

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
О.И. Чуприс
Регистрационный № УД- 5443 уч.



ТРИ КЛАССИЧЕСКИЕ ГЕОМЕТРИИ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

2018 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-31 03 01-2013, учебного плана специальности Математика (научно-производственная деятельность) № G31-140/уч. 30.05.2013.

СОСТАВИТЕЛЬ:

С.Г. КОНОНОВ, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики (протокол № 10 от 30.05.2018);

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 8 от 19.06.2018).

Зав.кафедрой геометрии, топологии
и методики преподавания математики
доцент



Д.Ф. Базылев



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

«Три классические геометрии» (цикл дисциплин специализации) читается студентам 4 года обучения механико-математического факультета специальности Математика (научно-производственная деятельность) в 7 семестре.

Главной **целью** дисциплины «Три классические геометрии» является изложение основных положений и сравнительный анализ трех наиболее известных в математике геометрий: евклидовой (параболической), сферической (эллиптической) и геометрии Лобачевского (гиперболической). Эти три геометрии имеют много общих свойств, основное отличие заключается в теории параллельности и свойствах, основанных на возможном взаимном расположении двух прямых на соответствующей плоскости. В обязательных дисциплинах аналитической геометрии и дифференциальной геометрии достаточно подробно изучается евклидова геометрия, тогда как две другие не входят в программы обязательных дисциплин. «Три классических геометрии» призвана восполнить этот пробел в геометрических знаниях студентов. В первую очередь предлагаемая дисциплина предназначена для студентов-математиков, обучающихся на научно-производственном направлении и специализирующихся по геометрии и топологии, также для студентов-математиков научно-педагогического направления. Студенты-математики четвертого курса, специализирующиеся по геометрии, разумеется, знакомы с элементами этих геометрий. В предлагаемой дисциплине дается достаточно полное изложение каждой из трех геометрий, включая разделы, не входящие в программы ранее пройденных обязательных геометрических дисциплин: «Аналитическая геометрия» и «Дифференциальная геометрия и топология», а также дисциплин специализации. Без основательного знания классических геометрий, их совпадений и отличий геометрическое образование является неполным.

Для достижения главной цели решаются следующие **задачи**:

- определяются параболическое, эллиптическое и гиперболическое пространства и основные связанные с ними понятия;
- излагаются важнейшие результаты, описывающие свойства фигур в каждом из этих пространств;
- проводится сравнительный анализ особенностей трех геометрий, их совпадения и различия между собой, проводится сравнение с евклидовой геометрией;
- разбираются типичные задачи и построения, помогающие более глубокому усвоению новых геометрий, предлагаются задачи и упражнения для самостоятельной работы.

В процессе изучения дисциплины с появлением новых геометрий учащиеся значительно расширяют свой математический кругозор, учатся доказывать теоремы и проводить вычисления, основываясь на неевклидовых метриках. При изложении дисциплины «Три классические геометрии» постоянно подчеркивается взгляд на ту или иную геометрию как на совокупность инвариантов соответствующей группы движений. В лекционном изложении и при

разборе задач необходимо использовать конструкции и результаты аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, а также таких дисциплин, как «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексных переменных».

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать:

- основные конструкции и результаты многомерной евклидовой геометрии;
- особенности сферической геометрии: расстояние между точками; связь между суммой углов сферического треугольника и его площадью; теоремы косинусов и синусов для сферического треугольника;
- понятие и различные модели проективного пространства;
- двойное отношение точек проективной прямой и его инвариантность относительно некоторых геометрических преобразований;
- три модели гиперболической плоскости; вид прямых и типы их взаимного расположения; различные формулы для вычисления гиперболического расстояния;
- основные факты элементарной гиперболической геометрии: соотношения между длинами сторон и величинами углов в гиперболическом треугольнике, формулы для вычисления площади треугольника, длины окружности и площади круга;
- сходство и различия трех классических геометрий: евклидовой, сферической и гиперболической;

уметь:

- вычислять простое и сложное отношение точек на аффинной и проективной прямой по заданным аффинным и однородным координатам точек;
- находить расстояние между точками гиперболической плоскости в ее различных моделях;
- определять взаимное расположение прямых на гиперболической плоскости; вычислять величину угла параллельности;
- проводить с помощью циркуля и линейки основные геометрические построения в различных моделях гиперболической плоскости: строить середину отрезка, делить угол пополам, опускать перпендикуляр из точки на прямую;

владеть:

- методом координат при решении основных задач проективной, сферической и гиперболической геометрий;
- понятиями и фактами алгебры, топологии, математического анализа, теории функций комплексного переменного при доказательстве основных результатов и решении задач проективной, сферической и гиперболической геометрий.

Преподавание дисциплины «Три классические геометрии» должно строиться таким образом, чтобы обучающийся приобретал следующие ком-

петенции специалиста (академические компетенции (АК), социально-личностные компетенции (СЛК), профессиональные компетенции (ПК)):

- специалист должен:
- - АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.
- - АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.
- - АК-3. Владеть исследовательскими навыками.
- - АК-4. Уметь работать самостоятельно.
- - АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).
- - АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.
- - АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.
- - АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.
- - АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.
- - СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.
- - СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.
- - СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.
- - СЛК-6. Уметь работать в команде.
- Специалист должен быть способен:
- - ПК-1. Разрабатывать практические рекомендации по использованию научных исследований, планировать и проводить экспериментальные исследования, исследовать патентоспособность и показатели технического уровня разработок программного обеспечения информационных систем.
- - ПК-2. Владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации. Применять современные методы проектирования информационных систем, использовать веб-сервисы, оформлять техническую документацию.
- - ПК-3. Применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой профессиональной деятельности.
- - ПК-4. Разрабатывать и тестировать информационные системы, осуществлять защиту приложений и данных.
- Научно-исследовательская деятельность
- - ПК-5, Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.
- - ПК-6. Использовать и развивать современные информационные технологии и средства автоматизации управленческой деятельности.
- - ПК-7. Проводить исследования в области эффективности решения производственных задач.
- - ПК-8. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой.
- - ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.

- Организационно-управленческая деятельность
- - ПК-13. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей
- - ПК-16. Готовить доклады, материалы к презентациям.
- Инновационная деятельность
- -ПК-22. Работать с научной, технической и патентной литературой
- - ПК-27. Реализовывать инновационные проекты в профессиональной деятельности.
-

Для изучения дисциплины отводится всего 128 часов, в том числе 72 аудиторных часа: лекции 72 часа. Текущая аттестация – зачет в 7 семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Геометрия многомерного евклидова точечного пространства

1.1. Евклидово векторное пространство

Скалярное произведение в вещественном векторном пространстве, понятие евклидова векторного пространства. Процесс ортогонализации, ортонормированные базисы. Длина вектора и величина угла между двумя ненулевыми векторами. Ортогональность векторов и подпространств, ортогональное дополнение подпространства. Матрица Грама системы векторов.

1.2. Евклидово точечное пространство

Понятие евклидова точечного пространства, ортонормированные реперы. Шары, сферы, параллелепипеды и симплексы в евклидовых точечных пространствах. Расстояние между точками, расстояние между фигурами. Вычисление расстояния и величины угла между двумя плоскостями. Объемы параллелепипедов, симплексов и шаров в евклидовых точечных пространствах.

1.3. Группа движений евклидова пространства и евклидова геометрия

Группа движений евклидова точечного пространства. Евклидово эквивалентные (равные) фигуры. Евклидова геометрия. Евклидова классификация квадриков в евклидовых точечных пространствах.

Раздел 2. Основные факты проективной геометрии

2.1. Первая модель проективной плоскости

Вещественная проективная плоскость как связка прямых в трехмерном евклидовом пространстве (первая модель). Однородные координаты на проективной плоскости. Прямые на проективной плоскости, их взаимное расположение и задание в однородных координатах. Фигуры второго порядка на вещественной проективной плоскости. Единство эллипса, гиперболы и параболы с точки зрения проективной геометрии.

