МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования

ФЕДУКОВИЧ
Юлия Игоревна

ВНЕДРЕНИЕ ДИСТАНЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ЗАОЧНОЙ ШКОЛЕ ЮНОГО МАТЕМАТИКА ДЛЯ 8-10 КЛАССОВ

Дипломная работа

Научный руководитель:
доцент, кандидат физ.-мат. наук
Ю. В. Позняк

Допущена к защите
«___» ____________ 2018 г.
Зав. кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования
доцент, кандидат физ.-мат. Наук В. С. Романчик

Минск, 2018

Оглавление

РЕФЕРАТ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЫ

Объем дипломной работы составляет 44 страницы. Дипломная работа содержит 3 рисунка, 3 таблицы, 3 приложения и 36 использованных источников.

Ключевые слова: ЗАОЧНАЯ ШКОЛА ЮНОГО МАТЕМАТИКА, АНАЛИЗ ЗАОЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ШКОЛ, ИССЛЕДОВАНИЕ, ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАНЯТИЙ, УЧЕБНЫЕ ПРОГРАММЫ, ДИСТАНЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, MOODLE, GEOGEBRA.

Объект исследования дипломной работы: образовательный процесс Заочной школы юного математика.

Предмет исследования: теоретические и практические материалы, необходимые для составления занятий в Заочной школе юного математика с 8 по 10 класс.

Целью дипломной работы является организация занятий и внедрение дистанционных технологий в Заочную школу юного математика для 8-10 классов.

Методы исследования дипломной работы:

- исследование и сравнение заочных математических школ;
- анализ и составление учебных программ;
- изучение учебно-методической литературы;
- разработка учебных занятий;
- изучение перспективных идей;

Полученные результаты и их новизна: изучены русскоязычные заочные математические школы и их учебные программы для 8-10 классов; показана роль заочной школы юного математика в учебном процессе; разработаны учебные программы Заочной школы юного математика для 8-10 классов; составлены и внедрены в разделы курсов школы по 30 занятий в каждом классе; изложены перспективные идеи и планы дальнейшего развития Заочной школы юного математика.

Подтверждаю достоверность представленных материалов и результатов дипломной работы, а также самостоятельность ее выполнения.

РЭФЕРАТ ДЫПЛОМНАЙ РАБОТЫ

Аб'ём дыпломнай работы складае 44 старонкі. Дыпломная работа змяшчае 3 малюнка, 3 табліцы, 3 дадатку і 36 выкарыстаных крыніц.

Ключавыя словы: ЗАВОЧНАЯ ШКОЛА ЮНАГА МАТЭМАТЫКА, АНАЛІЗ ЗАВОЧНЫХ МАТЭМАТЫЧНЫХ ШКОЛ, ДАСЛЕДАВАННЕ, АРГАНІЗАЦЫЯ ЗАНЯТКАЎ, ВУЧЭБНЫЯ ПРАГРАМЫ, ДЫСТАНЦЫЙНЫЯ ТЭХНАЛОГІІ, MOODLE, GEOGEBRA.

Аб'ект даследавання дыпломнай работы: адукацыйны працэс завочнай школы юнага матэматыка.

Прадмет даследавання: тэарэтычныя і практычныя матэрыялы, неабходныя для распрацоўкі заняткаў у завочнай школе юнага матэматыка з 8 па 10 клас.

Мэтай дыпломнай працы з'яўляецца арганізацыя заняткаў і ўкараненне дыстанцыйных тэхналогій у завочную школу юнага матэматыка для 8-10 класаў.

Метады даследавання дыпломнай працы:

• даследаванне і параўнанне завочных матэматычных школ;
• аналіз і распрацоўка навучальных праграм;
• вывучэнне вучэбна-метадычнай літаратуры;
• распрацоўка навучальных заняткаў;
• вывучэнне перспектыўных ідэй;

Атрыманыя вынікі і іх навізна: вывучаны рускамоўныя завочныя матэматычныя школы і іх навучальныя праграмы для 8-10 класаў; паказана роля завочнай школы юнага матэматыка ў навучальным працэсе; распрацаваны навучальныя праграмы завочнай школы юнага матэматыка для 8-10 класаў; складзеныя і ўкаранёны ў раздзелы курсаў школы па 30 заняткаў у кожным класе; выкладзены перспектыўныя ідэі і планы далейшага развіцця завочнай школы юнага матэматыка.

Пацвярджаю дакладнасць прадстаўленых матэрыялаў і вынікаў дыпломнай працы, а таксама самастойнасць яе выканання.

DISSERTATION SUMMARY

The volume of the thesis is 44 pages. The thesis contains 3 figures, 3 tables, 3 annexes and 36 sources used.

Keywords: CORRESPONDENCE SCHOOL YOUNG MATHEMATICIAN, ANALYSIS ABSENTIA SCHOOL OF MATHEMATICS, RESEARCH, ORGANIZING CLASSES, TRAINING PROGRAMS, REMOTE TECHNOLOGY, MOODLE, GEOGEBRA.

The object of research of thesis work: the educational process of the correspondence school of a young mathematician.

The subject of the research: theoretical and practical materials necessary for the preparation of classes in the correspondence school of young mathematicians from the 8th to the 10th grade.

The purpose of the thesis is the organization of classes and the introduction of distance technologies in the correspondence school of young mathematicians for grades 8-10.

Research methods of thesis work:

• research and comparison of correspondence mathematical schools;
• analysis and preparation of training programs;
• study of educational and methodical literature;
• development of training sessions;
• study of promising ideas;

The obtained results and their novelty: Russian-language correspondence mathematical schools and their curricula for 8-10 classes are studied; the role of the correspondence school of a young mathematician in the teaching process is shown; The curricula of the correspondence school of young mathematicians for grades 8-10 are developed; compiled and introduced into sections of school courses for 30 lessons in each class; outlined promising ideas and plans for the further development of the correspondence school of a young mathematician.

I confirm the reliability of the submitted materials and the results of the thesis work, as well as the independence of its implementation.

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня век дистанционных технологий, которые открывают перед нами невероятные просторы для саморазвития, общения и улучшении качества жизни. Поэтому, в системе образования огромное значение приобретают информационные технологии, раскрывающие творческий потенциал и индивидуальность личности. Обучаясь по специальности научно-педагогическая деятельность, я проявила интерес к изучению и внедрению дистанционных технологий в образовательный процесс и получила возможность принять участие в интересном проекте, важность которого будет раскрыта далее.

С целью повышения качества образования школьников была создана дневная школа юного математика, которая функционирует на механико-математическом факультете БГУ уже много лет. Данная школа в большей степени ориентирована на подготовку учащихся к решению олимпиадных задач, т. е. на углубленный уровень. Были проведены исследования посещаемости и эффективности работы данной школы. Анализ показал, что количество участников за последние три года увеличилось в пять раз. Если тенденция сохранится, то возникнет проблема с нехваткой не только аудиторий, но и преподавателей. Поэтому, с целью предоставления возможности всем желающим посещать данную школу, было решено создать на базе LMS MOODLE заочную форму обучения.

На третьем курсе обучения, в рамках изучения предмета «Компьютерный дизайн математического контента», преподаватель Позняк Юрий Викторович познакомил меня с системой LMS MOODLE, увидел во мне потенциал и предложил применить полученные знания на практике. В этот момент я и познакомилась с Заочной школой юного математика (далее ЗШЮМ) и поняла, какую пользу я могу принести родному университету.

Вопросы, касающиеся внедрения дистанционных технологий в заочную школу юного математика, являются очень актуальными, так как данная школа организована в сетевом образовательном пространстве.

Объект исследования дипломной работы – образовательный процесс ЗШЮМ.

Предмет исследования – теоретические и практические материалы, необходимые для составления занятий в ЗШЮМ с 8 по 10 класс.

Целью дипломной работы является организация занятий и внедрение дистанционных технологий в ЗШЮМ для 8-10 классов.

Задачами дипломной работы в связи с указанной целью являются:

1. исследовать и проанализировать функционирование заочных математических школ в сетевом образовательном пространстве;
2. изучить учебные программы функционирующих заочных математических школ для 8-10 классов;
3. раскрыть роль заочной школы юного математика в учебно-образовательном процессе;
4. составить учебные программы для 8-10 классов;

5. разработать по каждому классу 30 учебных занятий и внедрить их в разделы курса;

6. раскрыть перспективные идеи и планы дальнейшего развития ЗШЮМ.

Гипотеза дипломный работы: достижение поставленной цели возможно при достаточном изучении и анализе учебно-методической литературы по математике, изучении функционирования и области применения системы MOODLE и при правильной организации образовательного процесса ЗШЮМ.

Методы исследования дипломной работы:

- исследование и сравнение заочных математических школ;
- анализ и составление учебных программ;
- изучение учебно-методической литературы;
- разработка учебных занятий;
- изучение перспективных идей;

Научная новизна и практическая значимость исследуемой проблемы очевидна. В настоящее время, данная заочная школа юного математика не имеет аналогов в образовательной среде. Благодаря созданию такого рода школы, намного большее количество учащихся сможет повысить свой уровень в математике и развиваться в данном направлении под руководством лучших преподавателей.

Структура дипломной работы обусловлена целью и задачами исследования. Работа состоит из введения, двух глав и заключения. Во введении раскрывается актуальность выбранной темы, объект и предмет исследования. Поставлена цель и задачи для ее достижения. В первой главе рассматриваются и сравниваются различные русскоязычные заочные математические школы и проводится анализ их учебных программ для 8-10 классов. Вторая глава посвящена раскрытию сущности функционирования ЗШЮМ и представлен дальнейший план развития данной школы. В заключении подводятся итоги исследования и формируются окончательные выводы по рассматриваемой теме.

ГЛАВА 1.
ИССЛЕДОВАНИЕ И АНАЛИЗ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЗАОЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ШКОЛ В СЕТЕВОМ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. Исследование русскоязычного виртуального образовательного пространства по выявлению заочных математических школ

Начиная какой-нибудь новый проект необходимо поставить цели, выяснить, каких результатов мы хотим достичь, какой смысл данного проекта. Используя данный подход, мы поставили перед собой цель: создать заочное отделение школы юного математика БГУ, благодаря которой все желающие смогут повысить свой уровень в математике, развить творческий потенциал и умственные способности. Что же касается понимания результатов и замысла данного проекта, то было решено, для начала, исследовать русскоязычное виртуальное образовательное пространство по выявлению заочных математических школ, выяснению их учебных программ и функционирования. А затем, на основании полученных исследований, наметить план по созданию ЗШЮМ.

Для анализа были выбраны четырнадцать заочных школ по математике, которые функционируют в Беларуси и России. В ниже приведенной таблице (Таблица 1.1) представлена ключевая информация этих школ, на основании которой мы будем делать сравнительный анализ.

Таблица 1.1

№ п/п	Страна, город	Название школы	Классы	Срок обучения	Стоимость обучения	Направление деятельности	Веб-сайт
1.	Беларусь, г. Минск	Заочный факультатив по математике “Решение нестандартных задач” при ФПМИ БГУ	5-11	Каждый класс – это один учебный год	Платное	Углубленное изучение математики и информатики, приобретение навыков в решении тестов централизованного тестирования	http://www.school.bsu.by/
2.	Беларусь, г. Минск	Заочная школа математики Физического факультета БГУ	Старшие классы	Не установлен	Бесплатное	Подготовка к сдаче централизованного тестирования	http://www.physics.bsu.by/ru/entrants/schools/mathematics
3.	Беларусь, г. Минск	Республиканская заочная школа общественного объединения «Белорусская ассоциация «Конкурс»»	10 и 11	2 года	Бесплатное	Изучение предметов программы учреждений общего среднего образования на повышенном уровне, подготовка к поступлению в учреждения высшего образования и к участию в олимпиадах различного уровня	https://www.bakonkurs.by/z_sch.php

4.	Россия, г. Москва	Всесоюзная Заочная Математическая школа МГУ	5-11	Каждый класс – это один учебный год	Платное	Расширение школьных знаний и подготовка к экзаменам и олимпиадам	http://math-vzms.org/
5.	Россия, г. Нижний Новгород.	Заочная школа по математике для 7-9 классов	7-9	3 года	Бесплатное	Решение задач школьного и повышенного уровня. Подготовка к олимпиадам	http://www.itmm.unn.ru/postuplenie/zaochnaya-shkola-po-matematike-dlya-7-8-9-klassov/
6.	Беларусь, Минская область, Мядельский район, поселок Зубреневка	Очно-заочная школа Национального детского образовательно-оздоровительного центра "Зубренок"	8-10	3 года	Платное	Систематизация и расширение знаний обучающихся по математике, физике, информатике, знакомство с решением нестандартных задач, рассмотрение методов их решения, знакомство со структурой и принципами организации глобальной сети Интернет.	http://zubronok.by/obrazovanie/shkola_ncc/ochno-zaochnaja
7.	Россия, г. Москва	Заочная школа Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»	6-11	Каждый класс – это один учебный год	Платное	Дистанционные курсы для школьников 6-11 классов по математике, физике, химии, русскому языку	http://www.mifi.ru/
8.	Россия, г. Пермь	Краевая заочная школа при Государственном учреждении дополнительного образования «Пермский краевой центр «Муравейник»	5-11	2 года	Бесплатное	Систематизация, обобщение и углубление учебного материала, изученного на уроках математики; ознакомление с эвристическими приемами поиска решения стандартных и нестандартных задач	http://muraveynik-perm.wixsite.com/muraveynik-perm/about_us
9.	Россия, г. Москва	Заочный кружок онлайн-школы олимпиадной математики Школы Мастеров	1-7	Не установлено	Платное	Решение задач школьного и повышенного уровня. Подготовка к олимпиадам	http://schoolmasters.ru/zaochnoe-obuchenie/
10.	Россия, г. Новосибирск	Заочная школа Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета	5-11	Каждый класс – это один учебный год	Платное	Углубление школьных знаний. Подготовка к сдаче ЕГЭ	http://sesc.nsu.ru/zfmsh/
11.	Россия, г. Санкт-Петербург	Заочная математическая школа Государственного бюджетного учреждения дополнительного образования «Ленинградский областной центр развития творчества одаренных детей и юношества «Интеллект»	8-11	От 1 до 4 лет	Платное и бесплатное	Углубленное обучение по математике, биологии и химии для школьников 8,9,10,11 классов Ленинградской области и других регионов России	https://center-intellect.ru/zmsh/

12.	Россия, г. Тюмень	Заочная учебно-научная школа Тюменского государственного университета	8-11	Не установлено	Бесплатное	Углубление и систематизация школьных знаний учащихся, а также способствование их профессиональному самоопределению	http://kd.utmn.ru/
13.	Россия, Республика Башкортостан	Заочная математическая школа для обучающихся в 9 - 11 классах Башкирского государственного университета	9-11	Каждый класс – это один учебный год	Бесплатное	Выявление разносторонне-интеллектуально-одаренных и способных к математике учеников; привлечение обучающихся к научно-исследовательской деятельности	http://www.bashedu.ru/novosti-fakulteta-matematiki-i-informatsionnykh-tekhnologii/zaochnaya-matematicheskaya-shkola-dlya-o
14.	Россия, г. Долгопрудный, Московская область	Заочная физико-техническая школа МФТИ	8-11	Каждый класс – это один учебный год	Бесплатное	Выявление школьников, имеющих склонности и способности к физике и математике и желающих совершенствовать свои знания по этим предметам, оказание им квалифицированной помощи в расширении, систематизации и обобщении знаний по физике и математике	http://www.school.mipt.ru

Начнем анализ с функционирования данных школ. У них технология проведения занятий похожа друг на друга: задания высылаются по адресу учащихся заказными письмами (или учащиеся сами скачивают их с сайта школы). Решенные задания отсылаются по электронной почте на проверку, а затем возвращаются обратно с результатами и верными решениями. На сайте школы у каждого учащегося есть свой личный кабинет, через который осуществляется доступ к нужным теоретическим материалам. Если же у учащихся нет возможности выйти в интернет, то материалы к занятиям высылаются также обычной почтой.

