

простого признания инаковости прошедшего, но в том смысле, что у него действительно есть, что сказать мне»⁹. Четвертый уровень актуализирует значимость Другого как личности, как автора, как представителя той или иной эпохи. Понимание живописного текста на данном уровне – творчество на основе постигнутого текста, но это не всегда опредмечивание, а, скорее, внутренняя работа по осмыслению текста.

Итак, акт понимания искусства в процессе взаимодействия предполагает: коммуникантов – адресанта (автора) и адресата (реципиента), т. е. участников диалога, владеющих нормами семиотической системы (в данном случае – это живописный текст); исследуемые тексты, выражающие смыслы; цели и культурно-коммуникативное поле, в области которого происходит процесс понимания.

Понимание является завершающим этапом художественной коммуникации. Онтологический статус произведения искусства определяется не только как текст, созданный автором, но и способность реципиента творчески взаимодействовать с этим текстом. Так возникает диалог автора и реципиента, в котором происходит обмен и синтез смыслов. Живописный текст не равен себе, так как он меняется, когда вступает в диалогическое взаимодействие с реципиентом, который, в свою очередь, способен дать тексту ровно столько смысла, сколько позволяет ему его подготовленность.

Таким образом, структурализация процесса понимания искусства предполагает некую модель действий коммуникантов в акте взаимодействия.

¹ Гадамер Х.-Г. Истина и метод: основы философской герменевтики. М., 1988. С. 425.

² Зедльмайр Г. Искусство и истина: Теория и метод истории искусства / Пер. с нем. Ю.Н. Попова. СПб., 2000. С. 134–184.

³ Зедльмайр Г. Там же. С. 163.

⁴ См.: Берков В.Ф. Глубина понимания текста // Берков В.Ф., Яскевич Я.С., Павлюкович В.И. Логика. Учеб. пособие для студентов. Мн., 2000. С. 341–346.

⁵ Цит. по: Зедльмайр Г. Указ. пр. С. 170.

⁶ Барт Р. Избранные работы. Семиотика. Поэтика. М., 1994. С. 390–391.

⁷ Зедльмайр Г. Указ. пр. С. 136.

⁸ Бахтин М.М. Эстетика словесного творчества. М., 1986. С. 300–301.

⁹ Гадамер Х.-Г. Указ. пр. С. 425.

Поступила в редакцию 12.02.2003.

Оксана Сергеевна Кузина – аспирантка кафедры философии и культурологии РИВШ БГУ. Научный руководитель – доктор философских наук, профессор В.Ф. Берков.

В.А. ЕРОВЕНКО, Н.В. МИХАЙЛОВА

МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА ГИЛЬБЕРТА КАК ФИЛОСОФСКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Исследуется философско-методологический анализ программы Гильберта обоснований математики и определяется ее значение для современного развития математического знания.

This paper is devoted to philosophical and methodological analysis of the Hilbert program concerning the grounds of mathematics and its significance for the modern stage of development of mathematical knowledge.

После фундаментальных открытий Курта Гёделя можно считать общепризнанным, что проблема обоснования математики все еще не решена. С точки зрения эпистемологии следует разделять оправдание математики через ее использование и обоснование. В этом одно из существенных отличий математики от других наук, в том смысле, что вопрос о ее обосновании не может быть решен только на аргументах опыта. Основная трудность заключена в отсутствии однозначного восприятия самого понятия «обоснование», а также в разногласиях по поводу допустимых логик.



Для понимания сущности современной математики необходимо глубже понять природу математического мышления. Математики уже сталкивались с подобной философско-методологической проблемой, когда длительное неприятие неевклидовых геометрий было обусловлено не наличием математических ошибок, а определенными философскими представлениями. Поэтому любой математик, защищающий "классическую" строгость, найдет немало союзников своей правоты. Что можно сказать об исторической перспективе развития математики? Вряд ли кто возьмется ответить сегодня на этот вопрос так, как это сделал на рубеже XX ст. Давид Гильберт. Не вызывает сомнения то, что математика XXI в. будет не только сложнее и абстрактнее, но и новые методологические подходы, возможно, тоже будут выходить за границы сегодняшних представлений. Но чтобы понять будущее, как показывает практика, надо переосмыслить с современных позиций борьбу методологий и философских мировоззрений прошлого. Еще до теоремы Гёделя о неполноте математики заметили, что понятия "существовать" и "построить" стали заметно различаться, т. е. появились "чистые" теоремы существования, в которых нет построения объекта, чье существование доказывается. С точки зрения конструктивистов, им бы больше подошло название "нечистые". Одно время казалось, что соответствующие трудности обусловлены аксиомой выбора, и это было действительно справедливое обвинение. Однако принципиально другой подход к рассмотрению данной проблемы предложил Лейтцен Брауэр. Критически анализируя идеи Бертрانا Рассела о сведении математики к логике, он пытался доказать, что математика не только не зависит от логики, но и логика зависит от математики.

