КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

МИНСК • 1984

УДК 517.977

Рекомендовано Советом факультета прикладной математики Белорусского государственного университета им. В.И.Ленина (председатель Совета доцент В.И.Корзюк)

Конструктивная теория экстремальных задач / Под ред. Р.Габасова, Ф.М.Кирилловой. - Мн.: Университетское, 1984. - 204 с.

В сборнике содержатся новейшие результаты по методам и алгоритмам решения задач математического программирования и оптимального управления, основанные на принципах и идеях монографии Р.Габасова, Ф.М.Кирилловой "Методы линейного программирования. Ч. 1 - 3" (Минск, 1978 - 1980). Рассматриваются задачи нелинейного программирования, оптимального управления линейными системами, негладкие экстремальные задачи; приводятся результаты численных экспериментов.

Сборник рассчитан на научных работников, инженеров, занимающихся проблемами оптимизации и решением прикладных экстремальных задач с использованием ЭВМ, аспирантов.

К $\dfrac{1502000000 -- 049}{\text{М } 317 -- 84}$ резерв -- 84

УДК 519.852.33

Л.А.Пилипчук

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

1. Пусть $S=\{I,U\}$ – обобщенная конечная ориентированная сеть, $U=U^1\cup U^2$, со следующими характеристиками элементов: $a_i=(a_i^1, a_i^2)$ – интенсивность узла $i\in I$; d_{ij} – пропускная способность дуги $(i,j)\in U$; $c_{ij}=(c_{ij}^1, c_{ij}^2)$ – стоимость единичного потока $x_{ij}=(x_{ij}^1, x_{ij}^2)$ вдоль дуги $(i,j)\in U$; $\mu = (\mu_{ij}^1, \mu_{ij}^2)$ – характеристика дуги, отражающая явление преобразования дугового потока: поток $x_{ij}=(x_{ij}^1, x_{ij}^2)$ из узла i поступает в узел j в виде $(\mu_{ij}^1 x_{ij}^1, \mu_{ij}^2 x_{ij}^2)$ (считается, что пункт преобразования потока находится непосредственно перед узлом j). Рассмотрим на сети S двухпродуктовую транспортную задачу с дополнительными ограничениями:

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}^k x_{ij}^k \longrightarrow \min,$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = a_i^k, \quad i\in I, \; k=1,2;$$

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, \quad p=\overline{1,l}; \qquad (1)$$

$$x_{ij}^k \geqslant 0, \; (i,j)\in U, \; k=1,2; \quad x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq d_{ij}, \; (i,j)\in U,$$

где $I_i^+(U) = \{ j: (i,j)\in U\}$; $I_i^-(U) = \{ j: (j,i)\in U\}$; λ_{ij}^{kp}, $p=\overline{1,l}$, $k=1,2$, - заданные действительные числа.

2. Совокупность дуг $U_{оп} = \{ U_{оп}^1, U_{оп}^2, U^* \}$, $U_{оп}^k \subset U^k$, $k=1,2$, $U^* \subset U_{оп}^1 \cap U_{оп}^2$ назовем опорой обобщенной сети, если система

$$\sum_{j\in I_i^+(U_{оп}^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U_{оп}^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = 0, \; i\in I(U_{оп}^k), \; k=1,2;$$

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in U_{оп}^k} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = 0, \quad p=\overline{1,l}; \qquad (2)$$

$$x_{ij}^1 + x_{ij}^2 = 0, \quad (i,j)\in U,$$

имеет только тривиальное решение $x_{ij} \equiv 0$, $(i,j)\in U$, но имеет нетривиальное решение $x_{ij} \not\equiv 0$, $(i,j)\in U$, для каждой из следующих совокупностей:

1) $\{ U_{оп}^1, U_{оп}^2, U^* \setminus (i_0, j_0) \}$, где (i_0, j_0) - любая дуга из U^*;
2) $\{ U_{оп}^1 \cup (i_0,j_0)^1, U_{оп}^2, U^* \}$, где $(i_0,j_0)^1 \in U^1 \setminus U_{оп}^1$;
3) $\{ U_{оп}^1, U_{оп}^2 \cup (i_0,j_0)^2, U^* \}$, где $(i_0,j_0)^2 \in U^2 \setminus U_{оп}^2$.