Что же касается поступления, то в некоторых заочных школах необходимо лишь заполнить заявление на обучение на сайте школы или прислать его по электронной почте, в других – выполнить вступительную работу, результаты которой повлияют на решение о принятии в данную школу. Такая практика существует во Всесоюзной заочной математической школе [28], в Заочной школе СУНЦ Новосибирского государственного университета [29], в учреждении дополнительного образования «Интеллект» [27] и других. А для того, чтобы в начале учебного года поступить в заочную школу «Белорусской ассоциации «Конкурс»» учащимся, закончившим 9 класс, нужно проявить себя в конкурсах «Кенгуру», «Зубрёнок», «Белка» и «Синица». Но, все-таки, в большей части школ, а конкретно в девяти из рассматриваемых четырнадцати, практикуется поступление без выполнения вступительной работы, то есть, по заявлению обучающегося (иногда родителей или преподавателя по математике). Данный факт позволяет намного большему количеству учащихся обучаться в заочных математических школах, развивать свои способности, независимо от начального уровня знаний. Но также, на мой взгляд, правильно, что некоторые школы рассчитаны только лишь на одаренных детей, которые заинтересованы математикой и собираются связать свою жизнь с научно-исследовательской деятельностью. Их программа не содержит базовый материал по математике, а направлена конкретно на решение олимпиадных, нестандартных и прикладных задач.

Примерно половина из рассматриваемых заочных школ берет оплату за обучение. Это зависит, в первую очередь, от политики школы, уровня обучения (например, это поддержка школьного образования, или же профильный уровень). Интересной и необычной платной школой является Очно-заочная школа Национального детского образовательно-оздоровительного центра "Зубренок" [32]. Обучаться в этой школе предусмотрено 3 года. Исходя из названия данной школы, здесь практикуются и очные и заочные сессии. Очные проходят во время осенних, зимних и весенних каникул, а заочные реализованы через дистанционные технологии.

В некоторых заочных школах практикуются две формы обучения – это индивидуальная и групповая. Групповая — это когда учителем составлена группа учащихся или организован математический кружок, где совместно под его руководством изучается предложенный учебный материал и выполняется одно на всех задание. Такие групповые формы обучения есть, например, в Заочной математической школе «Ленинградский областной центр развития творчества одаренных детей и юношества «Интеллект» [27] и в Краевой заочной школе при Государственном учреждении дополнительного образования «Пермский краевой центр «Муравейник» [25]. Для того, чтобы быть зачисленным в группу в школе «Интеллект» не нужно выполнять вступительную работу, а лишь нужно предоставить заявление учителя с подписью и печатью директора школы. Что касается индивидуальной формы обучения, то в каждой школе она однозначно присутствует. Учащиеся в индивидуальном порядке получают материалы занятий, сами прорабатывают и изучают теорию, решают предложенные контрольные задания и присылают их в заочную школу в установленные сроки. Такая форма обучения является базовой, например, в Краевой заочной школе «Пермский краевой центр «Муравейник». Здесь с каждым новым заданием учащимся присылают отзывы на предыдущие их выполненные работы. В данных отзывах указываются верные ответы, и приводятся решения заданий, которые ученик выполнил неверно или вовсе не выполнил. Также оценивается и комментируется грамотность изложения доказательств и решений контрольных работ. Также в этой заочной школе безусловно есть и групповая форма обучения, при которой набираются группы учащихся школ, учреждений дополнительного и профессионального образования. За каждой группой закрепляется свой преподаватель (куратор), который контролирует учебный процесс и решает организационные моменты при обучении.

Еще одной отличительной особенностью анализируемых учебных заведений является то, что учащиеся некоторых заочных школ при высших учебных заведениях получают приоритет при поступлении в этот ВУЗ или им дается сертификат с дополнительными баллами к Централизованному тестированию или к ЕГЭ по изучаемому предмету. Данная практика существует в Заочной учебно-научной школе Тюменского государственного университета [33]. При успешном окончании данной школы учащимся выдается свидетельство на получение до 10 дополнительных баллов к ЕГЭ по профильному предмету. И еще, самым лучшим ученикам предоставляется возможность поступить в другие (не только математические) научно-учебные школы Тюменского государственного университета, такие как Квадрат Декарта, Гуманитариус, Рацио, Квинтэссенция и Идефикс. На мой взгляд, это отличная мотивация для учащихся данной школы, которые заинтересованы в поступлении в ТюмГУ. Данную идею также реализует и Башкирский государственный университет в своей заочной математической школе [34]. Учащиеся, которые прошли все этапы обучения и отлично себя проявили при выполнении последней контрольной работы, которая является одновременно и заочной математической олимпиадой школы, получают также дополнительные баллы по математике для поступления в Башкирский государственный университет. Подобная мотивация является одним из интересных моментов, которые в будущем планируется и нами взять на вооружение.

Исследуя различные математические школы, мы стараемся почерпнуть лучшие идеи и технологии, для того, чтобы усовершенствовать ЗШЮМ и дать возможность нашим учащимся быть лучшими.

1.2. Анализ учебных программ функционирующих заочных математических школ для 8-10 классов

Остановимся более подробно на содержании учебных программ рассматриваемых заочных математических школ. Не на всех сайтах школ размещена данная информация. Поэтому для анализа подходящими являются четыре школы под номером 2, 4, 10 и 14 из Таблицы 1.1. Нас интересуют программы для 8-10 классов, которые рассмотрим подробно ниже.

I. Заочная школа математики Физического факультета БГУ.

Здесь уделяется особое внимание подготовке к централизованному тестированию по математике.

Ниже приведён список тем для изучения в школе по математике и график их повторения [30].

1. Медиана треугольника.
2. Биссектриса, высота треугольника.
3. Рациональные уравнения.
4. Уравнения и неравенства с модулем.
5. Иррациональные уравнения.
6. Рациональные и иррациональные системы уравнений.

7. Иррациональные неравенства.
8. Логарифмические и показательные уравнения и системы уравнений.
9. Логарифмические неравенства.
10. Уравнения в целых числах. Функциональные методы решения уравнений и неравенств. Уравнения и неравенства с двумя неизвестными.
11. Тригонометрия. Тождественные преобразования.
12. Четырехугольники. Трапеции.
13. Окружность.
14. Фигура простая и не простая.
15. Примеры, связанные с отбором корней тригонометрических уравнений.
16. Текстовые задачи.

Данная программа предназначена для старших классов. Положительным аспектом анализируемой программы является то, что она позволит повторить и закрепить школьный материал по математике, систематизировать знания, выявить пробелы с целью последующей их коррекции, а также поможет в подготовке к поступлению на любой из естественных факультетов.

Что касается содержимого уроков, то каждое занятие состоит из примеров с подробным решением и заданий для самостоятельной работы с краткими указаниями или ответами. В некоторых уроках содержится и немного теоретического материала. Пример одного из занятий размещен в приложении (Приложение А). Данная модель построения занятий стандартна и наиболее распространена. Но минусом данной программы я считаю то, что здесь нет занятий по стереометрии, которые бы максимально расширяли пространственное воображение учащихся и осуществляли поддержку школьного образования.

II. Всесоюзная Заочная Математическая школа МГУ.

Обучение в данной школе осуществляется с 6 по 11 класс и состоит из пяти курсов, начиная с нулевого. Нас конкретно интересуют 8-10 классы [28].

2 курс (8 класс)

1. Координаты на прямой, плоскости и в пространстве.
2. Модуль числа. Расстояния между точками.
3. Множества точек на плоскости. Расстояния между точками на плоскости. Задание фигур.
4. Прямая на плоскости.
5. Комбинаторика.
6. Делимость и остатки. Простые и взаимно простые числа. Основная теорема арифметики.
7. Планиметрия.

3 курс (9 класс)

1. Многочлены. Теорема Безу. Разложение многочленов на множители. Деление многочленов. Решение целых уравнений.
2. Системы линейных уравнений.

3. Текстовые задачи.
4. Функции и графики.
5. Треугольник и окружность. Теоремы синусов и косинусов. Замечательные линии в треугольниках.
6. Площади многоугольников.
7. Вероятность.
8. Подготовка к ГИА.

4 курс (10 класс)

1. Последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
2. Тригонометрия.
3. Задачи на составление уравнений.
4. Прямые и кривые.
5. Уравнения. Системы уравнений.
6. Неравенства. Системы неравенств.
7. Задачи по планиметрии.

У каждого курса (класса) есть свой куратор, который занимается составлением точного порядка изучаемых тем и организацией обучения в данной школе. Кроме заданий для самостоятельного решения, у учащихся есть доступ к дополнительной учебной литературе, которую можно скачать с личного кабинета на сайте. Вся методическая база полностью составлена преподавателями школы, она позволяет глубже осваивать различные темы по математике и расширять кругозор учащихся. Здесь, в отличие от предыдущей учебной программы, темы разделены по классам и темы уроков переплетаются с тематикой школьной программы.

Учебные пособия присылаются учащимся школы в самом начале обучения. Они содержат теоретический материал по темам программы ВЗМШ, также задачи с подробными решениями и предлагается много задач для самостоятельного решения. В зависимости от курса, учащиеся получают определенное количество заданий. Их присылают дважды – в начале учебного года и после нового года. На начальных этапах это 9 заданий, а далее – 12 заданий, которые состоят из задач обязательных к выполнению и тех, которые можно выполнять по желанию. Чтобы быть переведенным на следующий курс, необходимо выполнить верно все обязательные задания. Также, вместе с заданиями высылается учащимся и подробная программа обучения на курсе. В ней содержаться нужные указания о том, с каких тем лучше начать изучение материала, на что обратить большее внимание; даны советы по тому, как лучше и проще можно усваивать предложенный учебный материал. Учащимся также высылаются критерии оценивания и правила оформления их работ, чтобы они могли сразу понимать, на что сделать больший акцент, какие к ним предъявляются требования.

Что же касается самого содержания программы данной школы, то могу отметить, что в она очень логично и последовательно составлена. Чередуются занятия по алгебре и геометрии. В девятом классе вводиться понятие о теории вероятности. Этот факт ярко демонстрирует пропедевтический характер программы. А в десятом классе я бы все-таки добавила больше элементов стереометрии, чем планиметрии.

III.Заочная школа Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета.

Рассмотрим учебную программу данной школы для 8-10 классов [29].

Таблица 1.2

Класс	Тема	Содержание темы
8 класс	1. Теорема Пифагора	Корень квадратный. Признак прямоугольного треугольника. Прямоугольная система координат. Расстояние между точками
	2. Квадратный трехчлен	Квадратичная функция. Ее график и свойства
	3. Многочлены	Способы разложения многочленов на множители. Многочлен n-ой степени и его корни. Теорема Безу. Применение разложения на множители
	4. Трапеция	Определения и свойства. Дополнительные построения при решении задач
	5. Текстовые задачи	Арифметический и алгебраический способы решения задач
9 класс	1. Задачи на отношения	Отношения отрезков на прямой. Отношение отрезков на плоскости. Отношение площадей
	2. Векторы	Сложение векторов и умножение вектора на число. Разложение вектора по неколлинеарным направлениям. Скалярное произведение векторов. Параллельный перенос в задачах по геометрии
	3. Элементы теории чисел	Свойства делимости. Теорема о делении с остатком. Разложение на множители в задачах на делимость. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Последние цифры числа. Диофантовы уравнения
	4. Задачи с окружностями	Касательные к окружностям. Касающиеся окружности. Измерение углов дугами окружности. Вписанные четырехугольники.

		Свойства отрезков хорд, секущих и касательных
	5. Геометрические места точек	Задачи на построение
10 класс	1. Площади многоугольников	Использование аддитивности площади. Использование формул площади. Применение сравнения площадей при решении планиметрических задач. Использование свойств замечательных линий в треугольнике и других теорем
	2. Метод математической индукции и бесконечные числовые последовательности	Метод математической индукции. Бесконечные числовые последовательности
	3. Параллельное проектирование	Проектирование плоской фигуры на плоскость. Изображение пространственных фигур
	4. Пределы последовательностей	Сходимость последовательности к нулю. Свойства бесконечно малых. Предел последовательности
	5. Исследование функций	Теорема Лагранжа о среднем. Основные этапы исследования функций. Построение графиков функции

Данная программа уже содержит меньше тем, чем предыдущая. Но в ней имеются темы, которые не изучаются в школьном курсе математики. Здесь присутствуют элементы теории множеств и рассматривается метод математической индукции. Интересным для учащихся и очень полезным так же является тема «Параллельное проектирование», благодаря которой расширяется пространственное воображение. Так же идет более глубокое знакомство с векторами и их применением в решении задач по геометрии.

Рассмотрим характер и структуру занятий. Во время обучения в этой заочной школе каждый учащийся должен решить пять заданий. Здесь уже нет разграничения, как в прошлой программе, на обязательные и дополнительные. Тем, кто выполнил все необходимые задания программы, присылается в конце учебного года переводное задание, которое содержит в себе задачи по всем темам учебного года. При успешном выполнении этой работы, учащегося переводят на следующий год обучения в данной школе. Это условие является обязательным для каждого.

Как и во всех анализируемых заочных школах, задания и их содержание тесно связаны со школьной программой. То есть, новый материал вводиться, опираясь на опыт и знания школьников. Сначала приводиться необходимая теоретическая составляющая задания. А после разбираются типовые задачи, на основании которых уже вводятся и более сложные задачи. Таким образом, при составлении программы учтены одни из важнейших принципов дидактики: доступность, систематичность и последовательность. Пример заданий для 5-11 классов размещен в приложении (Приложение Б).

IV. *Заочная физико-техническая школа Московского физико-технического института.*

Программы по математике представлены в таблице 1.3 [35].

Таблица 1.3

Класс	Тема	Содержание темы
8 класс	1. Тождественные преобразования. Решение уравнений	Тождественные преобразования. Одночлены и многочлены. Разложение многочленов на множители. Уравнения с одной переменной. Определение модуля числа. Решение уравнений с модулем
	2. Геометрия (часть I)	Из истории геометрии. Простые геометрические фигуры. Три признака равенства треугольников. Равнобедренный треугольник. Параллельные прямые. Занимательные задачи по геометрии
	3. Системы уравнений	Уравнения с двумя переменными. График уравнения. Системы уравнений. Решение задач с помощью уравнений и систем уравнений. Уравнения с параметрами. Построение графиков функций
	4. Квадратные корни	Арифметический квадратный корень. Свойства арифметического квадратного корня и их применение. Функция $y = \sqrt{x}$ и её график
	5. Квадратные уравнения	Квадратное уравнение и его корни. Формула корней квадратного уравнения. Решение задач с помощью квадратных уравнений. Теорема Виета. Решение уравнений с параметром
	6. Геометрия (часть II)	Геометрическое место точек. Задачи на построение.