Поддерживая Анри Пуанкаре в критике абстракции актуальной бесконечности, он отмечал в то же время ее ограниченность. Нужно либо полностью отказаться от бесконечных совокупностей объектов, либо перейти к другой логике, либо признать идеальный характер математических утверждений без какого-либо содержательного смысла. После публикации диссертации Брауэра "Об основании математики" (1907) и статьи с полемическим названием "О недостоверности логических принципов" (1908) в математике и логике появилось новое направление "интуиционизм". Новая логика, по мнению Брауэра, интуитивно понятнее, чем классическая, поскольку описывает математические утверждения не как абстрактную истину и ложь, а как предложения о возможности выполнить некоторое "умственное построение". Математическое доказательство в этом контексте состоит из соответствующего конструктивного построения с помощью эффективных методов и его обоснования. Основой интуиционистской философии математики является натурфилософия бесконечного. "Суть ее в том, – считает философ математики В.Я. Перминов, – что человек практически не имеет дела с бесконечностью, а следовательно, и не может мыслить о бесконечности, не теряя достоверности"¹. Поскольку адекватных понятий для выражения новых методологических идей в европейской науке в те времена еще не было выработано, например, тогда не существовало точного понятия алгоритма, то Брауэр сослался на интуицию как "инструмент" понимания новых математических сущностей. Учитывая роль конструкций в предлагаемой модификации математики и логики, он употреблял также и другое название – конструктивная логика и математика. Затем эти термины разошлись, в частности, конструктивизмом стали характеризовать направление в математике, отдающее приоритет понятию задачи и конструкции, а не истины и обоснования. С точки зрения интуиционизма некоторые объекты математики и некоторые операции, безусловно, ясны во всех своих свойствах. Здесь можно проследить связь с философией Канта, его теорией "чистого созерцания", универсального и непогрешимого.

Центральная идея интуиционизма заключается в конструктивном понимании утверждений о существовании математических объектов. С точки зрения реалистических взглядов на математические объекты конструктивный тезис Брауэра дал новый подход к известному со времен Зенона Элейского концептуальному противоречию в математической модели пространства, предполагающей существование точек и вместе с тем бесконечную делимость пространства. Брауэр показал, что точки вводить необязательно. Существование точек, в частности, ставит под сомнение апория "Стрела", а бесконечную делимость пространства – апория "Ахиллес и черепаха". На самом деле "движение" Ахиллеса и черепахи достаточно наглядно в геометрических построениях. "Однако, поскольку Зенон представил эту проблему в терминах взаимно однозначного соответствия в арифметико-алгебраическом (понятийном) языке, – замечает американский философ математики Джоанг Фанг, – описание состояния превратилось в парадокс или, по крайней мере, – в апорию"². Схожую проблему представляет собой восприятие иррационального числа $\sqrt{2}$. Геометрическое изображение диагонали квадрата со стороной, равной единице, не представляет труда для любого человека, но совсем другое дело – вычисление этой диагонали на "арифметико-алгебраическом" языке.

В математической и философской литературе исследована гипотеза Брауэра о законе исключенного третьего как источнике парадоксов в теории множеств. Принцип исключенного третьего для конечных совокупностей в интерпретации Давида Гильберта формулируется следующим образом: либо все предметы обладают определенным свойством, либо существует предмет, который этим свойством не обладает. В математике обычно предполагалось, что эта альтернатива остается в силе без каких-либо ограничений и в случае бесконечного числа математических сущностей. В соответствии с программой Брауэра с дизъюнкцией, т. е. высказыванием вида $\langle\langle A \text{ или } B \rangle\rangle$, связывалась задача определения потенциально верного члена этой пары, а отрицание A , т. е. высказывание вида $\langle\langle \text{не } A \rangle\rangle$, означало доказательство неразрешимости задачи, связанной с A . Соответственно высказывание вида $\langle\langle A \text{ или не } A \rangle\rangle$ состояло в решении задачи, связанной с A , или доказательстве ее неразрешимости. Например, пока теорема Ферма не была доказана, интуиционист не мог утверждать, что проблема Ферма имеет положительное решение или имеет отрицательное решение, поэтому пока проблема Ферма не была решена, эта дизъюнкция считалась неправомерной. Таким образом, в интуиционистском понимании математических высказываний утрачивал свой универсальный статус логического принципа, т. е. верного в любом конкретном случае, важнейший закон аристотелевской логики – "закон исключенного третьего".

