ю.С. Богданов, С.А.Мазаник, Ю.Б. Сыроид. – Мн.:Універсітэцкае, 1996. – 287 с.
4. *Карташов, А.П.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташов, Б.Л. Рождественский. – М.: Наука, 1986. – 272 с.
5. *Альсевич, Л.А.* Практикум по дифференциальным уравнениям / Л.А. Альсевич, С.А. Мазаник, Л.П. Черенкова. – Мн.: БГУ, 2000. – 311 с.
6. *Шилин, А.П.* Дифференциальные уравнения. Задачи и примеры / А.П. Шилин. – Мн.: РИВШ, 2008. – 368 с.

Перечень используемых средств диагностики результатов учебной деятельности

Для текущего контроля и самоконтроля знаний и умений студентов по данной дисциплине можно использовать следующий диагностический инструментарий:

- тестовые задания по отдельным разделам (темам) дисциплины;
- коллоквиум;
- устные опросы;
- письменные контрольные работы по отдельным темам курса – 3.

Текущая аттестация по дисциплине осуществляется на экзамене. Оценка на экзамене выставляется по десятибалльной шкале.

Примерный перечень тем контрольных работ

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.
2. Уравнения высших порядков. Системы дифференциальных уравнений. Линейные уравнения с частными производными первого порядка.
3. Линейные уравнения высших порядков. Линейные системы дифференциальных уравнений. Теория устойчивости.

Примерный перечень тем коллоквиумов

1. Интегральные уравнения, вариационное исчисление.
2. Уравнения с частными производными первого порядка.

Примерный перечень тем самостоятельной работы студентов

1. Обобщенные уравнения первого порядка. Уравнения Риккати.
2. Задача об изогональных траекториях.

Рекомендации по текущему контролю качества усвоения знаний и проведению аттестации

Не все вопросы, перечисленные в программе, выносятся на лекции. В целях развития навыков самостоятельной работы студентам предлагается освоить теорию методов интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, самостоятельно по литературе, указанной в программе. На практических занятиях предлагается отработать необходимые навыки решения данных типов уравнений. Для самостоятельной работы студентов рекомендуется использовать методические разработки и специальную учебно-методическую литературу.

Для текущего контроля качества усвоения знаний по дисциплине рекомендуется использовать контрольные работы по разделам дисциплины, устные опросы. Контрольные мероприятия проводятся в соответствии с учебно-методической картой дисциплины. В случае неявки на контрольное мероприятие по уважительной причине студент вправе по согласованию с преподавателем выполнить его в дополнительное время. Для студентов,

получивших неудовлетворительные оценки за контрольные мероприятия, либо не явившихся по неуважительной причине, по согласованию с преподавателем и с разрешения заведующего кафедрой мероприятие может быть проведено повторно. Предлагается аналогичное домашнее задание, обязательное выполнение которого является необходимым условием для получения зачета и допуска к экзамену.

Контрольные работы проводятся в письменной форме. На выполнение контрольной работы отводится 90 мин. Оценка каждой из контрольных работ проводится по десятибалльной шкале.

Оценка текущей успеваемости рассчитывается как среднее арифметическое оценок за каждое из письменных контрольных работ и коллоквиумов, либо по формуле (на усмотрение преподавателя):

$$текущая = 0,4 \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^m \text{контр}_i}{m} \right) + 0,6 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \text{колл}_i}{n} + ПБ - ШБ ,$$

где текущая – это оценка текущей успеваемости, контр_і – оценки по десятибалльной шкале за контрольные работы (*m* – количество контрольных работ), колл_і – оценки по десятибалльной шкале за коллоквиумы (*n* – количество коллоквиумов); ПБ – поощрительные баллы, начисляемые за выполнение дополнительных (необязательных) заданий, активность на занятиях (максимум 2 балла за семестр), ШБ – штрафные баллы, которые начисляются за пропуски занятий, систематическое опоздание, нарушение учебной дисциплины.

Текущая аттестация по учебной дисциплине проводится в форме экзамена, к экзамену допускаются студенты, чья оценка текущей успеваемости не менее 4 баллов.

Экзаменационная оценка и оценка текущей успеваемости служат для определения рейтинговой оценки по дисциплине, которая рассчитывается как средневзвешенная оценка текущей успеваемости и экзаменационной оценки. Рекомендуемые весовые коэффициенты для оценки текущей успеваемости — 0,4; для экзаменационной оценки — 0,6.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Математический анализ	Высшей математики и математической физики	Оставить содержание учебной дисциплины без изменения	Рекомендовать к утверждению учебную программу в представленном варианте протокол № 11 от 28.05.2015
Аналитическая геометрия и линейная алгебра	Высшей математики и математической физики	Оставить содержание учебной дисциплины без изменения	Рекомендовать к утверждению учебную программу в представленном варианте протокол № 11 от 28.05.2015

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО

на 2016 / 2017 учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание
	<p>В учебную программу по учебной дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения» для специальности 1-31 04 01 Физика (по направлениям), направлений специальности 1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность), 1-31 04 01-04 Физика (управленческая деятельность) внесены изменения: лекции – 52 часа, практические занятия – 54 часа, управляемая самостоятельная работа (УСР) – 6 часов. Учебно-методическая карта учебной дисциплины прилагается.</p>	<p>Измен рабочий учебный план на 2016/2017 учебный год (отведены аудиторные часы на УСР).</p>

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей математики и математической физики (протокол № 10 от 25 мая 2016 г.)

Заведующая кафедрой высшей математики
и математической физики _____

Н.Г. Абрашина-Жадаева

УТВЕРЖДАЮ

Декан физического факультета
д.ф.-м.н., профессор _____

В.М. Анищик

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО

на 2017 / 2018 учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание
	<p>В учебную программу по учебной дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения» для специальности 1-31 04 01 Физика (по направлениям), направлений специальности 1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность), 1-31 04 01-04 Физика (управленческая деятельность) изменения и дополнения не вносятся.</p>	

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей математики и математической физики (протокол № 10 от 31 мая 2017 г.)

Заведующая кафедрой высшей математики
и математической физики _____

Н.Г. Абрашина-Жадаева

УТВЕРЖДАЮ

Декан физического факультета
д.ф.-м.н., профессор _____

В.М. Анищик

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО

на 2018 / 2019 учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание
	<p>В учебную программу по учебной дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения» для специальности 1-31 04 01 Физика (по направлениям), направлений специальности 1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность), 1-31 04 01-04 Физика (управленческая деятельность) изменения и дополнения не вносятся.</p>	

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей математики и математической физики (протокол № 11 от 27 июня 2018 г.)

Заведующая кафедрой высшей математики

и математической физики

_____ Н.Г. Абрашина-Жадаева

УТВЕРЖДАЮ

Декан физического факультета

д.ф.-м.н., профессор

_____ В.М. Анищик