

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.И. Чуприс

06.07.2018

Регистрационный № УД- 5469/уч.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

- | | |
|---------------|---|
| 1-31 03 01 | Математика (по направлениям) |
| 1-31 03 01-03 | Математика (экономическая деятельность) |

2018 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2013, введенного в действие 30.08.2013 г. (№ 88) и учебного плана № G31-139/уч. от 30.05.2013 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

В.М. Волков, профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

А.И. Азаров, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

М.В. Игнатенко, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой *веб-технологий и компьютерного моделирования* механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол №8 от 13.06.2018)

Учебно-методической комиссией *механико-математического факультета* Белорусского государственного университета (протокол № 8 от 19.06.2018)

Зав. кафедрой 



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дисциплина по выбору «*Численные методы*» входит в цикл специальных дисциплин учебного плана очной формы получения образования по специальности 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность) механико-математического факультета Белорусского государственного университета, в соответствии с которым разработана настоящая учебная программа дисциплины «*Численные методы*».

В настоящее время численные методы являются одним из наиболее востребованных разделов математики. Это связано как с бурным развитием вычислительной техники и широким применением средств математического моделирования практически во всех сферах современной науки и техники. Численные методы в современной математике играют роль, аналогичную роли цифровых технологий в современном мире. Владение техникой научных расчетов позволяет наиболее полно раскрыть эффективность использования математических методов для решения актуальных фундаментальных и прикладных задач.

Центральной идеей образования по дисциплине «*Численные методы*» является обучение студентов современным технологиям компьютерного моделирования с использованием методов численного анализа сложных математических задач, а также приобретение практических навыков построения и реализации численных алгоритмов и оценки корректности полученных результатов.

Дисциплина «*Численные методы*» имеет прикладную направленность. Ее *основная цель* заключается в освоении учащимися современной технологии математического моделирования, основанной на использовании численных методов и прикладного программного обеспечения.

Задачи дисциплины состоят в изучении основных принципов построения численных методов и оценки их вычислительных качеств, изучении основных методов численного решения задач линейной алгебры, анализа и дифференциальных уравнений, развития умения и навыков выбора адекватного алгоритма, его программной реализации, интерпретации результатов численных расчетов и степени их достоверности.

Программа дисциплины «*Численные методы*» составлена с учетом межпредметных связей и программ по смежным дисциплинам. Его изучение базируется на знаниях из университетских дисциплин по алгебре, геометрии, математическому анализу, функциональному анализу, дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики с частными производными.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- источники погрешности численных результатов;
- понятия устойчивости, сходимости и вычислительной сложности численных алгоритмов;
- требования корректности постановки задачи;
- основные приемы оценки погрешности численных методов;

– назначение, алгоритмические особенности и вычислительные качества наиболее востребованных на практике численных методов, в числе которых: прямые и итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, методы вычисления собственных значений и собственных векторов матриц, методы решения нелинейных уравнений и задач оптимизации, методы приближения функций, методы численного дифференцирования и интегрирования, методы решения дифференциальных задач.

уметь:

- оценить корректность постановки задачи;
- выбрать адекватный метод для численного решения конкретной задачи;
- построить и программно реализовать численный алгоритм;
- численно решать математические задачи с помощью самостоятельного построенного алгоритма и (или) соответствующих функций математических пакетов;
- анализировать достоверность результатов и сравнивать эффективность разных численных методик;

владеть:

- навыками работы с современными программными средствами численного решения математических и прикладных задач;
- навыками программирования численных алгоритмов;
- основными приемами априорной и апостериорной оценки погрешности численного решения задач алгебры и анализа.

Преподавание дисциплины «Численные методы» строится таким образом, чтобы обучающийся приобретал следующие компетенции специалиста:

Академические:

- АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.
- АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.
- АК-3. Владеть исследовательскими навыками.
- АК-4. Уметь работать самостоятельно.
- АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).
- АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.
- АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.
- АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.
- АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

Социально-личностные:

- СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.
- СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.
- СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.
- СЛК-6. Уметь работать в команде.

Профессиональные:

- ПК-1. Разрабатывать практические рекомендации по использованию научных исследований, планировать и проводить экспериментальные исследования, исследовать патентоспособность и показатели технического уровня разработок программного обеспечения информационных систем.
- ПК-2. Владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации. Применять современные методы проектирования информационных систем, использовать веб-сервисы, оформлять техническую документацию.
- ПК-3. Применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой профессиональной деятельности.
- ПК-4. Разрабатывать и тестировать информационные системы, осуществлять защиту приложений и данных.
- ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.
- ПК-6. Использовать и развивать современные информационные технологии и средства автоматизации управленческой деятельности.
- ПК-7. Проводить исследования в области эффективности решения производственных задач.
- ПК-8. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой.
- ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.
- ПК-13. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.
- ПК-16. Готовить доклады, материалы к презентациям.
- ПК-22. Работать с научной, технической и патентной литературой.
- ПК-27. Реализовывать инновационные проекты в профессиональной деятельности.