В классической математике понятия "утверждение" и "отрицание" дополняют друг друга в том смысле, что отрицание истины есть ложь, а отрицание лжи есть истина, в результате чего двойное отрицание возвращало все на исходную позицию. Даже при конструктивном определении математического существования такая симметрия могла быть сохранена, если бы отрицание было бы определено как невозможность построения. Однако, по Брауэру, отрицание – это, по существу, доказательство абсурдности самого предположения о возможности существования этого объекта. Это принципиально "неклассический" подход по отношению к классической дихотомии истинности и ложности. Нуждается ли современная математика в опровержении закона исключенного третьего? В контексте интуиционистской логики эта проблема сводится к пониманию утверждения и его отрицания с точки зрения логики математического мышления и в итоге – к философской проблеме назначения и сущности математики. В защиту Брауэра заметим, что закон исключенного третьего экстраполирован на бесконечные совокупно-



сти, исходя из его понимания в конечных ситуациях, а многие свойства конечных множеств не выполняются для бесконечных множеств, хотя бы такое, что всякая собственная часть меньше целого. Кроме того, применение закона исключенного третьего к конечным множествам с большим числом элементов может привести к неконструктивным доказательствам существования. Бесконечное для нас всегда окрашено сознанием или пафосом неизвестного. Как говорил Мераб Мамардашвили, "человек есть существо, больное бесконечностью".

Интуиционистская доктрина Брауэра ассоциируется в сознании математиков с нападками на теоретико-множественные определения и гильбертову трактовку формальных правил вывода теорем. Положительной стороной программы интуиционистов, которую не выделял даже сам Брауэр, было стремление сделать главным объектом исследований в основаниях математики не только формальные выводы, но и саму умственную деятельность по построению доказательств. Существенный элемент этой программы состоит в новом понимании логических операций как отображений доказательств в доказательства. Вопрос об оценке концепции Брауэра с философской и прежде всего математической точек зрения довольно сложен. Поскольку она представляет собой реформу, а не анализ классической математики, то опыта одной традиционной математики, вообще говоря, недостаточно. Некоторые же положения интуиционизма конкретизируются теоремами Гёделя о неполноте, хотя сам Брауэр после появления результатов Гёделя принципиально не желал ими пользоваться для обоснования своих конструкций, так как не относил их к сущности классической математики. В определенной мере он был прав, потому что программа Гёделя имеет отношение к достаточно богатой формализации любой математической теории. С точки зрения сторонников интуиционистской доктрины, никакая формальная система не способна охватить все верные методы доказательства, но вторую теорему Гёделя о неполноте тоже можно интерпретировать в этом смысле, а именно, что никакая система не может "охватить" всех методов, использующих ее собственную корректность.

Брауэр не предполагал, что формальной непротиворечивости достаточно для "корректности" системы, он все же не указал на ее ограниченность, как это удалось сделать Гёделю. Можно понять, почему критики Брауэра возражали против ограничений, наложенных им на применяемые обычно в математической практике традиционные логические средства, хотя они считали интуиционистские ограничения "парализующими". А.Н. Колмогоров и К. Гёдель одними из первых выявили "тривиальность" такого рода возражений, поскольку математики и логики научились строить "основную часть" математики, эффективно используя интуиционистские методы. Тем не менее указанным возражениям до сих пор доверяют многие математики, так как принципиальный недостаток логики Брауэра, который тоже мало известен, по мнению Гёделя, состоит в том, что получение результатов, построенных по интуиционистским формальным правилам, имеет тот же порядок сложности, что и для соответствующих "классических" систем. Поэтому первоначальное впечатление о логических свойствах концепции Брауэра было почти столь же ошибочно, как и представления Рассела и Гильберта об их концепциях. Большинство математиков игнорировали новое "неклассическое" направление, поскольку Лейтцен Брауэр подчеркивал неформализуемость интуиционистской математики, не желая явно выписывать ее аксиомы в соответствии со сложившейся практикой развития математики.