		Геометрические места точек на плоскости. Простейшие задачи на построение треугольников
9 класс	1. Планиметрия (часть I)	Прямоугольный треугольник. Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников. Свойства медиан, биссектрис, высот треугольника. Трапеция. Свойства трапеции
	2. Квадратные уравнения. Многочлены	Квадратные уравнения. Уравнения, сводящиеся к квадратным (биквадратные, возвратные и др.); выделение полного квадрата; теорема Виета. Многочлены. Деление с остатком. Теорема Безу. Уравнения высших степеней
	3. Уравнения и неравенства с модулем. Графики функций	Уравнения с модулем. Рациональные неравенства (метод интервалов). Неравенства с модулем. График квадратичной функции. График $y = a\|x + b\| + c$ и другие графики с модулем. График $y = \frac{ax+b}{cx+d}$
	4. Системы уравнений. Иррациональные уравнения	Системы линейных уравнений. Системы, сводящиеся к решению однородного уравнения. Симметрические системы. Прочие нелинейные системы. Иррациональные уравнения. Текстовые задачи
	5. Планиметрия (часть II)	Свойства касательных, хорд и секущих. Вписанные и описанные треугольники и четырехугольники. Задачи на построение с помощью циркуля и линейки. Площадь треугольника. Площадь четырехугольника
	6. Элементы теории множеств. Элементы логики	Множества. Конечные и бесконечные множества. Операции над множествами. Мощность множеств. Счётные и несчётные множества. Элементы логики. Высказывания, операции над высказываниями. Метод математической индукции. Обратные и противоположные теоремы. Необходимые и достаточные условия

	7. Элементы комбинаторики. Понятие о вероятности случайного события	Примеры простейших комбинаторных задач. Понятие выборки. Размещения, перестановки, сочетания. Свойства чисел. Бином Ньютона. Случайные события и их вероятности
10 класс	1. Алгебраические уравнения и неравенства	Понятие равносильности неравенств. Рациональные неравенства. Метод интервалов. Иррациональные неравенства. Неравенства с модулем. Неравенства с параметрами. Условия равносильности, дающие возможность решать неравенства с модулем, не раскрывая модуль
	2. Графики и множества на плоскости	Графики функций и их построение. Построение множеств точек на плоскости. Преобразование графиков. График дробно-линейной функции. Графики функций с модулями. Графики в задачах с параметрами.
	3. Планиметрия (часть III)	Площадь многоугольника. Различные формулы площади и их применение. Теоремы синусов и косинусов. Гомотетия
	4. Последовательности. Пределы. Производная	Бесконечные последовательности. Формула общего члена. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Решение некоторых рекуррентных соотношений. Предел последовательности. Вычисление пределов функций. Асимптоты. Непрерывность в точке. Экстремум функции. Построение эскизов графиков функций. Производная
	5. Тригонометрические функции и уравнения. Решение задач с использованием производной	Определение функции. Числовые функции и их графики. Чётные и нечётные функции. Периодические функции. Тригонометрические функции и обратные тригонометрические функции. Решение тригонометрических уравнений. Производная тригонометрических функций
	6. Стереометрия (часть I)	Прямые и плоскости в пространстве. Параллельность и перпендикулярность

		прямых и плоскостей. Параллельное и центральное проектирование. Сечения многогранников. Построение сечений методом «следов». Построение сечений методом проектирования
	7. Комплексные числа	Определение комплексных чисел. Арифметические действия над комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексных чисел, комплексная плоскость. Тригонометрическая форма записи комплексного числа; умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Возведение в степень и извлечение корня. Комплексные числа и многочлены. Алгебраические уравнения.

Функционирование этой заочной школы подобно предыдущим: ученикам присылают материалы заданий, в которых содержится теоретический материал по программе, разбираются задачи (типовые и нестандартные), и предлагается выполнить контрольные работы, которые необходимо отослать с решением обратно в школу для проверки и получения рецензии.

Как и во всех анализируемых учебных программах, здесь подбор и распределение тем очень логичные и интересные для учащихся.

Это, пожалуй, самая «насыщенная» и вариативная программа из представленных. Весь материал представлен последовательно, опираясь на школьный курс. В отличие от предыдущих программ, здесь изучается математическая логика и комбинаторика, а также вводиться понятие о комплексных числах. Данные темы очень хорошо расширяют кругозор учащихся, развивают их абстрактно-логическое мышление и повышают интерес к изучению математики. Еще одним плюсом я могу считать тот факт, что полная программа обучения рассчитана на 4 года (8-11 классы), но поступать можно в любой из классов с 8-го по 11-й. Эта идея намного расширяет границы образования и дает возможность, не зависимо от возраста и класса, постигать такую великую науку, как математика.

Как видно из всех вышеуказанных учебных программ, то все они разнообразны, доступны и предоставляют возможность получить практически всем желающим дополнительное математическое образование. Программы реализуется в течение нескольких лет, в зависимости от начального уровня знаний учащихся. Очень хорошо реализован многоуровневый подход в обучении, т.е. в каждом предложенном задании есть задачи, которые полегче, и те, которые повышенного уровня. Есть заочные школы, которые направлены просто на поддержку школьного образования, помогают глубже разобраться в материале и закрепить его на практике. Данная идея существует примерно в половине из рассматриваемых нами школ. А остальные школы делают упор на развитие творческого потенциала, нестандартного мышления и на решение задач олимпиадного уровня.

Сделаем вывод: в каждой школе свое виденье учебной программы. Каждая школа преследует свою цель в обучении школьников, для достижения которой подбираются самые разнообразные образовательные методы и средства, варьируется наполняемость курса математики и все больше уделяется внимание мотивации учащихся.

Все это было учтено нами при составлении учебных программ для Заочной школы юного математика, которые будут представлены во второй главе моей дипломной работы.

ГЛАВА 2.
ОРГАНИЗАЦИОННОЕ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ ЗАОЧНОЙ ШКОЛЫ ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

2.1. Роль ЗШЮМ в учебно-образовательном процессе школьников

Создание Заочной школы юного математика на механико-математическом факультете БГУ обусловлено прежде всего увеличением количества желающих повысить свой уровень в математике и реализовать себя в естественно-научном направлении. В сентябре 2011 года был подписан приказ о создании на механико-математическом факультете БГУ Школы юного математика (приказ 356ОД от 05.09.2011 г.). Приведу некоторые статистические данные по количеству групп по каждому учебному году и по количеству учеников школы юного математика (Рисунок 1). Эти данные на начало каждого учебного года и являются приблизительными, так как в течении обучения постоянно менялся состав каждой группы (кого-то отчисляли из-за прогулов или неуспеваемости, кто-то переводился в другие группы и т.д.).

Рисунок 1. Статистика количества учащихся Школы юного математика

Как мы видим из диаграммы, то в начале создания дневной школы юного математика, количество учащихся было менее ста человек, а сейчас это число увеличилось примерно в пять раз. Также в 2011 году было всего пять классов, а на сегодняшний день их пятнадцать. К тому же, кроме основного списка учащихся групп школы, имеется и «лист ожидания», в котором уже в этом году находится 191 человек (информация на 28 августа 2017 г.). То есть, школьники хотят учиться в нашей школе, но не имеют возможности из-за ограниченного числа мест в группах. И с каждым годом желающих все больше и больше. Соответственно, возник вопрос, где же взять такое количество преподавателей, чтобы дать возможность всем заниматься в школе юного математика. К тому же, стало не хватать свободных аудиторий в главном корпусе БГУ, и это при том, что занятия проводятся только по субботам. В результате получились группы учащихся, в которых более 25 человек. Многие родители звонят декану нашего факультета с просьбой принять их ребенка в школу юного математика, но получают отказ, так как нет свободных мест.

Проанализировав всю сложившуюся ситуацию, было решено создать на базе системы LMS MOODLE заочную форму школы юного математика. Такая форма обучения требует от учащихся умения работать самостоятельно с учебным материалом по программе, предусматривает более ответственное отношение к выполнению заданий и их оформлению, развивает культуру речи и мышления учащихся. При заочной форме так же очень важно хорошо замотивировать каждого учащегося, так как они не встречаются лицом к лицу со своими преподавателями, не слышат похвалы от них лично и выполняют все задания только для своего развития и самореализации в выбранном направлении. Идеи мотивации нами изучаются и до сих пор. Их мы представим в последнем пункте этой главы.

Говоря о роли заочной школы юного математика, стоит сказать о том, что для многих учащихся, которые по многим причинам не могут посещать дневную школу (например, учащихся сельских школ, иногородних, учащихся с физиологическими особенностями и др.), есть отличная возможность получить математические знания, не выходя из дома. Главное требование для обучения в заочной школе – это наличие интернет соединения дома, возможность заходить в личный кабинет и в разделы курсов школы. Этот факт свидетельствует о большей гибкости и доступности обучения.

В настоящее время все большую ценность приобретают профильные классы и различные дополнительные курсы по отдельным предметам. Они помогают максимально учитывать склонности и способности учащихся к тому или иному предмету. Помогают в самоопределении и выборе будущей профессии. Заочная школа юного математика – это своего рода профильные курсы по математике, которые помогают учащимся реализовать свой творческий и интеллектуальный потенциал, посредством освоения различных математических методов обучения и решения нестандартных и олимпиадных задач по математике. К тому же, дополнительное математическое образование – это залог профессионального роста и развития школьников.

Общая идея создания школы юного математика: показать школьникам, что математика очень интересная наука, научить их не бояться высказываться, придумывать новые способы решения задач, дать возможность получить удовольствие от процесса поиска ответа.

2.2. Разработка учебных программ для 8-10 классов

Следующим этапом в создании заочной формы школы юного математика является составление учебных программ по каждому классу. Этот вопрос, на мой взгляд, является самым трудоемким. Важно не только учитывать возрастные, умственные и индивидуальные особенности учащихся, но и выстраивать последовательность тем, придерживаясь школьных учебных программ. Кроме того, это огромная методическая работа, опыта в которой у меня пока не очень много. Но под четким руководством моего научного руководителя и, прибегая к консультации методистов БГУ, мы добились желаемых результатов. Следует так же понимать, что данные программы еще не опробованы в действии, не понятно пока, насколько они эффективны, и в любом случае будут в ближайшие годы редактироваться.

Возникает вопрос: а почему мы не использовали уже готовые программы дневной школы юного математика и не внедрили их в заочную школу? Ведь за столько лет функционирования можно было бы разработать, опираясь на опыт и полученные результаты, создать свою уникальную образовательную программу. Но здесь все не так уж просто. Когда возникла необходимость выяснить, по каким программам работают преподаватели данной школы, то я с удивлением узнала, что ни у кого нет единой программы, на которую я могла бы ориентироваться. Каждый преподаватель составлял в начале учебного года свою собственную программу, исходя из уровня знаний учащихся и других особенностей. Не каждый подходил к этому делу ответственно. Мне пришлось пообщаться со многими студентами, ведущими занятия в дневной школе. И оказалось, что если это старшие классы, то в большей степени для этих учащихся осуществляется подготовка к Централизованному тестированию. Разбирается на углубленном уровне не достаточное количество тем. Не всегда хватает времени на изучение запланированного материала. Вот, кстати, еще один плюс заочной формы обучения: учащиеся сами решают, сколько им времени потратить на обучение, насколько быстро нужно решать задания и могут возвращаться к теоретическому материалу и примерам сколько угодно раз, ведь у каждого свой темп изучения нового материала. Но давайте вернемся к программам. Так как выяснилась данная ситуация, то возникла необходимость в разработке универсальной программы, которую бы можно было использовать и в дневной, и в заочной школе, чтобы те учащиеся, которым не хватило мест в дневной школе, получали те же знания дистанционно. Кроме того, это позволит учащимся, которые по каким-либо причинам пропустили занятия в дневной школе, удаленно заходить на курс своего класса на сайте заочной школы и изучать самостоятельно упущенный материал.

Разработчиками учебных программ и их содержания являются: доцент, кандидат физ.-мат. наук Позняк Юрий Викторович, а также студенты 4 курса 3 группы (научно-педагогического отделения) ММФ БГУ Федукович Ю. И. и Панкина Н. Л., которые посчитали своим долгом выполнять дипломные работы в данном направлении и быть полезными для родного университета. Что касается конкретно по классам, то Наталья Панкина разрабатывала программы для 5-7 классов, а я для 8-10 классов.

При составлении программ за основу были взяты разработки учебных программ факультативных занятий для 8-11 классов, составленных доцентом Вороновичем Игорем Ивановичем и преподавателем математики лицея БГУ Ламинской Галиной Васильевной [18]. Доцент Каскевич Виктор Иванович любезно предоставил материалы международного математического конкурса «Кенгуру» [11, 12]. Доцент, кандидат физ.-мат. наук Ромащенко Галина Станиславовна предоставила огромное количество учебно-методической литературы для изучения и наполнения контентом заочной школы юного математика. Предметом исследования были также и материалы районных, областных и республиканских математических олимпиад.

Учебная программа заочной школы юного математика для 5 класса направлена на расширение школьных знаний по математике и на углубленное изучение отдельных тем школьной программы. Что касается 6-8 классов, то здесь программа составлялась с уклоном на подготовку учащихся к участию в республиканском конкурсе по математике «Кенгуру». И, естественно, в ходе обучения решаются нестандартные и олимпиадные задачи. Начиная с 9 класса и по 11 класс, учащиеся не только готовятся к олимпиадам, но и в план занятий также включены темы, которые будут полезны при поступлении на наш факультет: элементы теории графов, теории чисел, математическая логика, основы комбинаторики, теории вероятности и многое другое.

Исходя из всего выше сказанного, можно выделить главную цель учебных программ заочной математической школы.

Цель: создание оптимальных условий для углубленного изучения математики, развитие волевой и интеллектуальной сферы личности; предоставление возможности учащимся повысить интерес к изучению естественных наук и максимально реализовать свой творческий потенциал.

Для достижения цели решаются следующие задачи:

Обучающие:

- познакомить с математическими терминами более углубленно;
- дать прочные знания по изучаемым темам;
- научить применять на практике различные методы и приемы решения математических задач.

Развивающие:

- формировать навыки решения нестандартных и олимпиадных задач;
- развивать логическое мышление и умение грамотно излагать свои мысли;
- развивать пространственное воображение и абстрактное мышление;
- формировать умение самостоятельно работать с учебным материалом.

Воспитательные:

- повышать мотивацию к изучению естественно-научных предметов;
- развивать творческий потенциал обучающихся;
- воспитывать трудолюбие, аккуратность при выполнении заданий и целеустремленность;

- воспитывать волевые качества личности и учить самоконтролю.

Ниже приведены учебные программы заочной школы юного математика для 8-10 классов.

Программа по математике для 8 класса ЗШЮМ

Занятие 1. Логические задачи. Головоломки.

Основные методы решения логических задач и головоломок;

Занятие 2. Делимость чисел и остатки.