Учебная дисциплина «Численные методы» рассчитана на 90 часов в VIII семестре IV года обучения, из них 54 аудиторных часа, в том числе 36 часов лекций, 14 часов лабораторных занятий и 4 часа УСР, форма отчетности – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение.

Численные методы в современной системе научных знаний. Цифровые технологии и численный эксперимент в методах математического моделирования.

Основы компьютерной арифметики. Представление действительных чисел с плавающей запятой. Вычислительная погрешность.

Тема 2. Численные методы решения систем ЛАУ.

Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности.

Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента.

LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации.

Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.

Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра.

Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, Последовательной верхней релаксации.

Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

Тема 3. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.

Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия.

Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.

Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений.

Метод вращений. Понятие о QR алгоритме.

Тема 4. Решение нелинейных уравнений и систем.

Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов.

Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости.

Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона.

Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные методы.

Тема 5. Приближение функций. Численное дифференцирование и интегрирование.

Понятие об аппроксимации и интерполяции. Полиномиальная интерполяция. Сплайны.

Наилучшее приближение. Полиномы Чебышева и ряды Фурье.

Численное дифференцирование. Конечные разности. Матрица спектрального дифференцирования.

Численное интегрирование. Квадратурные формулы.

Тема 6. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости.

Методы Рунге-Кутты.

Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса.

Понятие о жестких системах ОДУ. А-устойчивость. Метод Гира.

Тема 7. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка.

Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина.

Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем.

Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ.

Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы.

Тема 8. Разностные методы для задач математической физики.

Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем. Устойчивость, аппроксимация и сходимость.

Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости.

Разностные схемы для эллиптических уравнений. Принцип максимума.

Реализация разностных схем. Метод переменных направлений и метод мелких шагов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, тем	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов		Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия		
1	Введение	2		2	Опрос, проверка индивидуальных заданий
2	Численные методы решения систем ЛАУ	6	2	-	Опрос, отчет по л.р.
3	Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц	2	2	-	Опрос, отчет по л.р.
4	Решение нелинейных уравнений и систем	6	2	-	Коллоквиум, опрос, отчет по л.р.
5	Приближение функций. Численное дифференцирование и интегрирование	4	2	2	Опрос, отчет по л.р., проверка индивидуальных заданий
6	Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	6	2	-	Опрос, отчет по л.р.
7	Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	4	2		Опрос, отчет по л.р.
8	Разностные методы для задач математической физики	6	2		Коллоквиум, опрос, отчет по л.р.
	ВСЕГО часов:	36	14	4	Зачет

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. 432 с.
2. Волков, В.М. Численные методы / В.М. Волков. В двух частях. Ч. 1. – Мн.: БГУ, 2016. 87 с.
3. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. 632 с.
4. Игнатенко, М. В. Методы вычислений. Интерполирование и интегрирование: курс лекций / М. В. Игнатенко. – Минск: БГУ, 2006. 116 с.
5. Монастырский, П. И. Сборник задач по методам вычислений: учебное пособие / А.И. Азаров, В.А. Басик, М.В. Игнатенко и др./ под ред. П.И. Монастырского. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. 376 с.

Дополнительная:

6. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. Numerical Recipes. 3rd Edition: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press. 2007.
7. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. 512 с.
8. Дьяконов, В.П. Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник / В.П. Дьяконов, В.В. Круглов. – СПб.: Питер, 2001. 488 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Важным элементом в подготовке специалиста с высшим образованием является самостоятельная работа студентов с учебным материалом. Современные образовательные технологии ориентированы на привитие у обучающегося навыков самостоятельного поиска необходимой для учебы информации, её усвоения, постановки и решения задач, самоконтроля уровня своей подготовленности по изучаемой дисциплине.

Управляемая самостоятельная работа (УСР) обучающихся – это самостоятельная работа (СР), выполняемая по заданию и при методическом руководстве и контролируемая на определенном этапе обучения преподавателем.

Целью УСР дополнительно к целям СР является целенаправленное обучение основным навыкам и умениям для выполнения СР.

УСР, как важная составная часть учебного процесса, в том числе по дисциплине «*Численные методы*» должна обеспечиваться мотивацией, доступностью и качеством научно-методического и материально-технического обеспечения образовательного процесса, сопровождаться эффективной системой контроля и способствовать усилению практической направленности обучения. При выполнении УСР должны быть созданы условия, при которых обеспечивалась бы активная роль обучающихся в самостоятельном получении знаний и систематическом применении их на практике. Управление самостоятельной работой обучающихся должно осуществляться через разработку научно-методического обеспечения СР и осуществление контрольных мероприятий.

К *организационным формам* проведения УСР по дисциплине «*Численные методы*» можно отнести деятельность на аудиторных (практических и лабораторных) занятиях.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ДИАГНОСТИ

Контроль по дисциплине «*Численные методы*» проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

- опроса;
- коллоквиума;
- отчета по индивидуальным заданиям и по лабораторным работам.

МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ИТОГОВОЙ ОЦЕНКИ

Учет результатов контроля текущей успеваемости студентов ведется преподавателем. Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

Итоговая оценка формируется на основании:

- постановления Министерства образования Республики Беларусь «Об утверждении правил проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования» от 29.05.2012 №53;
- «Положения о рейтинговой системе оценки знаний по дисциплине в Белорусском государственном университете» от 18.08.2015 №382-ОД;
- критериев оценки и определения уровня знаний и компетенций студентов (письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 №24-04-01/105).

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

1. Построить разностное уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + \phi(x, t)$ на сетке (x_m, t_n) , где $x_m = mh$, $t_n = n\tau$, используя шаблоны:

1) $\mathcal{I}(x_m, t_n) = \{(x_{m-1}, t_n), (x_{m+1}, t_n), (x_{m-1}, t_{n+1}), (x_{m+1}, t_{n+1})\}$;

2) $\mathcal{I}(x_m, t_n) = \{(x_m, t_{n-1}), (x_{m-1}, t_n), (x_m, t_n), (x_{m+1}, t_n), (x_m, t_{n+1})\}$;

Оценить погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностным в точке (x_m, t_n) .

2. Построить аппроксимацию условия $u(0, t) = \psi(t)$ с привлечением значений сеточных функций в точках: 1) $\left(\frac{1}{2}h, t_n\right)$;

2) $\left(\frac{1}{2}h, t_n\right), \left(\frac{3}{2}h, t_n\right), \left(\frac{5}{2}h, t_n\right)$. Оценить погрешность аппроксимации.

3. Показать, что разностная схема $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}$ аппроксимирует дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на сетке (x_m, t_n) , $x_m = mh$, $t_n = n\tau$, со вторым порядком по τ и четвертым по h , если $\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6}$.

4. Пусть даны дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и разностная схема $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \sigma \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \sigma) \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}$. Найти, при каком значении параметра σ порядок аппроксимации будет вторым по τ и вторым по h .

5. Исследовать сходимость к решению задачи Коши $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}$, $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t \leq T$, $u(x, 0) = \psi(x)$, $-\infty < x < +\infty$, $a > 0 - Const$ решений следующей разностной схемы

$$\frac{y_m^n - y_m^{n-1}}{\tau} = a\sigma \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} + a(1-\sigma) \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h},$$

$$y_m^0 = \psi(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad N\tau = T.$$

6. Исследовать сходимость разностной схемы

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = (1-\sigma) \frac{y_{m-1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1}}{2h^2} + \sigma \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{2h^2},$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad N\tau = T, \quad Mh = 1,$$

$$y_m^0 = \psi(x_m), \quad u_0^n = 0, \quad u_M^n = 0,$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \psi(x),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

Здесь $x_m = mh$, $t_n = n\tau$, $0 \leq \sigma \leq 1$.

7. При каких значениях параметра $\theta \in [0; 1]$ разностная схема $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = (1-\theta) \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \theta \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$ устойчива?

8. Определить, при каких значениях параметра $\theta \in [0; 1]$ схема $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \theta \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + (1-\theta) \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$ устойчива?

9. Пусть даны дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и разностная схема $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \sigma \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\sigma) \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}$. Найти, при каком значении параметра σ порядок аппроксимации будет вторым по τ и четвертым по h .

10. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{h^2}{2\tau} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0$.

11. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0$.

12. Определить порядок аппроксимации разностных схем на решении уравнения теплопроводности и переноса

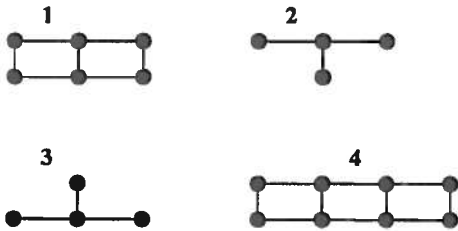
$$\text{а) } \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2} + f_m, \quad \text{б) } \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} = 0.$$

13. Методом гармоник исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} = 0.$$

14. Разностная схема для уравнения теплопроводности имеет порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ и сходится. Во сколько раз возрастут вычислительные затраты по данной разностной схеме если требуется увеличить точность решения в 16 раз. Предполагается, что вычислительные затраты растут пропорционально числу узлов сетки.

15. Какой(ие) из шаблонов



соответствует типовым неявным двухслойным схемам для нестационарного уравнения теплопроводности?

**ПРОТОКОЛ
СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ИЗУЧАЕМОЙ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ
СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Статистические методы экономики	Нелинейного анализа и экономической экономики		Оставить содержание учебной дисциплины без изменения. Протокол заседания кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования № 8 от 13.06.2018.

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
на ____ / ____ учебный год

№п/ п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования (протокол № ____ от ____ 201_ г.)

Заведующий кафедрой
канд. физ.-мат. наук, доцент

В.С. Романчик

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
канд. физ.-мат. наук, доцент

Д.Г. Медведев