Нетрудно понять, почему такие декларации вызывали раздражение Давида Гильберта, который считал, что Брауэр "выплескивает вместе с водой и ребенка". Обратим внимание еще на одну сторону рассматриваемой проблемы. Требование интуиционистов по отношению к закону исключенного третьего может создать затруднения в задачах, связанных с конечными

множествами. Даже в простейшей ситуации, когда, допустим, кто-то, закрыв глаза, достает шар из урны, в которой имеются три белых и три черных шара, и тут же бросает его обратно при условии, что никто не видел этот шар, мы не имеем возможности узнать, какого цвета он был. Но вряд ли можно всерьез оспаривать достоверность утверждения, что этот шар был либо черного, либо белого цвета. История развития математики подтверждает, что довольно легко впасть в заблуждение, когда к бесконечным совокупностям применяли метод, допустимый в финитной области. Примеры подобных ошибок хорошо известны из математического анализа. Например, правильность вывода при переносе теорем, справедливых для конечных сумм и произведений, на бесконечные суммы и произведения подтверждается специальными исследованиями сходимости.

Свою задачу Гильберт видел в том, чтобы выяснить, почему же использование трансфинитных выводов все же приводит к правильным результатам, подобно тому, как это происходит в анализе и теории множеств. После того как программа Брауэра получила широкую известность, к ней примкнул один из самых выдающихся учеников Давида Гильберта – немецкий математик Герман Вейль, серьезно огорчив тем самым своего учителя, который к тому времени остро полемизировал с Брауэром в связи с крайней настроенностью против теоретико-множественных взглядов последнего. Так, Герман Вейль писал: “Л.Э.Я. Брауэр своим интуиционизмом открыл нам глаза и заставил увидеть, насколько далеко общепринятая математика выходит за рамки таких утверждений, которые могут претендовать на реальный смысл и истинность, основанную на очевидности”³. Вейль сожалел, что Гильберт никогда открыто не признавал, насколько он, равно как и другие математики, в долгу перед Брауэром за его открытие. Косвенным оправданием может служить то, что Гильберт увидел и наметил в общих чертах тот путь, который без принесения “тяжелых жертв”, требуемых Брауэром, позволил избежать “жестоких увечий” математики. Он был уверен, что, несмотря на признаки колебаний в среде математиков, абсолютную строгость можно восстановить, не “совершая предательства по отношению к нашей науке”.

Основное эмоциональное возражение Гильберта против интуиционизма выделяет характерные для классической математики методологические подходы. Запретить математику использовать принцип исключенного третьего, считал он, все равно, что, например, запретить астроному пользоваться телескопом. Гильберт настаивал на том, что нереальные, “идеальные” предложения необходимы для “полноты” математических теорий, хотя и соглашался с Брауэром в том, что немалое количество математических предложений не основано на очевидности. Складывалось впечатление, что Брауэр хотел вывести математику за пределы общей естественнонаучной концепции европейского рационализма, а, с другой стороны, заодно пересмотреть в ней “правила математической игры”. Отказываясь от требования Брауэра отбросить все, что не имеет смысла, Гильберт старался доказать не истинность отдельного математического предложения, а непротиворечивость системы. Реализация этой программы Гильберта столкнулась с серьезными трудностями. Его программа предназначалась для “реабилитации” математики в связи с критикой программы интуиционистов обоснования математики. Соглашаясь со своими оппонентами в том, что не все утверждения математики имеют непосредственный смысл, и даже предлагая более жесткие, чем у интуиционистов, критерии осмысленности математических высказываний, Давид Гильберт тем не менее не считал, что надо кардинально изменить некоторые устоявшиеся приемы доказательств.

Например, аксиомы, положенные Эрнестом Цермело в основание своей системы, содержат некоторые содержательные предложения, принимая которые мы переходим в область проблематичного, опирающуюся на мнения



различных людей. Пытаясь вернуть математике абсолютно достоверный характер, Гильберт выбрал новый путь для решения проблем обоснования. В докладе "Проблемы обоснования математики" (1928), прочитанном на Международном математическом конгрессе в Болонье, Давид Гильберт сказал: "С помощью этого нового обоснования математики, которое справедливо может быть названо теорией доказательства, я надеюсь с вопросами обоснования математики, как таковыми, покончить тем, что каждое математическое высказывание я превращу в конкретно предъявляемую и строго выводимую формулу и тем самым перемещу весь комплекс вопросов в область чистой математики"⁴. Программа перестройки оснований математики, предложенная Гильбертом, состояла из двух дополняющих друг друга задач. Решение одной из них предполагало довести до конца процесс аксиоматизации математики, точнее представить существующую математику в виде формальной теории на основе "очищенной" от парадоксов теории множеств. Таким образом, впервые была поставлена задача формализации классической математики с помощью уточнения понятия математического языка и логического вывода. Другая задача представляла собой радикально новое в то время предприятие – доказать непротиворечивость полученной всеобъемлющей теории. Отметим, что, как и в принципе дополнительности, только обе эти задачи совместно дают полную информацию об основаниях математики.