Десятичная система счисления; определение и свойства делимости; теорема о делении с остатком; признаки делимости чисел.

Занятие 3. Тождественные преобразования многочленов.

Числовые выражения и выражения с переменными; тождественное преобразование целых рациональных выражений; формулы сокращенного умножения; тождественные преобразования дробных рациональных и иррациональных выражений.

Занятие 4. Числовые неравенства и их свойства. Действия над числовыми неравенствами.

Числовые неравенства; геометрическая интерпретация числовых неравенств; двойные неравенства; основные свойства неравенств; действия над числовыми неравенствами.

Занятие 5. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств с одной переменной.

Линейные неравенства с одной переменной; множества и его элементы; пересечение, объединение и дополнение множеств; системы линейных неравенств с одной переменной.

Занятие 6. Уравнения и неравенства с переменной под знаком модуля.

Неравенства с переменной под знаком модуля; метод интервалов; графический метод решения уравнений и неравенств с переменной под знаком модуля.

Занятие 7. Многоугольник. Четырехугольник.

Ломаная; длина ломаной; выпуклый многоугольник; правильный многоугольник; вписанные и описанные многоугольники; понятие четырехугольника; параллелограмм и его свойства и признаки.

Занятие 8. Треугольник. Средняя линия треугольника.

Треугольник; виды треугольников; биссектриса, медиана, высота треугольника; свойства равнобедренного треугольника; три признака равенства треугольников; зависимость между сторонами и углами треугольника; теорема о внешнем угле треугольника; теоремы о перпендикуляре, наклонных и их проекциях; признаки равенства прямоугольных треугольников.

Занятие 9. Трапеция. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках.

Трапеция и ее средняя линия; равнобедренная и прямоугольная трапеция; теорема о средней линии трапеции; теорема о пропорциональных отрезках; теорема Фалеса.

Занятие 10. Действительные числа.

Рациональные числа; иррациональные числа; корень из числа; арифметический квадратный корень и его свойства; избавление от иррациональности в знаменателе корня.

Занятие 11. Выражения с квадратными корнями. Тождественные преобразования иррациональных выражений.

Сравнение действительных чисел; преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня.

Занятие 12. Площадь треугольника и параллелограмма. Площадь трапеции и ромба.

Площади $n-$ *угольников; площадь прямоугольника и параллелограмма; площадь треугольника; теорема Пифагора; перпендикуляр и наклонная; площадь ромба и трапеции; отношение площадей.*

Занятие 13. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла. Теорема Пифагора.

Тригонометрические функции острого угла; значения тригонометрических функций углов $30^0, 45^0, 60^0$*; теорема Пифагора.*

Занятие 14. Квадратное уравнение.

Квадратные уравнения; формулы корней квадратных уравнений; алгоритм решения квадратного уравнения; задачи, сводящиеся к решению квадратного уравнения.

Занятие 15. Теорема Виета.

Приведенное квадратное уравнение; формулировка теоремы Виета (прямая); разложение квадратного трехчлена на множители; теоремы Виета (обратная).

Занятие 16. Квадратные неравенства.

Квадратные неравенства; равносильные неравенства; алгоритм решения квадратного неравенства.

Занятие 17. Практико-ориентированные задачи.

Задачи на движение и работу; задачи на соотношение между натуральными числами и методы их решения; Задачи на концентрацию и процентное содержание.

Занятие 18. Квадратичная функция. Квадратный трехчлен.

Функция $y = ax^2 + bx + c$ *и ее график; свойства квадратичной функции; Функция* $y = x^2$ *и ее график; функция* $y = ax^2$*;*

Занятие 19. Подобные треугольники. Подобие прямоугольных треугольников.

Подобие; подобные треугольники; признаки подобия произвольных треугольников; пропорциональные отрезки в треугольнике; свойства прямоугольного треугольника; признаки подобия прямоугольных треугольников; обобщенная теорема Пифагора.

Занятие 20. Подобные фигуры. Отношение площадей треугольников.

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим; подобные фигуры; признак подобия правильных n-угольников; признак подобия четырехугольников; отношения отрезков и площадей; пропорциональные отрезки в треугольнике.

Занятие 21. Задачи на построение. Метод геометрических мест.

Задачи на построение; допустимые построения с помощью циркуля и линейки; основные методы решения задач на построение; метод геометрических мест точек.

Занятие 22. Метод подобия, обратности, симметрии и спрямления.

Решение задач на построение методом подобия, обратности; метод симметрии и спрямления.

Занятие 23. Метод параллельного переноса. Метод вращения.

Метод параллельного переноса; свойства параллельного переноса; метод вращения в задачах на построение.

Занятие 24. Метод инверсии. Алгебраический метод.

Понятие инверсии; метод инверсии; алгебраический метод решения задач на построение.

Занятие 25. Метод математической индукции.

Понятие индукции; полная индукция; метод математической индукции.

Занятие 26. Комбинаторика.

Понятие о размещениях, перестановках, сочетаниях; формулы их вычисления; применение комбинаторики при решении математических и логических задач; правила комбинаторного сложения и умножения.

Занятие 27. Принцип Дирихле.

Сущность принципа Дирихле и его применение при решении задач.

Занятие 28. Теория графов.

Понятие графа; лемма «О рукопожатиях»; двудольные графы; связность графов; понятие ориентированного графа; маршрут, цепь, цикл графа; теоремы Эйлера; понятие планарных графов; теорема Понтрягина-Куратовского.

Занятие 29. Инварианты и полуинварианты.

Понятие инварианта и полуинварианта; леммы о четности и нечетности чисел и их применение при решении задач;

Занятие 30. Игры, преследования, стратегии и алгоритмы.

Алгоритмы решения задач про игры и стратегии; основные идеи стратегий: игры-шутки; игры, использующие симметрию; игры, в которых стратегия — дополнение до фиксированного числа; игры, использующие метод выигрышных позиций.

Программа по математике для 9 класса ЗШЮМ

Занятие 1. Числа и десятичная система счисления. Четность и нечетность.

Натуральные числа; арифметические действия над натуральными числами; десятичная запись натуральных чисел; целые числа; важные свойства, которые часто применяются при решении задач на соотношение между натуральными числами; четность чисел; свойства четных и нечетных чисел.

Занятие 2. Делимость чисел. Деление с остатком. Сравнения.

Определение и свойства делимости чисел; теорема о делении с остатком; сравнения; свойства сравнений по модулю.

Занятие 3. Взаимно простые числа. НОД, НОК. Простые числа.

Делитель и кратное; взаимно простые числа; теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел; простые и составные числа; свойства простых чисел; основная теорема арифметики; наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

Занятие 4. Признаки делимости.

Формулировки признаков делимости чисел и их применение при решении задач.

Занятие 5. Уравнения в целых числах.

Понятие об уравнениях в целых числах; основные методы решения уравнений в целых числах: способ перебора вариантов, применение алгоритма Евклида, представление чисел в виде непрерывных (цепных) дробей, разложение на множители, решение уравнений в целых числах как квадратных (или иных) относительно какой-либо переменной, метод остатков, метод бесконечного спуска.

Занятие 6. Окружность и угол. Взаимное расположение прямой и окружности.

Окружность; центральные углы; зависимость между дугами и хордами; диаметр, перпендикулярный к хорде; дуги между параллельными хордами; касательная к окружности; измерение центральных и вписанных углов; взаимное расположение прямой и окружности.

Занятие 7. Окружность и треугольник.

Треугольник; вписанные, описанные и вневписанные окружности; расположение центров окружностей, описанных около треугольника и вписанных в треугольник; формулы для вычисления радиусов вписанной и описанной окружностей.

Занятие 8. Окружность и четырехугольник.

Вписанные и описанные четырехугольники; свойства и признаки вписанных и описанных четырехугольников.

Занятие 9. Рациональные и иррациональные числа.

Понятие рационального числа; правила выполнения арифметических операций над рациональными числами; периодические десятичные дроби; иррациональные и действительные числа; свойства рациональных и иррациональных чисел.

Занятие 10. Функции. Графики функций.

Числовая функция; область определения, область значений функции; способы задания функций; свойства функции; график функции; обратная *пропорциональность, кубическая парабола и квадратный корень; касательная к графику функций.*

Занятие 11. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Квадратный трехчлен; квадратные уравнения; решение неполных квадратных уравнений; решение квадратного уравнения выделением квадрата двучлена; корни квадратного уравнения; теорема Виета.

Занятие 12. Неравенства. Системы неравенств.

Понятие неравенства; неравенства с неизвестным; равносильность неравенств; доказательство неравенств; решение линейного неравенства с одним неизвестным; решение системы линейных неравенств с одним неизвестным; решение квадратных неравенств.

Занятие 13. Степень с целым и рациональным показателем.

Степень и свойства степени с натуральным и равным нулю показателем; степень с целым показателем; арифметический корень n-ой степени из действительного числа; степень с рациональным показателем; степень с действительным показателем; степенная функция.

Занятие 14. Рациональные уравнения и неравенства.

Рациональные уравнения; решение рациональных уравнений, равносильные уравнения, корни уравнений; однородные уравнения второй степени; метод выделения полного квадрата в рациональных уравнениях; рациональное неравенство с одной переменной; метод интервалов.

Занятие 15. Теоремы синусов и косинусов. Решение треугольников.

Теорема косинусов; формула Герона для площади треугольника; теорема синусов; понятие решения треугольников; формулы для решения треугольников.

Занятие 16. Площадь многоугольников.

Площадь n-угольника; площадь треугольника; формулы вычисления площади; площадь прямоугольника и квадрата; площадь параллелограмма, треугольника, трапеции; площадь четырехугольников; отношение площадей.

Занятие 17. Подобие фигур. Метрические соотношения в треугольнике.

Соизмеримые и несоизмеримые отрезки; отношение отрезков; пропорциональные отрезки; пропорциональные отрезки на сторонах угла; деление отрезка пропорционально данным отрезкам; подобие фигур; подобные треугольники; признаки подобия треугольников; подобные многоугольники; подобное преобразование многоугольников. Отношение площадей подобных многоугольников.

Занятие 18. Правильные многоугольники.

Правильные многоугольники; выражение стороны через радиус; построение вписанных и описанных окружностей; подобие правильных многоугольников; отношение их периметров; площадь правильного многоугольника.

Занятие 19. Длина окружности. Радианная мера угла.

Длина окружности и дуги; радианная мера угла;

Занятие 20. Площадь круга. Площадь сектора.

Понятие сектора, сегмента; формулы для вычисления площади круга, сектора и сегмента;

Занятие 21. Уравнения и системы уравнений с двумя переменными. Графическое решение систем уравнений.

Уравнение с двумя переменными и его график; рациональные нелинейные уравнения; основные методы решения уравнений с двумя переменными; системы уравнений с двумя неизвестными; основные способы решения систем: метод подстановки, метод алгебраического сложения; линейные системы алгебраических уравнений; графическое решение систем уравнений.

Занятие 22. Системы неравенств с двумя переменными. Графическое решение системы неравенств.

Неравенства и системы неравенств с двумя переменными; решение неравенства; график неравенства с двумя переменными; графическое решение системы неравенств.

Занятие 23. Текстовые задачи.

Задачи на движение и работу; задачи на соотношение между натуральными числами и процентное соотношение; методика решения задач на концентрацию; задачи на числовые зависимости.

Занятие 24. Построение чертежа. Выявление характерных особенностей заданной конфигурации.

Важнейшие требования к чертежу; правила построения чертежа к задачам; выявление характерных особенностей заданной конфигурации.

Занятие 25. Опорные задачи.

Понятие опорных задач; доказательство теорем элементарной геометрии; применение опорных задач при решении геометрических задач.

Занятие 26. Геометрические методы решения задач.

Понятие геометрического метода решения задач; виды дополнительных построений на чертеже; метод площадей; метод «вспомогательной окружности».

Занятие 27. Аналитические методы.

Аналитические методы решения задач: метод поэтапного решения задач, метод составления уравнений.

Занятие 28. Задачи на построение.

Задачи на построение; допустимые построения с помощью циркуля и линейки; методика решения задач на построение; методы подобия, обратности, симметрии и спрямления; метод параллельного переноса и вращения; метод инверсии; алгебраический метод.

Занятие 29. Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия.

Последовательности; арифметическая прогрессия; формула n-го члена арифметической прогрессии; сумма первых n членов арифметической прогрессии; характеристическое свойство арифметической прогрессии; признак арифметической прогрессии.

Занятие 30. Геометрическая прогрессия. Смешанные задачи.

Понятие геометрической прогрессии; формула n*-го члена геометрической прогрессии; сумма первых* n *членов геометрической прогрессии; свойство и признак геометрической прогрессии; смешанные задачи.*

Программа по математике для 10 класса ЗШЮМ

Занятие 1. Функции.

Понятие функции, примеры (многочлен n*-ой степени, рациональная функция), композиция функций, обратная функция, чётность и нечётность функций, угловой коэффициент прямой.*

Занятие 2. Последовательность. Предел последовательности. Предел функции.

Числовые последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии; понятие предела последовательности и предела функции.

Занятие 3. Производная. Производная сложной функции.

Производная, геометрический и механический смысл производной, таблица производных простых функций.

Занятие 4. Применение производной к исследованию функций.

Касательная к графику функции, наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке и на интервале.

Занятие 5. Sin, cos, tg, ctg произвольных углов. Понятие $arcsin$ и $arccos$, $arctg$ и $arcctg$.

Градусная мера углов дуг; угол как мера поворота; синус и косинус произвольного угла; свойства выражений синус и косинус; тангенс и котангенс произвольного угла.

Занятие 6. Формулы приведения. Преобразование тригонометрических выражений.

Формулы сложения двойного, тройного и четвертного угла; формулы половинных углов; формулы понижения степени; преобразования произведения в сумму и суммы в произведение.

Занятие 7. Тригонометрические функции и их графики.

Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента; применение основных тригонометрических формул; четность и нечетность функций; формулы приведения; применение формул приведения; тождественное преобразование тригонометрических выражений; доказательство тригонометрических тождеств.

Занятие 8. Обратные тригонометрические функции.

Понятие обратных тригонометрических функций; их свойства и графики.

Занятие 9. Преобразование тригонометрических функций.

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение; формулы введения вспомогательного аргумента.

Занятие 10. Решение тригонометрических уравнений и систем.

Понятие тригонометрических уравнений; однородные уравнения; использование формул универсальной подстановки; линейные уравнения;

уравнения с кратными аргументами; тригонометрические уравнения с разноименными тригонометрическими функциями различных аргументов; отбор корней в тригонометрических уравнениях.

Занятие 11. Тригонометрические неравенства.

Понятие тригонометрических неравенств; тригонометрические неравенства со сложным аргументом; двойные тригонометрические неравенства.

Занятие 12. Решение задач с параметром. Графический метод решения.

Решение задач с параметром. Использование свойств квадратного трехчлена; замечательное свойство трехчлена; Применение графического подхода.

Занятие 13. Векторы. Применение векторов и координат при решении задач.

Сложение векторов; умножение вектора на число; координаты векторов; скалярное произведение; ортогональность; применение векторов при решении задач.

Занятие 14. Неопределенный интеграл.

Понятие первообразной и неопределенного интеграла; свойства неопределенного интеграла; таблица неопределенных интегралов; метод замены переменных.