2.2. Вторая модель проективной плоскости

Вещественная проективная плоскость как евклидова плоскость, пополненная несобственными точками (вторая модель). Связь между первой и второй моделями (евклидова карта проективной плоскости). Однородные и аффинные координаты точек проективной плоскости.

2.3. Группа проективных преобразований и проективная геометрия

Простое и двойное отношения точек прямой, их групповые свойства. Гармонические четверки точек. Проективное пространство как множество одномерных подпространств векторного пространства (третья модель). Проективные преобразования, их выражение в однородных координатах. Про-

ективная группа и проективная геометрия. Двойное отношение точек – основной инвариант проективной геометрии.

Раздел 3. Сферическая геометрия

3.1. Сферические прямые, двуугольники, треугольники

Большие окружности на сфере как кривые, минимизирующие расстояние между точками. Двуугольники на сфере и их площадь. Площадь сферического треугольника, ее связь с суммой углов.

3.2. Элементарная сферическая геометрия

Теорема Пифагора в сферической геометрии. Теоремы косинусов и синусов в сферической геометрии. Длина сферической окружности и площадь сферического круга.

3.3. Группа движений сферы и сферическая геометрия

Движения двумерной сферы, их разложение в композицию симметрий. Группа движений сферы и сферическая геометрия.

Раздел 4. Гиперболическая геометрия (геометрия Лобачевского)

4.1. Аксиоматика Гильберта. Модель Клейна гиперболической геометрии

Аксиоматика Гильберта евклидовой и гиперболической геометрии. Метрика на интервале и в круге на основе двойного отношения точек. Модель Клейна гиперболической плоскости (первая модель). Движения в гиперболической геометрии. Транзитивность группы движений при действии на гиперболической плоскости.

4.2. Инверсия и стереографическая проекция

Инверсия, ее координатное выражение и свойства. Инвариантность двойного отношения точек прямой или окружности при инверсиях. Стереографическое отображение как ограничение инверсии на сфере.

4.3. Модели Пуанкаре

Модель Пуанкаре гиперболической плоскости в круге (вторая модель). Переход от модели в круге к модели Пуанкаре в полуплоскости (третья модель). Вид прямых в третьей модели гиперболической плоскости, различные формулы для вычисления расстояния между точками. Теорема об описании движений гиперболической плоскости в третьей модели.

4.4. Параллельность в гиперболической геометрии. Сравнение трех классических геометрий

Понятие параллельных прямых на плоскости Лобачевского, формула для вычисления угла параллельности. Теорема Пифагора, теоремы косинусов и синусов в гиперболической геометрии. Плоскость Лобачевского как вещественное многообразие с римановой метрикой. Формула для вычисления длин кривых в третьей модели плоскости Лобачевского. Длина гиперболической окружности и площадь гиперболического круга. Три типа пучков прямых и их ортогональные траектории в различных

моделях плоскости Лобачевского. Взаимосвязь евклидовой, сферической и гиперболической геометрий.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Три классические геометрии

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Геометрия многомерного евклидова точечного пространства	10						
1.1	Евклидово векторное пространство	4						
1.2	Евклидово точечное пространство	4						Опрос
1.3	Группа движений евклидова пространства и евклидова геометрия	2						Проверка решений задач
2	Основные факты проективной геометрии	16						
2.1	Первая модель проективной плоскости	4						
2.2	Вторая модель проективной плоскости	4						Опрос
2.3	Группа проективных преобразований и проективная геометрия	8						Проверка решений задач
3	Сферическая геометрия	16						
3.1	Сферические прямые, двугульники, треугольники	4						
3.2	Элементарная сферическая геометрия	6						Опрос
3.3	Группа движений сферы и	6						Про-