Каждая из задач, взятая в отдельности, недостаточна для решения проблемы обоснования математики, предложенной Гильбертом. Он первым понял, что только решение до конца первой задачи делает осмысленной постановку второй. Например, пересекаясь хотя бы частично с областью интуитивной математики, нельзя говорить об абсолютном доказательстве непротиворечивости всей математики. Гильберт предложил обосновывать математику на базе эпистемологически прочного фундамента финитизма, т. е. сознательно ограничил круг средств, которые он считал допустимыми и надежными. Идеальные объекты необходимы для эффективности нашего мышления, поэтому возникает необходимость хотя бы в принципе обосновать их устранимость из выводов реальных утверждений, даже невзирая на увеличивающуюся сложность получающихся преобразований. Примером идеальных элементов служат мнимые величины, используемые для придания простого вида теореме о существовании и числе корней уравнения. Введением идеальных элементов, а именно бесконечно удаленных точек и одной бесконечно удаленной прямой, можно добиться того, чтобы теорема о том, что две прямые, в том числе и параллельные, всегда пересекаются в одной и только одной точке, была справедлива во всех случаях. Реально устранять идеальные объекты никто и не собирався, но доказательство возможности такого устранения должно было удовлетворить и "классиков" и "интуиционистов", а также и представителей направлений других толков.

Такие средства Гильберт назвал "финитной установкой", имея в виду тот круг средств, которые он считает допустимыми и надежными, хотя никогда не описывал это ограничение в четкой форме. Хотя Гильберт не обозначил точно совокупность финитных рассуждений, он, по-видимому, надеялся на умение математиков непосредственно узнавать, финитно имеющееся рассуждение или нет. К финитным высказываниям, считал он, мы должны будем присоединить идеальные высказывания для того, чтобы сохранить простую форму законов обычной аристотелевской логики. Согласно программе обоснования Гильберта, математическое утверждение является осмысленным, т. е. реальным, высказыванием, если оно само или его отрицание могут быть установлены каким-нибудь финитным рассуждением. Даже Брауэр заявлял, что он не возражал бы против такого обоснования классической математики, лишь бы сами математики классического направле-

ния перестали говорить о реальном смысле, стоящем за идеальными объектами и утверждениями. Целью программы Гильберта было окончательное решение всех проблем в основаниях с помощью чисто математических средств. В действительности ее цель была скромнее, чем принято было считать, из-за неявного предположения о том, что "реальны" в основаниях лишь те задачи, которые связаны с доказательствами финитистских теорем. При этом, чтобы соответствовать своей философской установке, нельзя сужать класс финитных рассуждений, требуя от последних не только самоочевидности, но и других дополнительных свойств.

С точки зрения философии математики Гильберта важно понимание финитного рассуждения как любого совершенно несомненного рассуждения. Однако работы Герхарда Генцена показали, что, расширяя финитизм некоторыми принципами, принимаемыми математиками, можно показать непротиворечивость арифметики и анализа, обоснование которых на базе финитизма оказалось невыполнимым. Тем не менее Гильберт уловил самую суть проблемы, положив в основу своих попыток построения "абсолютных" доказательств непротиворечивости различие между формальным исчислением и его описанием. Он поставил общую философско-методологическую задачу развития специального метода, позволяющего проводить доказательства непротиворечивости с той же степенью убедительности, что и доказательства, использующие конечное число структурных свойств выражений в полностью формализованных исчислениях. Суть подхода Гильберта состояла в том, что классическую математику, использующую абстракцию актуальной бесконечности, нужно формализовать. С этой точки зрения позиция Гильберта – наиболее известная разновидность формализма, хотя, в отличие от мнения большинства, это не единственный его вид. Согласно его философии непротиворечивости и полноты системы, условие непротиворечивости математической теории поддается не только философской, но и арифметической трактовке. Но в этом содержится некоторая "порочная кругообразность": как можно пытаться доказать какие-либо методы рассуждения, пользуясь этими же методами?