Занятие 15. Определенный интеграл.

Понятие и геометрический смысл определенного интеграла; свойства определенного интеграла; формула Ньютона-Лейбница; методы вычисления определенного интеграла.

Занятие 16. Метод математической индукции, элементы комбинаторики.

Метод математической индукции; элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания и их применение при решении задач;

Занятие 17. Бином Ньютона.

Бином Ньютона и его применение при решении задач.

Занятие 18. Многогранники.

Многогранник; призма; параллелепипед; свойства граней и диагоналей параллелепипеда; пирамида; цилиндр; конус; объемы многогранников; решение задач на вычисление по стереометрии.

Занятие 19. Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом.

Аксиомы стереометрии и некоторые следствия из аксиом; их применение при решении геометрических задач.

Занятие 20. Построение сечений многогранников плоскостью.

Понятие секущей плоскости и сечения; правила построения сечений многогранников; методы построения сечений многогранников: метод следов, метод вспомогательных сечений, комбинированный метод; нахождение площади сечений в многогранниках.

Занятие 21. Параллельные прямые в пространстве.

Определение параллельных прямых в пространстве; необходимое и достаточное условие параллельности прямых на плоскости; свойства параллельных прямых.

Занятие 22. Параллельность прямой и плоскости.

Признак и условия параллельности прямой и плоскости; уравнения прямой в пространстве.

Занятие 23. Скрещивающиеся прямые.

Понятие скрещивающихся прямых; признак скрещивающихся прямых; расстояние между скрещивающимися прямыми; теорема об общем перпендикуляре двух скрещивающихся прямых.

Занятие 24. Угол между прямыми.

Понятие плоского угла; угол между двумя прямыми; углом между двумя скрещивающимися прямыми; теорема о плоских углах с параллельными сторонами; угол между перпендикулярными прямыми; значение тригонометрической функции одного из двух углов (острого или тупого) между заданными прямыми.

Занятие 25. Параллельность плоскостей.

Понятие параллельных плоскостей; признак параллельности плоскостей; свойства параллельных плоскостей.

Занятие 26. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Определение перпендикулярности прямой и плоскости; признак перпендикулярности прямой и плоскости; свойства перпендикулярных прямой и плоскости.

Занятие 27. Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до плоскости.

Понятие перпендикуляра и наклонной; основание перпендикуляра; длина перпендикуляра; проекция наклонной; угол между наклонной и плоскостью; теорема о трёх перпендикулярах и обратная к ней; расстояние от точки до плоскости.

Занятие 28. Угол между прямой и плоскостью.

Понятие и формула вычисления угла между прямой и плоскостью; алгебраический и геометрический методы вычисления угла между прямой и плоскостью.

Занятие 29. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей.

Двугранный угол; линейный угол двугранного угла; градусная меры двугранного угла; признак перпендикулярности двух плоскостей.

Занятие 30. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола.

Кривые второго порядка; эллипс, гипербола и парабола, их свойства и канонические уравнения; приведение уравнения второго порядка к каноническому виду.

Как видно из учебных программ, по каждому классу организовано 30 занятий. В каждом классе преподавателями регулируется дата и время доступа к уроку и к отдельным его частям. Было решено (по аналогии с ДМШ), что каждое занятие будет включать: теоретический материал, задание для самостоятельной работы, ответы к нему и решения. Занятия распределены по чередующимся блокам: часть алгебры, часть геометрии. К последнему занятию каждого блока предлагается контрольная работа с ответами. Такая форма позволяет изучить тему, разобрать на достаточном количестве примеров базовые задачи, решить предложенные для самостоятельного решения примеры с контролем правильности решения, и проверить усвоение материала, выполнив контрольную работу. Пример занятия Заочной школы юного математика размещен в приложении (Приложение В).

Диапазон рассматриваемых тем дает возможность не только изучать их в рабочем порядке по календарному плану, но и восполнять пробелы, углублять знания по отдельным темам, разбирать их самостоятельно.

Отметим, что при подборе задач для каждого урока особое внимание уделялось наличию практико-ориентированных задач, ведь прикладная направленность в обучении математике имеет практическую ценность для учащихся в развитии математической компетентности.

2.3. Организация занятий в ЗШЮМ и внедрение дистанционных технологий в разделы курса

Заочная школа юного математика организована на базе системы дистанционного обучения LMS MOODLE. Выбрана именно эта образовательная платформа, так как у нее очень простой интерфейс, огромные возможности при администрировании курсов, она позволяет легко организовывать взаимодействие ученика и преподавателя, позволяет создавать огромное количество образовательных элементов и ресурсов. Это уникальная информационно-образовательная среда.

Что касается технической стороны этой системы, то для внедрения математического контента в разделы курсов я использовала следующие возможности LMS MOODLE:

- вставка текста на страницу осуществляется как html-код;
- изображение загружается либо непосредственно с компьютера, либо вставляется ссылка на изображение с интернета;
- графики и чертежи формата .ggb динамической геометрии Geogebra загружаются сперва в облачное хранилище на сайт www.geogebra.org, а затем копируется ссылка на него и вставляется в MOODLE как теги html-кода;
- все математические формулы набираются в формате TeX;
- в режиме редактирования каждого элемента курса устанавливаются различные параметры: дата и время доступа к элементам курса, внешний вид занятий, назначение ролей для участников курса и многое другое.

В разделы курса можно внедрять не только страницы с текстом и изображениями, а еще такие часто используемые элементы и ресурсы, как:

- анкета. Данный модуль позволяет оценивать и собирать данные, которые преподаватель сможет использовать для улучшения эффективности своей работы.

- Видеоконференция. С помощью данного модуля можно организовывать онлайн-конференции учащихся с преподавателями школы. Можно также организовывать различные группы, например, для отстающих, и проводить для них обзорные веб-конференции.
- Глоссарий. Это очень многофункциональный ресурс, так как его можно использовать не только как словарь определений по теме, но и как ресурс «Полезные советы», для обмена опытом и решениями между учащимися. Также здесь можно хранить различные видео материалы, изображения и звуковые файлы.
- Голосование. Дает возможность в реальном времени проголосовать в каком-либо опросе и мгновенно видеть результаты. Этот модуль также помогает при обсуждении с учащимися какого-либо важного вопроса, чтобы прийти к единому мнению.
- Задание. Данный модуль позволяет преподавателям добавлять задания по теме и в дальнейшем оценивать работу учащихся. Ответы и полученные решения учащиеся могут загружать в виде любого файла или фотографии. А затем преподаватели имеют возможность комментировать и оценивать их работы.
- Лекция. Этот модуль также имеет различное применение в образовательном процессе. С её помощью можно давать просто теоретический материал, либо организовать изучение нового материала с промежуточным тестирование. Как это работает? После каждого параграфа темы появляется вопрос, на который нужно дать верный ответ. Только в этом случае откроется дальнейшая теория. Если же дан неверный ответ, то учащегося перенаправляют на страницу с тем материалом, где находиться верный ответ на вопрос, чтобы учащийся еще раз изучил данную тему.
- Тест. Позволяет преподавателю создавать различные тестирования по темам, причем варианты тестов есть разные: множественный выбор, верно/неверно, числовой ответ и др. И использовать их можно также абсолютно везде, будь то изучение новой темы, или итоговый контроль.
- Форум. В каждом занятии обязательно создан форум, для общения участников курса и обсуждения учебных моментов. Еще форумы можно использовать как новостную ленту, т.е. есть возможность размещать там школьные объявления или новости.
- Чат. Позволяет общаться участникам курса на расстоянии в реальном времени. Его удобно использовать при индивидуальной консультации с преподавателем или однокурсником. Огромным плюсом при обучении в данной школе является наличие обратной связи онлайн. Общение учеников и преподавателей осуществляется при помощи сервиса курса "Обмен сообщениями", а также в рамках форумов и чатов. Возможность постоянного улучшения курса, его корректировки с учетом обратной связи, внесения изменений при изменении порядка прохождения тем позволяет предоставлять актуальную информацию в кратчайшие сроки.

- Гиперссылка. Она дает возможность преподавателю разместить ссылку как ресурс курса. Ее можно вставлять в любой другой элемент курса. Например, можно дать ссылку на видео из YouTube, где размещено видео-объяснение решения задачи или другая информация. Ссылаться можно и на отдельные страницы того же курса, где содержится более развернутая информация или, когда необходимо напомнить доказательство теоремы, которая уже была пройдена ранее.
- Книга. Название модуля говорит само за себя. Этот ресурс позволяет создавать электронную книгу с большим объемом информации, которая отображается в виде страниц. Есть также возможность делить текст на главы и разделы, добавлять изображения и медиа-файлы.
- Файл и еще многое другое.

Это самые популярные ресурсы Moodle, которые помогают преподавателям лучше и намного эффективнее организовать образовательный процесс. Например, добавив в занятие элемент «Тест», преподаватели видят сразу результаты усвоения материала. И учащиеся могут выявить пробелы в своих знаниях по теме. Иногда в занятия я добавляла такой элемент, как «Изучение теоретического материала с промежуточным тестированием». Это позволяет не только изучать теорию по теме, но и сражу же проверять уровень ее усвоения. С помощью данного модуля реализуется принцип прочности знаний. Так как ничего не удается упустить из виду при изучении новой темы.

На мой взгляд, это самая удобная и продвинутая образовательная площадка на сегодняшний день.

Теперь рассмотрим организационные моменты функционирования ЗШЮМ.

Как записаться на курс? Доступ в Заочную школу юного математика осуществляется через сайт www.dl.bsu.by. На странице школы расположены разделы по учебным классам. Для того, чтобы записаться на нужный курс необходимо зарегистрироваться на сайте. Для этого выполнить следующие действия:

— перейти по ссылке https://www.dl.bsu.by/login/index.php;
— нажать кнопку "Создать учетную запись";
— заполнить необходимые данные о себе.

На указанный адрес электронной почты приходит письмо, подтверждающее регистрацию на сайте школы, после чего можно зайти на необходимый курс Заочной школы юного математика, нажав кнопку "Записаться на курс". Желательно, конечно, записываться в ЗШЮМ в начале учебного года, так как, если записаться в середине года, то некоторые начальные занятия уже будут недоступны, и будет тяжело ориентироваться в учебном материале.

Как учиться на курсе? Начиная с 8.00 понедельника, ученик изучает Теоретический материал, который включает в себя примеры решения задач. В это же время ученик решает задачи из Задания для самостоятельной работы. К остальным ресурсам пока доступ закрыт. В четверг с 8.00 ученик самостоятельно проверяет ответы к задачам из Задания для самостоятельной работы по открывающемуся ресурсу — Ответы к Заданию для самостоятельной работы. В субботу с 8.00 ученик начинает знакомиться с решениями задач. В полночь (23.55) каждого воскресенья закрывается доступ к заданию для самостоятельной работы и к контрольному заданию. В течение следующей недели осуществляется отправка отрецензированных решений обратно ученику [20]. Сам же Теоретический материал с разобранными примерами еще находиться в течение месяца в открытом доступе. Если в занятии есть модуль Контрольная работа, то на ее выполнение так же отводиться не больше недели. Все решения учащихся прикрепляются в виде файлов любого из доступных форматов, либо в виде фотографий, и отсылаются на проверку. Оценки за контрольную работу выставляются преподавателями в Журнал текущей успеваемости, чтобы и родители могли видеть успехи своих детей.

Из всего вышеизложенного можно сделать вывод: учиться в нашей заочной школе очень просто. Все занятия организованы с учетом возрастных особенностей учащихся, обучение является непрерывным и проходит под руководством опытных преподавателей (а также, магистрантов и студентов научно-педагогического отделения) механико-математического факультета БГУ. А благодаря современным технологиям, обучение теперь доступно каждому.

2.4. Перспективные идеи и планы дальнейшего развития ЗШЮМ

Как я упоминала выше, анализируя другие подобные заочные школы, мы стараемся почерпнуть от них интересные моменты реализации образовательных программ, а также усовершенствовать всю образовательную математическую среду.

Имеется очень много перспективных идей, которые мы планируем внедрить в разделы курса. Рассмотрим некоторые из них, самые актуальные на данный момент.

Речь идет о знакомстве учащихся с системой динамической геометрии GeoGebra. Программа GeoGebra обладает широкими возможностями для демонстрации как алгебраических, так и геометрических понятий и законов. Все элементы системы GeoGebra (точка, отрезок, прямая, текст и т.д.) обладают множеством настроек и параметров. Настраивать можно все: цвет элементов, форму, толщину, подпись, положение, наложение, отображение и многое другое. Есть дополнительные полезные функции, такие как измерение углов, площади, длины. Можно осуществлять отражение относительно прямой, точки или окружности, параллельный перенос по вектору и многое другое. Большой интерес представляет также инструмент, как «Исследователь функций». Короче говоря, с программой Geogebra можно осуществить любой замысел, например, можно строить чертежи как на плоскости, так и в пространстве. Вот наглядная демонстрация плоского изображения (Рисунок 2).

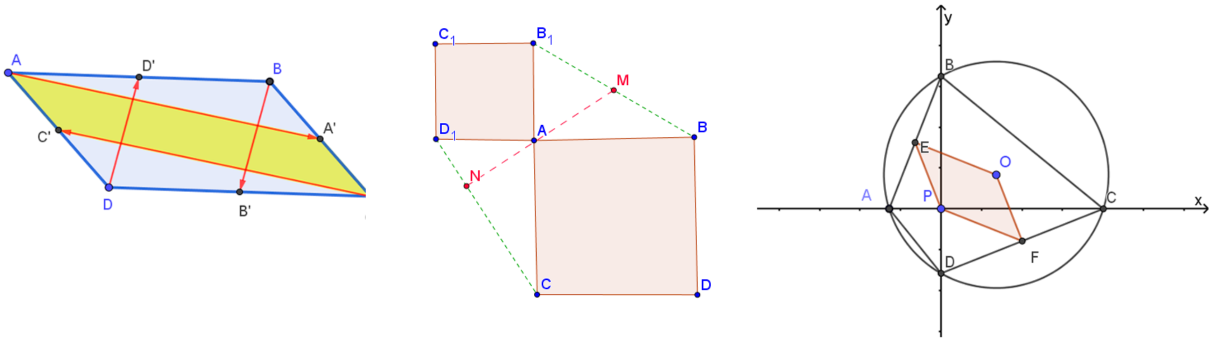

Рисунок 2. Планиметрические чертежи в GeoGebra

Все отдельные части данных изображений можно настраивать на свой вкус. Также имеется функция анимации построенных моделей. Можно увидеть, как поэтапно строился чертеж. Эта функция будет иметь отличное применение при демонстрации задач на построение. Также можно прямо на листе программы Geogebra объяснять решение отдельных задач, регулировать ползунками моменты дополнительных построений и подсвечивать рассматриваемые отдельные участки фигуры.

Отдельно хотелось бы продемонстрировать возможности 3-D графики (Рисунок 3).