Пара $\{x, U_{оп}\}$ из потока и опоры называется опорным потоком. Дуги $(i,j)^k \in U_{оп}^k$, $k=1,2$, назовем опорными, остальные дуги $(i,j)^k \in U^k \setminus U_{оп}^k$, $k=1,2$, - неопорными.

Исследуем структуру опорного множества. Обозначим через $S_{qоп}^k = \{ I_{qоп}^k, U_{qоп}^k \}$, $q=\overline{1,m_k}$, компоненты связности сети

$\{I, U^k_{оп}\}$, $k = 1, 2$. Положим $k = 1$. В каждой компоненте связности $S^1_{qоп}$ произвольным образом выделим дерево $\{I^1_{qоп}, U^1_{qД}\}$, $U^1_{qД} \subset U^1_{qоп}$. Рассмотрим любой цикл в сети $\{I, U^1_{оп}\}$. Выберем в нем направление движения. Обозначим через T_+ произведение чисел μ^1_{ij} на прямых дугах цикла, через T_- – произведение чисел μ^1_{ij} на обратных дугах цикла. Если все дуги имеют одно направление, то считаем их прямыми и полагаем $T_- = 1$.

Число $T = T_+ - T_-$ назовем индексом цикла. Цикл называется невырожденным, если его индекс отличен от нуля. Введем множества $U^1_{qоп}$, $U^1_{qбиц}$. Возможны случаи:

а) любая дуга $(s, t) \in U^1_{qоп} \setminus U^1_{qД}$ составляет с дугами $U^1_{qД}$ вырожденный цикл. Полагаем $\tilde{U}^1_{qоп} = U^1_{qД}$ и $U^1_{qбиц} = U^1_{qоп} \setminus \tilde{U}^1_{qоп}$;

б) существует дуга $(s_0, t_0) \in U^1_{qоп} \setminus U^1_{qД}$, которая образует с дугами $U^1_{qД}$ невырожденный цикл. Тогда $\tilde{U}^1_{qоп} = U^1_{qД} \cup (s_0, t_0)$ и $U^1_{qбиц} = U^1_{qоп} \setminus \tilde{U}^1_{qоп}$. Дуги $(i, j)^1 \in U^1_{биц} = \bigcup_{q=1}^{m} U^1_{qбиц}$ назовем бициклическими дугами сети $\{I, U^1_{оп}\}$.

Для каждой дуги $(s, t) \in U^1_{биц}$ составим сеть $\{I^1_q, \tilde{U}^1_{qоп} \cup (s, t)^1\}$. Вычеркнем из нее все висячие дуги. Полученную сеть обозначим через $\{I(U_{(s,t)^1}), U_{(s,t)^1}\}$. Связную сеть $Z_{(i,j)^1} = \{I_{(i,j)^1}, U_{(i,j)^1}\}$, $I_{(i,j)^1} = I(U_{(s,t)^1})$, будем называть бициклом, соответствующим бициклической дуге $(i, j)^1 \in U^1_{биц}$. В дальнейшем каждой дуге $(i, j)^1 \in U^1_{биц}$ поставим в соответствие натуральное число t: $1 \le t \le l_1$, $l_1 = |U^1_{биц}|$. Значит, бицикл $Z_{(i,j)^1}$ можно записать в виде Z_t, $t = t(i, j)^1$. Случай $k = 2$ рассматривается аналогично. Сеть $\{I, U^2_{оп}\}$ содержит $l_2 = |U^2_{биц}|$ бициклов $Z_{l_1+1}, \dots, Z_{l_1+l_2}$.

Для каждого бицикла составим систему уравнений

$$\sum_{j \in I^+_i(U_t)} \tilde{y}^t_{ij} - \sum_{j \in I^-_i(U_t)} \mu^k_{ji} \tilde{y}^t_{ji} = 0, \qquad (3)$$

$$k = 1,\ t \le l_1,\ k = 2,\ t > l_1,\ t = \overline{1, l_1 + l_2}.$$

Найдем решение $(\tilde{y}^t_{ij}, (i, j)^k \in U_t)$ системы (3) при условии

$\tilde{y}^t_{i_t j_t} = 1$, $(i_t, j_t)^k \in U^k_{\text{биц}}$. В [9,10] предложен алгоритм построения такого решения и доказано, что оно единственное.