Осознавая эту дилемму, Давид Гильберт надеялся, что доказательство полноты и непротиворечивости удастся найти с помощью финитных методов рассуждения, признаваемых большинством математиков. Именно эта математическая цель – доказательство правильности всех математических методов путем использования лишь нескольких из них – занимала умы многих великих математиков в первые тридцать лет XX ст. И только в 1931 г. Курт Гёдель опубликовал работу, подорвавшую основы программы Гильберта. Теоремы Гёделя о неполноте способствовали распространению мнения о том, что аксиоматический метод недостаточен для реконструкции содержательного математического мышления. Даже первой теоремы Гёделя о неполноте достаточно для того, чтобы исключить "окончательное решение" в подходе Гильберта. Для окончательности оно должно было бы предъявить метод, разрешающий любую финитистскую задачу, но это, как показал русский математик Ю.В. Матиясевич, не относится к диофантовым уравнениям. Отношение второй теоремы Гёделя о неполноте к программе Гильберта с методологической точки зрения более сложное. Во-первых, в реальной математической практике для любых формальных аксиом, действительно используемых математиками, всегда имеется некоторая абстрактная интерпретация, обеспечивающая их непротиворечивость. Во-вторых, вторая теорема Гёделя о неполноте опровергает широко распространенное в начале XX ст. убеждение, сформулированное Гильбертом, которое в каком-то смысле дополнительно к гипотезе об окончательном решении, а именно то, что теоретико-множественные и другие абстрактные понятия – это лишь способы выражения, а потому соответствующие трудности могут быть непосредственно устранены.

Пока математики не умели еще эффективно использовать теоретико-множественные методы, убеждение Гильберта согласовывалось с имеющимся "эмпирическим опытом". Такой подход никак нельзя было признать за обоснование для формальных систем, пытающихся доказать свою собственную непротиворечивость. Вторая теорема о неполноте указывает соответствующий класс контрпримеров. Математикам хорошо известен такой парадокс: если даже элиминировать, т. е. каким-то образом устранить или удалить абстрактные понятия из доказательств, то тогда обнаруживается некий "философский дефект" такой процедуры, а именно теряются дополнительные знания, содержащиеся в исходных предложениях. С точки зрения математической практики, если система непротиворечива, но не полна, то существует несоответствие между символами системы и их интерпретациями, а возможно, что система недостаточно мощна, чтобы оправдать данную интерпретацию. Говоря о программе Гильберта, следует иметь в виду, что она осмысленна только в ситуациях, когда его программа может быть проведена. Поэтому, используя терминологию Гильберта, математики и философы должны "верить" в его программу. Для работающих математиков Давид Гильберт до сих пор логичен, последователен и ясен, а аксиоматический метод и формализм являются существенной частью их правил мышления.

После того как выяснилось, что значительная часть математики может быть выражена на языке аксиом Цермело-Френкеля с добавлением аксиомы выбора, появилась вера в "теоретико-множественный платонизм", т. е. в существование мира реальных множеств. Вот что пишет по этому поводу один из создателей теории категорий Сандерс Мак-Лейн: "Мое мнение, однако, состоит в том, что идея реального мира множеств – это миф, хоть и удобный, но все же миф"⁵. Математикам хотелось бы считать, что математические понятия описывают некоторую реальность, придавая тем самым дедуктивным заключениям большую убедительность. Отдельные примеры множеств, например канторово множество, его плоский аналог – ковер Серпинского, их пространственный аналог – универсальная кривая Менгера и тому подобные хитроумные математические объекты, очень далеки от воображаемой реальности мира множеств Цермело-Френкеля. Однако, возвращаясь к проблеме гильбертова идеала чистоты метода, заметим, что если не ограничивать себя полными системами, то гёделевские результаты теряют всю свою философско-методологическую остроту.

¹ Перминов В. Я. Развитие представлений о надежности математического доказательства. М., 1986. С. 131.

² Фанг Дж. Между философией и математикой: их параллелизм в "параллаксе" // Вопросы истории естествознания и техники. 1992. № 2. С. 3–17.

³ Вейль Г. Давид Гильберт и его математические труды // Гильберт Д. Избранные труды: В 2 т. М., 1998. Т. 2. С. 506.

⁴ Гильберт Д. Избранные труды: В 2 т. Т. 1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. М., 1998. С. 450.

⁵ Мак-Лейн С. Математическая логика – ни основания, ни философия // Методологический анализ оснований математики. М., 1988. С. 151.

Поступила в редакцию 05.03.2003.

Валерий Александрович Еровенко – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей математики и информатики.

Наталья Викторовна Михайлова – ассистент кафедры математики Минского государственного высшего радиотехнического колледжа (МГВРК).