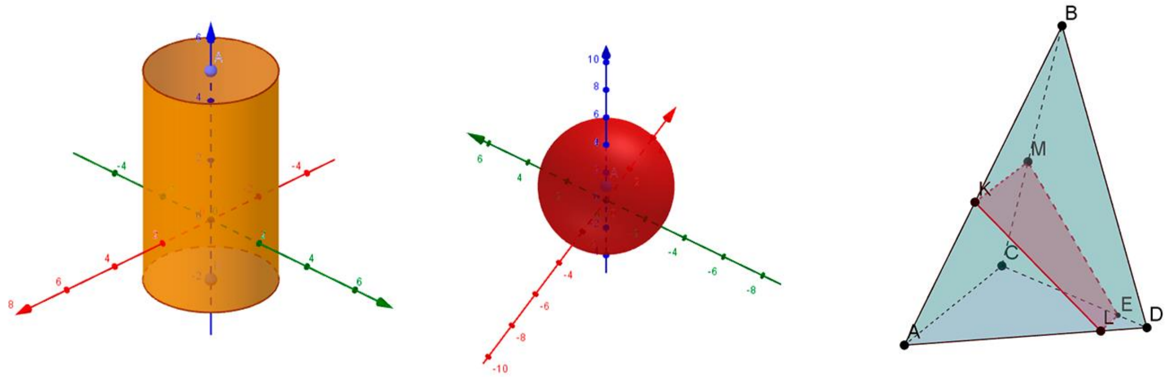

Рисунок 3. Стереометрические чертежи в Geogebra

А какие графики функций можно строить и демонстрировать учащимся в этой программе?! Не говоря уже о создании интерактивных иллюстраций и учебных тренажеров.

Очень малое количество преподавателей даже нашего ВУЗа умеют работать с программой GeoGebra и не хотят обучаться построениям в ней. Мне кажется, это из-за того, что они не понимают всей пользы этой системы. Разве удобно в тетради в клеточку проводить плоскости через точки или строить сечения геометрических объектов? А с помощью Geogebra можно все это наглядно продемонстрировать, поворачивать и рассматривать под разными углами изображенные модели.

Теперь рассмотрим, в чем же заключается наша идея по применению данной программы. Начиная с пятого класса обучение в Заочной школе юного математика, я предлагаю внедрять дополнительные занятия по основам динамической геометрии Geogebra, с помощью которой в дальнейшем ученики будут иметь возможность прямо на странице урока выполнять в ней некоторые задания не только по геометрии (например, строить чертежи в задачах на построение и т.д.), но и по алгебре (построение графиков, иллюстрации решений задач с параметрами и т.п.). Это, безусловно, будет способствовать развитию абстрактного математического мышления и интереса к изучению сложных тем.

На данный момент мало изученной, но очень продвинутой технологией является технология «Дополненная реальность». В образовательном пространстве она стала использоваться относительно недавно. Она позволяет сделать учебные занятия более интересными, понятными и увлекательными. В чем ее суть? Данные реальных сцен и объектов собираются специальной системой и обрабатываются на компьютере. Существенная часть этого процесса посвящена налаживанию связи между реальным и виртуальным. К примеру, чтобы на Вашем лице появились очки, нужно хорошо определить положение Ваших глаз, носа и т.д. И конечно, все это должно работать в реальном времени [36]. Уже многие сталкивались с такой технологией, например, в социальном приложении Instagram, где можно наводить камеру на лицо человека и на нем появляются веснушки или солнечные очки. Но никто и не догадывается, сколько пользы в образовательном процессе может принести эта развлекательная «мелочь». Самый большой плюс данной технологии в том, что она развивает пространственное мышление школьников. Представьте, что перед вами оживают исторические события, или вы можете подержать в руках целую планету. Все, что невозможно увидеть в жизни, например, агрегатные состояния молекул воды, можно наблюдать, не выходя из учебного класса с помощью технологии «Дополненная реальность». Сейчас многие школы внедряют подобные образовательные проекты в жизнь. И нами взята на заметку данная уникальная технология будущего, которая, я думаю, в скором времени найдет отражение и в нашей Заочной школе юного математика.

Еще есть мысли о повышении мотивации к обучению учащихся в заочной школе, например, внедрение рейтинга, чтобы каждый видел, на каком уровне он находится по отношению к другим, старался быть лучше и хотел продвигаться по таблице вверх. Но, для начала, нужно еще разобраться с системой оценивания в MOODLE, а затем уже продумывать данную идею.

В обязательном порядке будут проводиться внутренние олимпиады и конкурсы. Это еще один пункт в повышении мотивации учащихся и отличная возможность проявить себя в математике и реализовать свои способности.

В дальнейшем, планируется усовершенствование работы всей школы юного математика, так как до сих пор каждый преподаватель работает по индивидуально составленному плану. Когда будет единый учебный план занятий, преподаватели смогут предлагать учащимся дневного отделения школы дополнительно просматривать и решать задачи заочной школы (например, как домашнее задание). Или же, если по какой-то причине было пропущено занятие, то оно доступно будет в заочной школе юного математика, и ученик не отстанет от учебной программы.

В конце главы стоит сказать, что, несомненно, будущее современной молодежи стоит за технологиями и инновациями. И только от нас зависит, какое оно будет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время, математика все шире проникает в нашу жизнь. Она давно стала научным и техническим языком во всем мире. Поэтому так важно повышать математическую грамотность человечества и расширять знания в области информационных технологий.

Математическое дополнительное образование детей и молодежи вносит свой вклад в формирование общей культуры человека. Изучение математики способствует эстетическому воспитанию человека, пониманию красоты и изящества математических рассуждений, восприятию геометрических форм, развивает воображение, пространственные представления.

Именно на повышение уровня математического мышления направлена наша работа. Создав заочную форму школы юного математика на Механико-Математическом факультете БГУ, мы предоставим абсолютно всем желающим возможность обучаться и развиваться в естественно научном направлении.

В начале моей дипломной работы я поставила перед собой цель: организовать занятия и внедрить дистанционные технологии в ЗШЮМ для 8-10 классов. Эта цель была полностью реализована, так как все поставленные задачи выполнены. Приведу главные выводы по каждому пункту дипломной работы.

В сетевом образовательном пространстве существует огромное количество различных дистанционных, заочных или очно-заочных математических школ, которые осуществляют свою деятельность в самых различных направлениях: одни помогают в подготовке к централизованному тестированию, другие осуществляют поддержку школьного математического образования, третьи помогают углублять школьные знания и расширяют границы математического мышления учащихся. Благодаря такому разнообразию школ, каждый может найти для себя необходимые знания, не выходя из дома.

Что касается функционирования анализируемых школ, то, на мой взгляд, рассылка учебных материалов по почте – это прошлый век. Хотя такая практика существует чуть-ли не во всех заочных школах. Сейчас ведь время технологий, которые открывают намного больше возможностей в образовательном процессе. Наша заочная школа имеет огромное количество преимуществ хотя бы потому, что она функционирует всегда онлайн, все материалы доступны в любое время в любом месте мира. Не нужно ждать правильных ответов и рецензии от преподавателя по почте месяцами, а нужно всего лишь написать интересующие вопросы в чат занятия, либо лично преподавателю, на которые в этот же день можно получить развернутые ответы. Также плюсом нашей школы является возможность участия родителей и преподавателей других школ в работе нашего форума.

Планируется позаимствовать в исследуемых школах их приемы мотивации учащихся. Очень интересной идеей, на мой взгляд, является предоставление дополнительных баллов по математике при поступлении на наш механико-математический факультет. Этот факт привлечет еще большее количество желающих обучаться у нас и повысит естественно-научную компетентность школьников. В общем, мы взяли только самое лучшее от других школ и постараемся все это реализовать в Заочной школе юного математика в ближайшее время.

Следующей задачей для достижения поставленной цели была изучить доступные в Интернете учебные программы заочных школ Беларуси и России. Для анализа я выбрала четыре школы под номером 2, 4, 10 и 14 из Таблицы 1.1. Количество тем и их содержание очень отличались друг от друга. В одних программах делался упор на решение нестандартных математических задач, в других – на углубленное изучение школьной тематики. Как и в любой программе, у них также есть свои плюсы и минусы, которые становятся видны только на этапе применения их на практике. Поэтому судить об их эффективности я не могу. Нами были учтены интересные и полезные для учащихся темы из анализируемых программ, которые мы включили в ЗШЮМ, например, элементы теории чисел и теории вероятности.

В ходе исследования была раскрыта роль заочной школы юного математика в учебно-образовательном процессе и показана актуальность выбранной мной темы дипломной работы.

Самой важной и непростой задачей для меня оказалось составление учебных программ для 8-10 классов Заочной школы юного математика. Возникало с моей стороны множество непонятных моментов, так как я раньше не сталкивалась с подобного рода методической работой. Пришлось сначала анализировать школьные учебные пособия, чтобы понять, что в каком классе сейчас изучают. Затем я просматривала и исследовала сборники и материалы районных, областных и республиканских математических олимпиад прошлых лет. Совместно с моим научным руководителем мы добились желаемого результата и составили учебные программы для 8-10 классов, которые предусматривают изучение математики на углубленном уровне, решение олимпиадных и нестандартных математических задач.

По каждому классу мной были составлены 30 учебных занятий, которые я внедрила в разделы курса на сайте школы. Информацию для наполнения математического контента я брала с различных литературных источников [1-15], интернет-ресурсов [16,17], а также использовала ссылки на теоретический материал дистанционной школы Механико-Математического факультета БГУ [21]. Старалась внедрять в занятия изображения и чертежи динамической геометрии Geogebra, которые позволяют более наглядно продемонстрировать геометрические объекты на плоскости и в пространстве. Много полезного я также узнала про администрирование данной образовательной площадки.

Последняя поставленная задача звучала так: раскрыть перспективные идеи и планы дальнейшего развития ЗШЮМ. В начале моей работы было трудно сразу сказать, что нового и интересного можно придумать для улучшения Заочной школы юного математика. Но после исследования других заочных русскоязычных школ и после внедрения занятий в разделы курсов мне стало понятно, чего здесь не хватает. Во-первых, стоит улучшать и совершенствовать мотивационную составляющую школы, во-вторых, стоит глубже познакомить учащихся с возможностями динамической геометрии Geogebra, чтобы повышать абстрактное мышление и интерес к изучаемому предмету. Планируется также обучать преподавателей школы оценочной системе, которая встроена в MOODLE, чтобы осуществлять наиболее компетентный подход к каждому ученику школы.

Таким образом, задачи решены в полном объеме и цель дипломной работы достигнута.

В ходе написания дипломной работы доказана гипотеза о том, что достижение поставленной цели возможно только при достаточном изучении и анализе учебно-методической литературы по математике, изучении функционирования и области применения системы MOODLE и при правильной организации образовательного процесса ЗШЮМ.

Я думаю, что и в дальнейшем продолжу тесное сотрудничество с Заочной школой юного математика, и все наши задуманные планы осуществятся.

На сегодняшний день одна из самых быстроразвивающихся сфер жизни – это образование, благодаря которому происходит духовное, интеллектуальное и культурное развитие человечества. Поэтому очень важно, чтобы это образование было непрерывным. Это достаточно легко реализовать в современном мире с помощью дистанционных технологий, которые позволяют каждому студенту иметь больше возможностей в образовании даже на расстоянии.

Наша работа позволяет сделать вывод, что математическое образование в наше время является основополагающим и доступно каждому учащемуся, благодаря современным дистанционным технологиям. Главное иметь желание, а возможность для саморазвития и самореализации всегда найдется.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амелькин, В.В. Задачи с параметрами: Справ. Пособие по математике / В.В. Амелькин, В.Л. Рабцевич; – 3-е изд. дораб. – Мн.: ООО «Асар», 2004. – 464 с.

2. Веременюк, В.В. Математика: учимся быстро решать тесты: пособие для подготовки к тестированию и экзамену / В.В. Веременюк, Е.А. Крушевский, И.Д. Беганская. – Мн.: ТетраСистемс, 2005. – 144 с.

3. Галицкий, М.Л. Сборник задач по алгебре: учебное пособие для 8-9 классов с углубл. Изучением математики / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич; – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 271 с.

4. Галицкий, М.Л. Углубленное изучение алгебры и математического анализа: Метод. рекомендации и дидакт. материалы: Пособие для учителя / М.Л. Галицкий, М.М. Мошкович, С.И. Шварцбурд. – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1997. – 352 с.

5. Генкин, С.А. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. / С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин. – Киров: Издательство «АСА», 1994. – 272 с.

6. Мельников, И.И. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах / И.И. Мельников, И.Н. Сергеев; – 2-е изд. исправл. – Мн.: МП Азбука, 1994. – 352 с.

7. Моденов, П.С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики / П.С. Моденов; под ред. С.И. Новоселов. – М.: Издательство «Советская наука», 1957. – 666 с.

8. Сикорский, К.П. Дополнительные главы по курсу математики 7-8 классов для факультативных занятий. Пособие для учащихся / К.П. Сикорский; под ред. Н.И. Никитина. – М.: Просвещение, 1969. – 316 с.

9. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся ст. классов средней школы / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий; – 3-е изд. дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.

10. Шарыгин, И.Ф. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие / И.Ф. Шарыгин. – 6-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2006. – 479, [1] с.

11. Задачи белорусских математических олимпиад: 2012-2013 учебный год, 2013-2014 учебный год / Е. А. Барабанов [и др.]. – Минск: Белорус. ассоц. «Конкурс», 2014. – 368 с.

12. Задачи белорусских математических олимпиад: 2014-2015 учебный год, 2015-2016 учебный год / Е. А. Барабанов [и др.]. – Минск: Белорус. ассоц. «Конкурс», 2016. – 368 с.

13. Задачи по математике. Начала анализа: Справ. пособие / В.В. Вавилов [и др.]. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 608 с.

14. Заочные математические олимпиады / Н.Б. Васильев [и др.]. – Под ред. С.Л. Табачников. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 176 с.

15. Пособие по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособие / А.Д. Кутасов [и др.]. – Под ред. Г.Н. Яковлева. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 720 с.
16. Математика для школы [Электронный ресурс] / Задачи математических олимпиад. – Минск, 2018. – Режим доступа: http://math4school.ru/zadachi.html. – Дата доступа 14. 03. 2018.
17. Интернет-проект «Задачи» [Электронный ресурс] / Задачи олимпиад: помощь для преподавателей при подготовке уроков, кружков и факультативных занятий в школе – Москва, 2018. – Режим доступа: http://www.problems.ru. – Дата доступа 23. 03. 2018.
18. Национальный образовательный портал [Электронный ресурс] / Учебная программа факультативных занятий «Готовимся к олимпиадам по математике (VII-IX классы)». – Минск, 2018. – Режим доступа: http://www.adu.by/images/2016/09/fakul_Gotovimsya_k_olimpiadam_VII-IX_kl.docx. – Дата доступа 25. 03. 2018.
19. Образовательный онлайн-ресурс БГУ [Электронный ресурс] / Заочная школа Юного математика механико-математического факультета БГУ. – Минск, 2018. – Режим доступа: https://dl.bsu.by/course/index.php?categoryid=60. – Дата доступа 20. 05. 2018.
20. Школа юного математика механико-математического факультета Белорусского государственного университета [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://mmf.bsu.by/ru/shkola-yunogo-matematika/. – Дата доступа: 20.03.2018.
21. Дистанционная математическая школа механико-математического факультета БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://dl.bsu.by/course/index.php?categoryid=37. – Дата доступа: 20.03.2018.
22. Очно-заочная школа по математике и информатике факультета прикладной математики и информатики и ГУО "Институт повышения квалификации и переподготовки в области технологий информатизации и управления" БГУ [Электронный ресурс]. – Минск, 2018. – Режим доступа: http://www.school.bsu.by/. – Дата доступа: 25.03.2018.
23. «Заочная школа МИФИ» Дистанционные курсы для школьников 6-11 классов по математике, физике, химии, русскому языку [Электронный ресурс] / Дистанционные курсы. Подготовка к ЕГЭ и ГИА. – Москва, 2000. – Режим доступа: http://www.mifi.ru. – Дата доступа: 25.03.2018.
24. Институт информационных технологий математики и механики [Электронный ресурс] / Заочная школа по математике для 7-8-9 классов – Н. Новгород, 2015. – Режим доступа: http://www.itmm.unn.ru/postuplenie/zaochnaya-shkola-po-matematike-dlya-7-8-9-klassov/. – Дата доступа 25. 03. 2018.
25. Краевая заочная школа [Электронный ресурс] / ГБОУ ДОД "ПЦ "Муравейник" отдел Краевая заочная школа. – Россия, Пермь. – Режим доступа: http://muraveynik-perm.wixsite.com/muraveynik-perm. – Дата доступа: 25.03.2018.