Введем понятие обобщенного детерминанта $\tilde{R}_p(Z_t)$ бицикла Z_t относительно p-го ограничения из множества дополнительных ограничений задачи (I):

$$\tilde{R}_p(Z_t) = \sum_{(i,j)\in U_t} \lambda^{kp}_{ij}\, \tilde{y}^t_{ij}, \quad k=1,\ t \le l_1,\ k=2,\ t>l_1,$$

$t = \overline{1, l_1+l_2}$,

где $\tilde{y}^t_{ij}$, $(i,j)^k \in U_t$, $t=\overline{1, l_1+l_2}$ – решение системы линейных уравнений (3). Упорядочим произвольным образом дуги множества U^*, $\tau = \tau(i,j)$ – порядковый номер дуги $(i,j) \in U^*$, $\overline{l+1 \le \tau \le l + |U^*|}$. Пусть $\mathcal{D}_1 = \{\tilde{R}_p(Z_t),\ p=\overline{1,l};\ t=\overline{1,l_1+l_2}\}$ – $l \times (l_1+l_2)$ -матрица, составленная из чисел $\tilde{R}_p(Z_t)$, и $\mathcal{D}_2 = \{\delta_{\tau,t},\ \tau=\overline{l+1, l+|U^*|};\ t=\overline{1, l_1+l_2}\}$ – $|U^*| \times (l_1+l_2)$ -матрица, составленная из чисел

$$\delta_{\tau(i,j),t} = \begin{cases} \tilde{y}^t_{ij}, & \text{если } (i,j) \in U_t \cap U^*, \\ 0, & \text{если } (i,j) \overline{\in} U_t \cap U^*. \end{cases}$$

Сформируем $(l+|U^*|) \times (l_1+l_2)$ -матрицу $\mathcal{D} = \begin{Bmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 \end{Bmatrix}$. Если $l_1+l_2 \ne l + |U^*|$, то дополним матрицу $\mathcal{D}$ нулями до квадратной матрицы. Число $\tilde{R} = \det$ назовем детерминантом обобщенной сети S.

<u>Критерий опорности</u>. Совокупность дуг $U_{оп} = \{U^1_{оп}, U^2_{оп}, U^*\}$ является опорой обобщенной сети $S = \{I, U\}$ тогда и только тогда, когда: I) $I(U^k_{оп}) = I$, $k=1,2$; 2) в каждой компоненте связности $S^k_{q\,оп} = \{I^k_{q\,оп}, U^k_{q\,оп}\}$, $q=\overline{1,m_k}$, множества $\{I, U^k_{оп}\}$, $k=1,2$, содержится хотя бы один невырожденный цикл, 3) $\tilde{R} \ne 0$.

3. Критерии оптимальности и субоптимальности. Опорный поток $\{x, U_{оп}\}$ считается невырожденным, если выполнены неравенства

$$x^k_{ij} > 0, \quad (i,j)^k \in U^k_{оп}, \quad k=1,2;$$

$$0 < x^1_{ij} + x^1_{ij} < d_{ij}, \quad (i,j) \in (U^1_{оп} \cup U^2_{оп}) \setminus U^*.$$

З а м е ч а н и е. Будем полагать, что для всех дуг $(i,j)\in \in U^*$ выполняется равенство $x_{ij}^1 + x_{ij}^2 = d_{ij}$, так как в противном случае можно перейти к опоре $\{U_{оп}^k, k\in K = =\{1,2\}\setminus k_0 ;\ U_{оп}^k \setminus (i,j)^{k_0},\ U^*\setminus(i,j)\}$, содержащей меньшее число элементов по сравнению с исходной, сохраняя невырожденность опорного потока.