	сферическая геометрия							верка инди- виду- аль- ных зада- ний
4	Гиперболическая геометрия (геометрия Лобачевского)	30						
4.1	Аксиоматика Гильберта. Модель Клейна гиперболической геометрии	6						Опрос
4.2	Инверсия и стереографическая проекция	6						Опрос
4.3	Модели Пуанкаре	6						Опрос
4.4	Параллельность в гиперболической геометрии. Сравнение трех классических геометрий	12						Про- верка инди- виду- аль- ных зада- ний
	Итого:	72						

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Литература:

1. Кононов С.Г. *Аналитическая геометрия*, учеб. пособие, – Минск.: БГУ, 2014. 238 с.
2. Прасолов В.В. *Геометрия Лобачевского* – М., МЦНМО, 2004, 88 с.
3. Берже М. *Геометрия*, т.2, – М., Мир, 1984, 368 с.
4. Клейн Ф. *Неевклидова геометрия*, – М. – Л.: ОНТИ, 1936, 358 с.
5. Ефимов Н.В. *Высшая геометрия*, учебное пособие, 5 изд. М. Наука, 1971, 576 с.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Контроль освоения практических навыков осуществляется в форме опроса, проверки решения задач. По итогам семестра проводится зачет.

МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ИТОГОВОЙ ОЦЕНКИ

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации (Постановление № 53 от 29.05.2012).
2. Положение о рейтинговой системе БГУ (ред.2015 г.).
3. Критерии оценки студентов (10 баллов).

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Дополнительные главы теории функций	Теории функций	нет	Вносить изменения не требуется. Протокол №10, 30.05.2018

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО
на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики (протокол № ____ от ____ 201_ г.)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, ученое звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

(ученая степень, ученое звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)

РЕЦЕНЗИЯ

учебной программы дисциплины «*Три классические геометрии*»
по специальности 1-31 03 01 «Математика»,
направление специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-
производственная деятельность)
(автор: Кононов С.Г.)

Целесообразность изучения дисциплины «*Три классические геометрии*» объясняется тем, программы существующих геометрических дисциплин «*Аналитическая геометрия*» и «*Дифференциальная геометрия и топология*» не охватывают многие важные разделы геометрии, в том числе такие классические, как «Проективная геометрия», «Сферическая геометрия» и «Гиперболическая геометрия». Именно этот материал представлен в содержании рецензируемой программы.

Программа по дисциплине «*Три классические геометрии*» составлена в соответствии с утвержденным порядком и включает следующие составляющие: пояснительную записку, краткое содержание, учебно-методическую карту дисциплины и информационно-методическую часть.

Согласно рецензируемой учебной программе, содержание дисциплины делится на четыре раздела: «Геометрия многомерного евклидова точечного пространства», «Основные факты проективной геометрии», «Сферическая геометрия» и «Гиперболическая геометрия (геометрия Лобачевского)». Наибольший объем занимает последний из них, что представляется обоснованным, поскольку некоторые понятия и факты из первых двух разделов знакомы студентам из школьной геометрии и курсов аналитической дифференциальной геометрий. Важное значение гиперболической геометрии объясняется тем, что ее открытие Н.И. Лобачевским было решающим моментом в понимании того, что помимо евклидовой могут существовать и другие геометрии. Развитие этой идеи привело к построению римановой геометрии и впоследствии геометрии теории относительности, которая в настоящее время описывает наиболее точно строение реального мира. Без знакомства с исторической и содержательной стороной гиперболической геометрии математическое университетское образование можно считать неполным. Этот пробел восполняется дисциплиной «*Три классические геометрии*».

Набор перечисленных тем и их содержание представляются обоснованными по объему и возможности усвоения учащимися. Сформулированные требования к знаниям и умениям студентов, полученным в результате изучения дисциплины, количество часов, отводимых на изучение дисциплины, и формы преподавания соответствуют образовательным стандартам и типовому учебному плану.

Рецензируемая программа может быть принята в качестве учебной программы дисциплины «*Три классические геометрии*» для студентов специальности 1- 31 03 01 «Математика» (научно-производственная деятельность).

Рецензент,
канд. физ-мат. наук, доцент

Матвеев Г.В.