26. Школа мастеров [Электронный ресурс] / Онлайн-школа олимпиадной математики: занятия олимпиадной математикой в заочном кружке для детей с 1 по 7 класс. – Москва, 1997. – Режим доступа: http://schoolmasters.ru/zaochnoe-obuchenie/. – Дата доступа 25. 03. 2018.

27. Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования «Ленинградский областной центр развития творчества одаренных детей и юношества «Интеллект» [Электронный ресурс] / Заочная математическая школа. – г. Санкт-Петербург, 2002. – Режим доступа: https://center-intellect.ru/zmsh/. – Дата доступа 25. 03. 2018.

28. Всесоюзная заочная математическая школа [Электронный ресурс] / Математическая школа для учащихся 5-11 классов. – Москва, 2012-2013. – Режим доступа: http://math-vzms.org/. – Дата доступа 25. 03. 2018.

29. Специализированный учебно-научный центр университета (СУНЦ НГУ) [Электронный ресурс] / Заочная школа специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета. – Новосибирск, 2011. – Режим доступа: http://sesc.nsu.ru/zfmsh/. – Дата доступа 25. 03. 2018.

30. Заочная школа математики Физического факультета БГУ [Электронный ресурс]. – Минск, 2018. – Режим доступа: http://www.physics.bsu.by/ru/entrants/schools/mathematics. – Дата доступа: 25.03.2018.

31. Заочная школа [Электронный ресурс] / Республиканская заочная школа общественного объединения «Белорусская ассоциация «Конкурс»». – Минск, 2018. – Режим доступа: https://www.bakonkurs.by/z_sch.php. – Дата доступа 25. 03. 2018.

32. Очно-заочная школа с дистанционным обучением [Электронный ресурс] / Очно-заочная школа Национального детского образовательно-оздоровительного центра "Зубренок" Министерства образования Республики Беларусь. – Минская область, 2018. – Режим доступа: http://zubronok.by/obrazovanie/shkola_ncc/ochno-zaochnaja. – Дата доступа 25. 03. 2018.

33. Заочная учебно-научная школа Тюменского государственного университета [Электронный ресурс]. – г. Тюмень, 2018. – Режим доступа: http://kd.utmn.ru/. – Дата доступа 25. 03. 2018.

34. Заочная математическая школа для обучающихся в 9 - 11 классах Башкирского государственного университета [Электронный ресурс]. – Республика Башкортостан, 2018. – Режим доступа: http://www.bashedu.ru/novosti-fakulteta-matematiki-i-informatsionnykh-tekhnologii/zaochnaya-matematicheskaya-shkola-dlya-o. – Дата доступа 25. 03. 2018.

35. Заочная школа МФТИ [Электронный ресурс] / Заочная физико-техническая школа Московского физико-технического института. – г. Долгопрудный, 2018. – Режим доступа: http://www.school.mipt.ru. – Дата доступа 25. 03. 2018.

36. Портал Дополненной Реальности [Электронный ресурс] / Augmented Reality. – Режим доступа: https://augmentedreality.by/dopolnennaya-realnost/. – Дата доступа 23. 05. 2018.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Пример занятия Заочной школы математики
Физического факультета
Белорусского государственного университета

Урок № 12. Четырехугольники. Трапеция

Задачи по планиметрии вызывают у абитуриентов особенные затруднения. Это связано с рядом причин. Во-первых, в школе планиметрию проходят по «темам», а на любых испытаниях предлагаются комплексные задачи. Во-вторых, в старших классах средней школы планиметрия не изучается вообще, поэтому ученики многое просто-напросто забывают. В наших уроках сделана попытка разбить задачи на темы, тем не менее, при их решении используются сведения из нескольких тем. Этот урок посвящен четырехугольникам и, как частному случаю, трапеции.

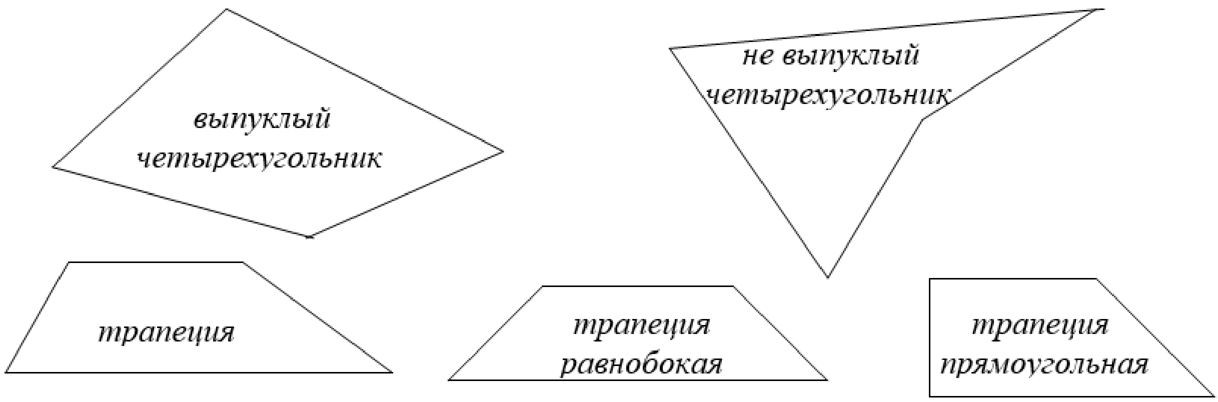

Рис. 1

Вначале проиллюстрируем рисунками некоторые общеизвестные определения и сведения (рис.1), а некоторые сформулируем.

1*. Сумма всех углов четырехугольника равна $360°$.

2*. Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность, и обратно, если в четырехугольник можно вписать окружность, то у него суммы противоположных сторон равны.

3*. Если суммы противоположных углов четырехугольника равны $180°$, то около него можно описать окружность, и обратно, если около четырехугольника можно описать окружность, то у него суммы противоположных углов равны $180°$.

4*. Если в многоугольник (произвольный) можно вписать окружность, то площадь этого многоугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

5*. Площадь произвольного четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Свойства трапеции.

6*. Сумма углов, прилежащих к каждой из боковых сторон трапеции, равна $180°$.

7*. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме

8*. Любую равнобедренную трапецию можно вписать в окружность, и обратно, если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная.

9*. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

10*. Треугольники AOD и COB, образованные основаниями и отрезками диагоналей трапеции (рис. 2), подобны, причем коэффициент подобия равен отношению оснований.

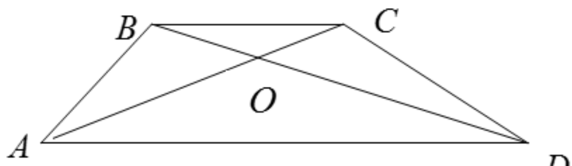

Рис.2

Примеры решения задач

Задачи №1 – №8 следует считать опорными, их результаты имеет смысл отложить в памяти, так как они довольно часто применяются при решении других задач. Для сокращения записи решения задач будем использовать общепринятые математические символы. Если в процессе преобразований приходится делать какие-либо пояснения или ссылки, то их поместим в квадратные скобки. Начало решения примера будем обозначать значком ►, конец – значком ◄.

Задача 1. Доказать, что четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника является параллелограммом. При каких условиях этот параллелограмм будет прямоугольником? ромбом? квадратом?

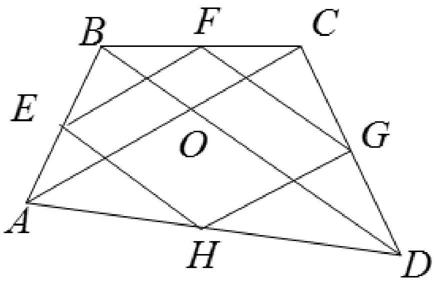

Рис.3

►На рисунке 3 точки E, F, G и H середины соответствующих сторон. В треугольнике ABC отрезок EF является средней линией, а в треугольнике ADC средней линией является HG. Поэтому $EF \| AC$ и $HG \| AC$. Кроме того, $EF = \frac{1}{2}AC = HG$. Аналогично доказывается, что $FG = \frac{1}{2}BD = EH$. Таким образом, в четырехугольнике $EFGH$ противоположные стороны равны и параллельны, значит, это параллелограмм.

Заметим, что на рис.3 $\angle EFG = \angle AOD$ (это углы со взаимно параллельными сторонами). Параллелограмм $EFGH$ будет прямоугольником в том случае, когда один из его углов (а, значит, и все остальные), прямой, т.е., когда диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Ромбом этот параллелограмм является тогда, когда имеет равные стороны, т.е., когда диагонали четырехугольника $ABCD$ равны, а квадратом – когда выполняются оба эти условия (т.е. когда диагонали четырехугольника $ABCD$ равны и взаимно перпендикулярны).◄

Задача 2. Доказать, что в трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

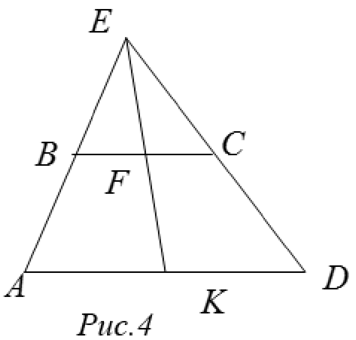

Рис.4

►Покажем вначале, что на одной прямой лежат середины оснований и точка пересечения продолжений боковых сторон. Обозначим буквой E точку пересечения продолжений боковых сторон, F – середину верхнего основания и покажем, что прямая, проходящая через E и F, пересекает нижнее основание в его середине. На рисунке 4 $\Delta BEF \sim \Delta AEK$, $\Delta CEF \sim \Delta DEK$. Составляем и приравниваем отношения сходственных сторон: $\frac{BF}{AK} = \frac{EF}{EK}$ ($\Delta BEF \sim \Delta AEK$), $\frac{CF}{DK} = \frac{EF}{EK}$ $(\Delta CEF \sim \Delta DEK)$ $\Rightarrow$ $\frac{BF}{AK} = \frac{CF}{DK}$. Так как $BF = CF$, то и $AK = DK$.

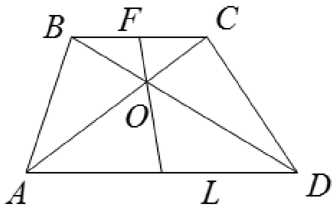

Рис.5

Теперь проведем прямую через середину верхнего основания F и точку O пересечения диагоналей (рис.5). Тогда $\Delta BOF \sim \Delta DOL$, $\Delta COF \sim \Delta AOL$, значит, $\frac{BF}{DL} = \frac{OF}{OL}$, $\frac{FC}{AL} = \frac{OF}{OL}$ $\Rightarrow$ $\frac{BF}{DL} = \frac{FC}{AL}$. Так как $BF = FC$, то и $AL = DL$.◄

Задача 3. Доказать, что в равнобедренной трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположное основание на отрезки, больший из которых равен полусумме оснований (средней линии трапеции), а меньший – их полуразности.

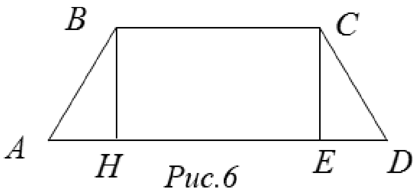

Рис.6

►Обозначим $a = AD$ и $b = BC$ (рис. 6). Трапеция равнобедренная, поэтому, если BH и CE – ее высоты, то $AH = ED = (a-b)/2$. Тогда $HD = HE + ED = b + (a-b)/2 = (a+b)/2$.◄

Задача 4. Диагонали трапеции делят ее на четыре тре ика. Доказать, что площади двух треугольников, прилежащих к боковым сторонам, равны. Найти площадь трапеции, если известны площади S_1 и S_2 треугольников, прилежащих к основаниям.

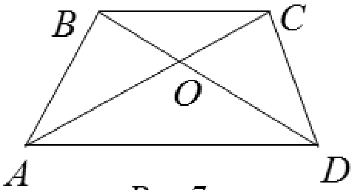

Рис.7

►На рис.7 треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и одинаковые высоты, значит, их площади равны. Поэтому

$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ADB} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AOD} = S_{\Delta COD}.$$

Пусть $S_{\Delta AOD}=S_1$, а $S_{\Delta BOC}=S_2$. Обозначим $S_{\Delta AOB}=S$. Покажем вначале, что произведения площадей треугольников, лежащих в вертикальных углах, совпадают (это свойство справедливо и для любого выпуклого четырехугольника). Действительно, если $\angle BOA=\alpha$, то

$$S_{\Delta BOC}\cdot S_{\Delta AOD}=(\frac{1}{2}BO\cdot OC\sin\alpha)(\frac{1}{2}AO\cdot OD\sin\alpha)=$$

$$=(\frac{1}{2}BO\cdot AO\sin(\pi-\alpha))(\frac{1}{2}OD\cdot OC\sin(\pi-\alpha))=S_{\Delta AOB}S_{\Delta DOC}.$$

Таким образом, $S^2=S_1S_2\ \Rightarrow\ S=\sqrt{S_1S_2}$, значит

$$S_{ABCD}=S_1+S_2+2S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2.$$

Ответ: $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$ ◄

Задача 5. Большее основание трапеции равно a, а меньшее – b. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

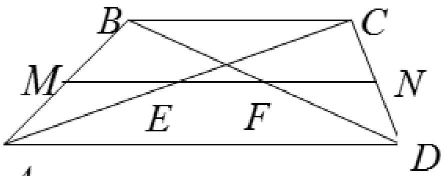

Рис.8

►На рис.8 MN – средняя линия трапеции. Покажем, что она проходит через середины диагоналей. Действительно, M – середина AB и $MN\|BC$, значит, $ME\|BC$, т.е. ME – средняя линия треугольника ABC, значит E – середина AC. Аналогично доказывается, что F – середина BD Точно так же можно показать, что средняя линия трапеции делит пополам любой отрезок с концами, лежащими на основаниях трапеции или их продолжениях. Теперь получаем: $ME=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}b$ (средняя линия ΔABC), $MF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}a$ (средняя линия ΔADC) $\Rightarrow$ $EF=MF-ME=\frac{a-b}{2}$. **Ответ:** $\frac{a-b}{2}$.◄

Задача 6. Большее основание трапеции равно a, меньшее – b, углы при одном из оснований трапеции в сумме составляют $90°$. Найти длину отрезка, соединяющего середины оснований.