Пусть $\{x, U_{оп}\}$ – опорный поток. По опоре $U_{оп}$ для каждого узла $i\in I$ построим вектор потенциалов $u_i = (u_i^1, u_i^2)$, компоненты которого удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} & u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} z_p - c_{ij}^k = 0,\ (i,j)^k\in U_{оп}^k\setminus U^*, \\ & k=1,2;\ u_i^1 - \mu_{ij}^1 u_j^1 + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{1p} z_p - c_{ij}^1 = \\ & = u_i^2 - \mu_{ij}^2 u_j^2 + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{2p} z_p - c_{ij}^2,\ (i,j)\in U^*, \end{aligned} \tag{4}$$

где $u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} z_p - c_{ij}^k = \gamma_{ij},\ (i,j)\in U^*,\ k=K$.

Укажем способ решения системы (4). Обозначим через z вектор $(z_p,\ p=\overline{1,l};\ \gamma_{ij},\ (i,j)\in U^*)$; через ρ вектор $(\rho_{t\cdot(\xi,\eta)^k},\ (\xi,\eta)^k\in U_{бин}^k,\ k=1,2)$, где $\rho_{t(i,j)^k} = \sum_{(i,j)^k\in U_{t(\xi,\eta)^k}} c_{ij}^k \tilde{y}_{ij}^t$. Согласно /11/, вектор z однозначно вычислим из системы

$$D' z = \rho. \tag{5}$$

Компоненты $(z_p,\ p=\overline{1,l})$ назовем потенциалами дополнительных ограничений, а компоненты вектора z, равные $(\gamma_{ij}, (i,j)\in U^*)$, – потенциалами обобщенных ограничений $x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \le d_{ij}$ задачи (1).

По известным значениям потенциалов дополнительных и обобщенных ограничений из системы

$$\begin{aligned} & u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} z_p - \bar{c}_{ij} = 0, \\ & \bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij}^k, & (i,j)^k\in U_{оп}^k\setminus U^*,\ k=1,2; \\ c_{ij}^k - \gamma_{ij}, & (i,j)\in U^*,\ k=1,2, \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

способ решения которой приведен в /9/, вычислим для каждого узла $i \in I$ вектор потенциалов $u_i = (u_i^1, u_i^2)$. Для каждой дуги $(i,j) \in \mathcal{U}_H^k \cup \mathcal{U}^*$ подсчитаем вектор оценок $\Delta_{ij} = (\Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^\ell)$: $\Delta_{ij}^k = u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^{\ell} \lambda_{ij}^{kp} \tau_p - c_{ij}^k$, $k = 1, \ell$.

Следуя /9,12/, получим формулу приращения стоимости потока

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in\mathcal{U}} c_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = -\sum_{(i,j)\in\mathcal{U}^*} \gamma_{ij} (\Delta x_{ij}^1 + \Delta x_{ij}^2) - \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)^k \in \mathcal{U}^k \setminus \mathcal{U}_{on}^k} \Delta_{ij}^k \Delta x_{ij}^k . \tag{7}$$

Используя соотношения двойственности, доказываем следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in\mathcal{U}} c_{ij}^k x_{ij}^k - \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in\mathcal{U}} c_{ij}^k x_{ij}^{0k} \le \beta, \tag{8}$$

где

$$\beta = -\sum_{k=1}^{2} \sum_{\substack{(i,j)\in\mathcal{U},\\ \max\{\Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^2\}<0}} \Delta_{ij}^k x_{ij}^k - \sum_{\substack{(i,j)\in\mathcal{U},\\ \max\{\Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^2\} = \Delta_{ij}^k > 0}} (\Delta_{ij}^\ell x_{ij}^\ell + \Delta_{ij}^k (x_{ij}^k - d_{ij})), \quad \ell, k = 1, \ell, \quad \ell \ne k;$$

$x^0 = (x_{ij}^{0k}, (i,j) \in \mathcal{U}, k = 1,2)$ - оптимальный поток в задаче (1). С помощью формулы приращения (7) и неравенства (8), следуя /9/, можно доказать

Критерий оптимальности. Соотношения

$$\Delta_{ij}^k \le 0 \quad \text{при} \quad x_{ij}^k = 0; \quad \Delta_{ij}^k = 0 \quad \text{при} \quad x_{ij}^k > 0 \tag{9}$$

на ненасыщенных дугах $(x_{ij}^1 + x_{ij}^2 < d_{ij})$;

$$\Delta^1_{ij} = \Delta^2_{ij} \geq \text{[illegible]} \quad \text{при} \quad x^1_{ij} > 0,\ x^2_{ij} \text{[illegible]}$$
$$\Delta^k_{ij} \geq \Delta^l_{ij},\quad \Delta^k_{ij} \geq 0 \qquad \text{при} \quad x^k_{ij} = d_{ij},\ x^l_{ij} = 0 \tag{10}$$

на насыщенных дугах $(x^1_{ij} + x^2_{ij} = d_{ij})$ достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности потока x.

Критерий субоптимальности. При $\beta \leq \varepsilon$ поток x является ε-оптимальным (субоптимальным). Для каждого ε-оптимального потока существует такая опора $U^{\varepsilon}_{оп}$, что для опорного потока $\{x, U_{оп}\}$ выполняется неравенство (8).

4. Пусть для опорного потока $\{x, U_{оп}\}$ критерии оптимальности и субоптимальности не выполняются. Опишем алгоритм улучшения потока. Среди дуг, для которых не выполнен критерий оптимальности, найдем дугу с максимальным нарушением, т.е. если для ненасыщенной дуги не выполнены условия (9), помечаем число Δ^k_{ij}, если же для насыщенной дуги не выполнены соотношения (10), то при $\max\{\Delta^1_{ij}, \Delta^2_{ij}\} = \Delta^l_{ij} > 0$ помечаем число $\Delta^l_{ij} - \Delta^k_{ij}$; при $\max\{\Delta^1_{ij}, \Delta^2_{ij}\} < 0$ и $x^k_{ij} > 0$, $k = 1, 2$, помечаем число Δ^k_{ij}. Среди отмеченных чисел выбираем максимальное по модулю число. Возможны следующие случаи: 1) максимальное из отмеченных чисел имеет вид Δ^k_{ij} и находится на дуге $(i_0, j_0)^k$, $(i_0, j_0) \overline{\in} U^*$; 2) максимальное число среди помеченных чисел имеет вид Δ^k_{ij} и находится на дуге $(i_0, j_0)^k$, $(i_0, j_0) \in U^*$; 3) максимальное из отмеченных чисел имеет вид разности оценок $\Delta^l_{ij} - \Delta^k_{ij}$, $l, k = 1, 2$, $l \neq k$, и находится на насыщенной дуге (i_0, j_0).

Рассмотрим случай 1). Не нарушая общности, положим $k = 1$. Найдем поток $y\,(U^1_{оп} \cup U^2_{оп} \cup (i_0, j_0)^1) = \{y^k_{ij},\ (i,j)^k \in U^k_{оп},\ k = 1, 2,\ y^1_{i_0 j_0}\}$, компоненты которого удовлетворяют системе (2), записанной относительно множества $\{U^1_{оп} \cup (i_0, j_0)^1,\ U^2_{оп},\ U^*\}$, и условию $y^1_{i_0 j_0} = \operatorname{sgn} \Delta^1_{i_0 j_0}$. Покажем, как можно решить данную систему уравнений.

Для бицикла $Z_0 = \{I_0, U_0\}$, образованного дугами $(i_0, j_0)^1$ и $(i,j) \in \widetilde{U}^1_{оп}$, из системы (3) найдем числа $\widetilde{y}^0_{ij}$,

$(i,j) \in U_0$, при условии $\tilde{y}^0_{i_0j_0} = 1$. Определим вектор α : $\alpha = -\bar{R}_p(z_0)\,\mathrm{sgn}\,\Delta^1_{i_0j_0}$, $p=\overline{1,l}$; $\alpha = -\tilde{y}^0_{ij}\,\mathrm{sgn}\,\Delta^1_{i_0j_0}$, $(i,j) \in U^* \cap U_0$; $\alpha = 0$, $(i,j) \overline{\in} U^* \cap U_0$.

Из системы

$$\mathcal{D}\, y(U_{бuц}) = \alpha \qquad (11)$$

определим потоки на бициклических дугах. Потоки на дугах $(i,j)^k \in U^k_{on} \setminus U^k_{бuц}$, $k=1,2$, находятся по правилу:

$$y^k_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \\ \sum\limits_{t \in T(i,j)^k} y^k_{i_tj_t}\, \tilde{y}^t_{ij}, & T(i,j)^k \neq \varnothing, \end{cases} \qquad (12)$$

где $T(i,j)^k = \{t : (i,j)^k \in U_{t\{\xi,\eta\}^k},\ (\xi,\eta)^k \in U^k_{бuц}\}$, $(i_t, j_t)^k$ - бициклическая дуга, определившая бицикл Z_t.

Новый поток $\bar{x}$ строим в виде

$\bar{x}^k_{ij} = x^k_{ij} + \theta^0 y^k_{ij}$, $(i,j)^k \in U^k_{on}$, $k=1,2$; $\bar{x}^1_{i_0j_0} = x^1_{i_0j_0} + \theta^0 y^1_{i_0j_0}$; $\bar{x}^k_{ij} = x^k_{ij}$,

$(i,j) \in U^k \setminus (U^k_{on} \cup (i_0, j_0)^1)$, где θ^0 - максимально допустимый шаг, найденный из условия выполнения прямых ограничений задачи (1). Из формулы приращения (7) следует, что после преобразования $x \to \bar{x}$ стоимость потока уменьшилась на величину $\theta^0 |\Delta^1_{i_0j_0}|$.

Пусть максимальный шаг θ^0 достигается на дуге $(i_*, j_*) \neq (i_0, j_0)$. Опорные множества меняем следующим образом. Дугу $(i_0,j_0)^1$ вводим в состав множества U^1_{on}. На дуге (i_*, j_*) возможны ситуации: дуговой поток $x^k_{i_*j_*}$ стал нулевым; дуга $(i_*, j_*) \overline{\in} U^*$ превратилась в насыщенную. Опорные множества преобразуем по правилам:

если $\bar{x}_{i_*j_*} = 0$, $(i_*,j_*) \overline{\in} U^*$, из U^k_{on} выводим дугу $(i_*, j_*)^k$;
если $\bar{x}^k_{i_*j_*} = 0$, $(i_*,j_*) \in U^*$, дуги $(i_*, j_*)^1$, $(i_*,j_*)^2$, (i_*,j_*) выводим из множеств U^1_{on}, U^2_{on}, U^* соответственно; (13)

если $\bar{x}^1_{i_*j_*} + \bar{x}^2_{i_*j_*} = d_{i_*j_*}$, $(i_*,j_*)^k \in U^k_{оп}$, $k=1,2$,

дугу (i_*,j_*) вводим в множество U^*;

если $\bar{x}^1_{i_*j_*} + \bar{x}^2_{i_*j_*} = d_{i_*j_*}$, $(i_*,j_*)^k \bar{\in} U^k_{оп}$,

$(i_*,j_*)^l \in U^l_{оп}$, $l,k \in K$, $l \neq k$, дугу $(i_*,j_*)^l$

выводим из множества $U^l_{оп}$.

В случае 2) найдем поток $y(U^1_{оп}, U^2_{оп})$, удовлетворяющий системе (2), записанной относительно множества дуг $\{U^1_{оп}, U^2_{оп}, U^* \setminus (i_0,j_0)\}$, и условию $y^1_{i_0j_0} + y^2_{i_0j_0} = -1$. Компоненты вектора α определим следующим образом:

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } (i,j) \in U^* \setminus (i_0,j_0), \\ -1, & \text{если } (i,j) = (i_0,j_0). \end{cases}$$

Из системы (11) определим вектор $y(U_{бнц})$. Величины y^k_{ij}, $(i,j)^k \in U^k_{оп} \setminus U^k_{бнц}$, $k=1,2$, вычисляются из соотношений (12).

Новый поток $\bar{x}$ строим в виде $\bar{x}^k_{ij} = x^k_{ij} + \theta^0 y^k_{ij}$, $(i,j)^k \in U^k_{оп}$, $k=1,2$; $\bar{x}^k_{ij} = x^k_{ij}$, $(i,j)^k \bar{\in} U^k_{оп}$, $k=1,2$, где θ^0 - максимально допустимый шаг, найденный по стандартным правилам. При переходе к новому опорному потоку стоимость уменьшилась на величину $-\theta^0 \Delta^1_{i_0j_0}$. Пусть шаг достигается на дуге $(i_*,j_*) \neq (i_0,j_0)$. Тогда $\bar{U}^* = U^* \setminus (i_0,j_0)$. С дугой (i_*,j_*) поступаем согласно (13).

Рассмотрим случай 3). Найдем потоки $\{y^k_{ij}, (i,j)^k \in U^k_{оп}, y^k_{i_0j_0}, k=1,2\}$, удовлетворяющие системе (2), записанной относительно множества $\{U^1_{оп} \cup (i_0,j_0)^1, U^2_{оп} \cup (i_0,j_0)^2$, (i_0,j_0), при условиях $y^1_{i_0j_0} = \operatorname{sgn}(\Delta^l_{i_0j_0} - \Delta^k_{ij})$, $y^2_{i_0j_0} = -\operatorname{sgn}(\Delta^l_{i_0j_0} - \Delta^k_{i_0j_0})$. Поток y^k_{ij} по дуге $(i,j)^k \in U^k_{оп}$ можно представить в виде суммы потоков $y^k_{ij} = y^k_{ij(1)} + y^k_{ij(2)}$, $k=1,2$,

где $y^k_{ij(1)}$, $y^k_{ij(2)}$ - решения специальных систем уравнений, способы нахождения которых рассмотрены в /9/.

Новый поток $\bar{x}$ строим в виде $\bar{x}^k_{ij} = x^k_{ij} + \theta^0 y^k_{ij}$, $(i,j)^k \in U^k_{оп} \cup (i_0,j_0)^k$; $\bar{x}^k_{ij} = x^k_{ij}$, $(i,j)^k \bar{\in} U^k_{оп} \cup (i_0,j_0)^k$, $k=1,2$, где θ^0 - максимально допустимый шаг. Стоимость потока $\bar{x}$ меньше стоимости потока x на величину $\theta^{\circ} |\Delta^{l}_{i_0 j_0} - \Delta^{k}_{i_0 j_0}|$. Правила преобразования опоры следующие: $\bar{U}^{k}_{оп} = U^{k}_{оп} \cup (i_0, j_0)^{k}$, $k = 1,2$; $\bar{U}^{*} = U^{*} \cup (i_0, j_0)$. С дугой (i_*, j_*) поступаем согласно правилу (13) $((i_*, j_*) \neq (i_0, j_0))$.

Рассмотрим случай, когда $(i_0, j_0) = (i_*, j_*)$. Опорное множество преобразуется по правилам:

если $x^{1}_{i_0 j_0} + x^{2}_{i_0 j_0} < d_{i_0 j_0}$, $(i_0, j_0)^{k} \in U^{k}_{оп}$, $(i_0, j_0)^{l} \bar{\in} U^{l}_{оп}$, $l, k \in \mathcal{K}$, $l \neq k$, $\bar{x}^{1}_{i_0 j_0} + \bar{x}^{2}_{i_0 j_0} = d_{i_0 j_0}$, вводим дугу $(i_0, j_0)^{l}$ в множество $U^{l}_{оп}$, дугу (i_0, j_0) – в U^{*};

если $x^{1}_{i_0 j_0} + x^{2}_{i_0 j_0} < d_{i_0 j_0}$, $(i_0, j_0)^{k} \in U^{k}_{оп}$, $(i_0, j_0)^{l} \bar{\in} U^{l}_{оп}$, $l, k \in \mathcal{K}$, $l \neq k$, $\bar{x}^{k}_{i_0 j_0} = 0$, дугу $(i_0, j_0)^{k}$ выводим из множества $U^{k}_{оп}$, в $U^{l}_{оп}$ вводим дугу $(i_0, j_0)^{l}$;

если $(i_0, j_0) \in U^{*}$, $\bar{x}^{k}_{i_0 j_0} = 0$, дугу $(i_0, j_0)^{k}$ выводим из $U^{k}_{оп}$ и дугу (i_0, j_0) выводим из множества U^{*}.

В остальных случаях опора не меняется.