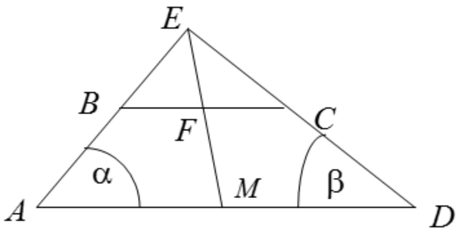

Рис.9

►Так как $\angle\alpha+\angle\beta=90°$, то на рис.9 ΔAED прямоугольный. Если F и M – середины оснований, то $EF=b/2$, $EM=a/2$ (свойство медианы в прямоугольном треугольнике), значит, $FM=EM-EF=(a-b)/2$.

Ответ: $(a-b)/2$ ◄

Задача 7. Около окружности описана трапеция. Доказать, что концы боковой стороны трапеции и центр окружности являются вершинами прямоугольного треугольника. Доказать, что произведение отрезков боковой стороны, на которые она разделена точкой касания, равно квадрату радиуса окружности.

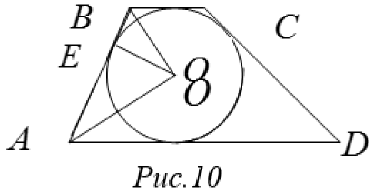

Рис.10

►Центр окружности, вписанной в угол, находится на биссектрисе этого угла. Поэтому $\angle ABO+\angle BAO=(\angle ABC+\angle BAD)/2=90^\circ \Rightarrow \angle AOB=90^\circ$ (рис.10). Если OE – радиус вписанной окружности, проведенный в точку касания, то это высота в прямоугольном треугольнике, проведенная из вершины прямого угла, которая равна среднему геометрическому отрезков, на которые она делит гипотенузу. Таким образом, $OE^2=AE\cdot BE$.◄

Задача 8. Доказать: если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то ее высота равна среднему геометрическому оснований.

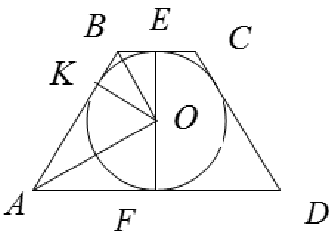

Рис.11

►Известно, что касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны. Так как трапеция равнобедренная, то на рис.11. $KB=BE=BC/2$, $AK=AF=AD/2$ Тогда

$$EF=2KO=2\sqrt{AK\cdot BK}=\sqrt{2AK\cdot 2BK}=\sqrt{AD\cdot BC}$$

◄

* * *

Задача 9. Около круга описан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке E. Радиусы окружностей, описанных около треугольников AEB, BEC и CED равны соответственно R_1, R_2 и R_3. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AED (R_4).

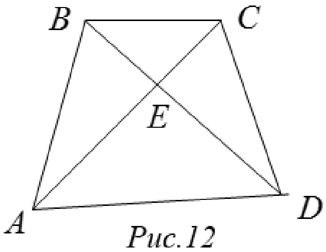

Рис.12

►Обозначим $\angle AEB=\alpha$ (рис. 12). Тогда и $\angle CED=\alpha$, а $\angle BEC=\angle AED=\pi-\alpha$. Значит, синусы всех этих углов равны между собой. По теореме синусов $\dfrac{AB}{\sin\angle AEB}=2R_1 \Rightarrow AB=2R_1\sin\angle AEB=2R_1\sin\alpha$.

Аналогично $BC=2R_2\sin\alpha$, $CD=2R_3\sin\alpha$, $AD=2R_4\sin\alpha$. Так в четырехугольник можно вписать окружность, то $AB+CD=BC+AD \Rightarrow R_1+R_3=R_2+R_4$ (2 и $\sin\alpha$ сокращаются). **Ответ:** $R_4=R_1+R_3-R_2$.◄

Задача 10. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого $BC\perp AD$. Отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD, равен 1. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей данного четырехугольника.

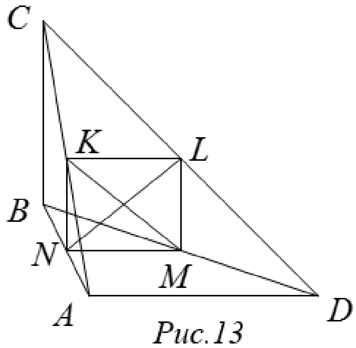

Рис.13

►Обозначим N и L – середины сторон AB и CD, а K и M – середины диагоналей AC и BD соответственно (рис. 13). Тогда KL – средняя линия треугольника ACD, а MN – средняя линия треугольника ABD. Поэтому $KL\parallel AD$ и $MN\parallel AD$. Аналогично получаем $KN\parallel BC$ и $LM\parallel BC$. Таким образом, противоположные стороны четырехугольника $KLMN$

попарно параллельны, т.е. это параллелограмм. Кроме того, $BC \perp AD$, значит, и $KN \perp MN$, что означает, что $KLMN$ – прямоугольник. Так как у прямоугольника диагонали равны, то $KM = LN = 1$. **Ответ:** 1.◄

Задача 11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Известно, что площадь каждого из треугольников AEB и CED равна 7, а площадь всего четырехугольника не превосходит 28, $AD = \sqrt{5}$. Найти BC.

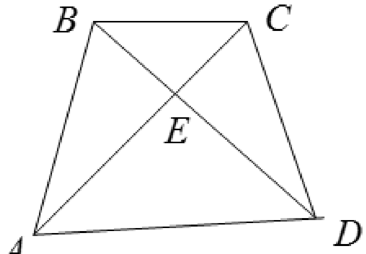

Рис.14

►Обозначим $S_{\Delta BEC} = S_1$, $S_{\Delta AED} = S_2$, $S_{\Delta AEB} = S_{\Delta CED} = S$. Так же как и при решении задачи 4 находим $S_1 \cdot S_2 = S^2 = 49$. На основании неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом, $S_1 + S_2 \geq 2\sqrt{S_1 S_2} = 14$. С другой стороны, из условия получаем $S_1 + S_2 \leq 14$. Таким образом, $S_1 + S_2 = 14$. В неравенстве о среднем арифметическом и среднем геометрическом знак равенства возможен только в том случае, когда числа одинаковые, поэтому $S_1 = S_2 = 7 = S$. Треугольники AEB и CEB имеют общую вершину B, а основания их лежат на одной прямой AC. В силу того, что равны площади этих треугольников, равны и длины их оснований, т.е. $AE = EC$. Аналогично получаем, что $BE = ED$. Это означает, что в четырехугольнике $ABCD$ диагонали в точке пересечения делятся пополам, значит, это параллелограмм. Поэтому $AD = BC = \sqrt{5}$. **Ответ:** $\sqrt{5}$ ◄

Вы, наверно, заметили, что рисунок не соответствует окончательному выводу. Это не страшно, недаром говорят, что геометрия – это искусство правильно рассуждать по неправильному чертежу.

Задача 12. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M и N являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD и AD, O – точка пересечения отрезков KM и LN. Известно, что $\angle LOM = \pi/2$, $KM = 3LN$, а площадь четырехугольника $KLMN$ равна 3. Найти длины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

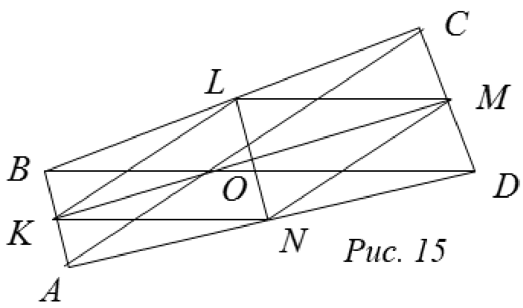

Рис. 15

►Из задачи 1 вытекает, что четырехугольник $KLMN$ – параллелограмм, причем, т.к. его диагонали взаимно перпендикулярны, то это ромб. Учитывая, что одна из диагоналей этого ромба в три раза больше другой, и что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей, получаем:

$$3 = KM \cdot LN/2 = 3LN^2/2 \Rightarrow LN = \sqrt{2} \Rightarrow LO = \sqrt{2}/2 \Rightarrow KO = 3\sqrt{2}/2.$$

По теореме Пифагора из треугольника KOL находим $KL = \sqrt{KO^2 + OL^2} = \sqrt{20/4} = \sqrt{5}$. Тогда $AC = BD = 2KL = 2\sqrt{5}$. **Ответ:** $2\sqrt{5}$ ◄

Задача 13. В равнобедренную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон трапеции точкой касания делится на отрезки длиной m и n. Найти площадь трапеции.

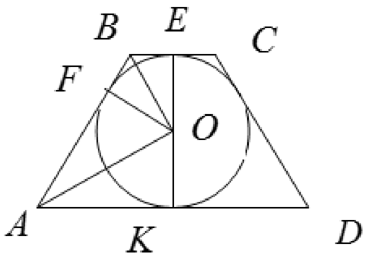

Рис.16

►Касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны, поэтому $BC = 2BE = 2BF = 2m$, $AD = 2AK = 2AF = 2n$. Из задачи 8 получаем $EK = 2\sqrt{mn}$. Тогда $S_{ABCD} = (AD + BC)\cdot EK/2 = 2(m+n)\sqrt{mn}$.

Ответ: $2(m+n)\sqrt{mn}$ ◄

Задача 14. Диагонали трапеции $ABCD$ равны 26 и 30, расстояние между серединами оснований равно 14. Найти площадь трапеции.

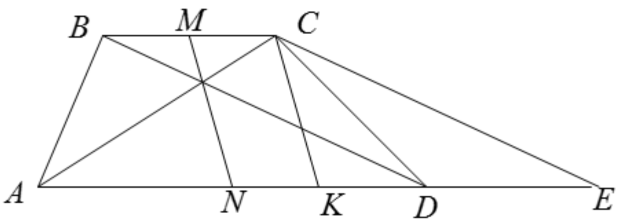

Рис. 17

►На рис. 17 $AC = 26$, $BD = 30$, M – середина BC, N – середина AD, $MN = 14$. Через точку C проведем $CK \| MN$, $CE \| BD$ (E – точка пересечения этой прямой с продолжением основания AD).

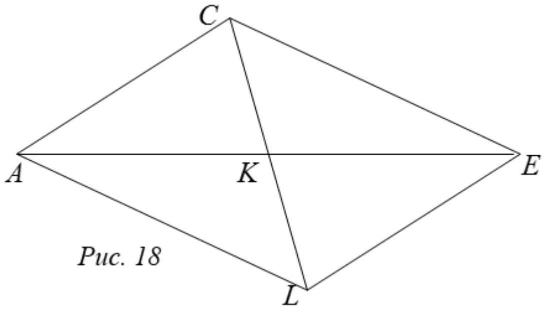

Рис. 18

Четырехугольник $BCED$ является параллелограммом (противоположные стороны параллельны) поэтому $BC = DE$. Треугольники ABC и CDE имеют одинаковые основания и высоты, поэтому и площади у них совпадают. Тогда $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ECD} + S_{ACD} = = S_{ACE}$. В треугольнике ACE известны стороны $AC = 26$, $CE = BD = 30$. Кроме того, $AK = AN + NK = AD/2 + BC/2 = (AD + DE)/2 = AE/2$, т.е. AK – медиана. Таким образом, вычисление площади трапеции свелось к вычислению площади треугольника, в котором известны две стороны и медиана, проведенная к третьей стороне. Сделаем вспомогательный рисунок (рис.18), на котором треугольник ACE достроим до параллелограмма $ACEL$, медиану CK продлим, и получим диагональ параллелограмма CL. Тогда $CL = 2CK = 28$, $S_{ACE} = S_{ACL}$, а площадь последнего можно найти по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{42\cdot 14\cdot 12\cdot 16} = \sqrt{6^2\cdot 7^2\cdot 2^6} = 336$. **Ответ:** 336. ◄

Задача 15. Длины оснований трапеции равны 25 и 4, а длины боковых сторон – 20 и 13. Найти площадь трапеции.

►Проведем $BE \| CD$ (рис.19). Тогда $BE = CD = 20$, $AE = AD - ED = 21$, $S_{ABE} = \sqrt{27 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 14} = \sqrt{3^4 \cdot 7^2 \cdot 2^2} = 126$. Зная площадь треугольника и его основание, высоту можно найти. В этой задаче можно обойтись и без нее, если заметить, что

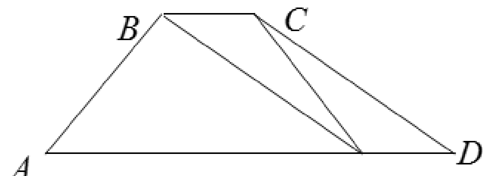

Рис.19

$S_{\Delta BCE} / S_{\Delta ABE} = BC/AE = 4/21$. Тогда $S_{BCE} = \dfrac{4}{21} S_{ABE} = 24$,

$S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{BCDE} = S_{ABE} + 2S_{BCE} = 174$. **Ответ:** 174.◄

Задача 16. Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AB в точке B. Найти длину диагонали BD, если длины оснований равны 2 и 8.

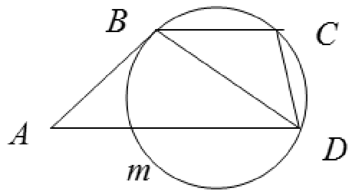

Рис.20

►Покажем, что треугольники ABD и BCD на рис. 20 подобны. Действительно, $\angle CBD = \angle BDA$ (внутренние накрест лежащие при параллельных AD и BC и секущей BD), $\angle ABD = \dfrac{1}{2} \cup BmD$ (угол между касательной и хордой, $\angle BCD = \dfrac{1}{2} \cup BmD$ (вписанный угол), значит $\angle ABD = \angle BCD$. Приравниваем отношения сходственных сторон треугольников ABD и BCD, т. е сторон, лежащих против равных углов: $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$, откуда $BD^2 = AD \cdot BC = 16 \Rightarrow BD = 4$. **Ответ:** 4.◄

Задача 17. Основания трапеции a и b. Найти длину отрезка, параллельного основаниям, с концами на боковых сторонах трапеции, делящего ее площадь пополам.

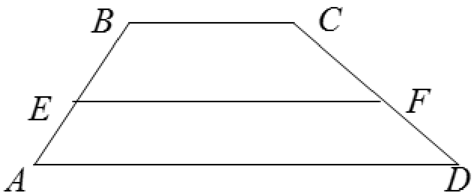

Рис. 21

►Пусть a – нижнее основание трапеции, а b – ее верхнее основание. Обозначим x искомый отрезок, h_1 и h_2 – высоты трапеций, прилежащие соответственно к верхнему и к нижнему основаниям. Тогда в силу равенства площадей:

$$\begin{cases}(a+b)(h_1+h_2) = 2(a+x)h_1, \\ (a+b)(h_1+h_2) = 2(b+x)h_2,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(a+2x-b)h_1 = (a+b)h_2, \\ (b+2x-a)h_2 = (a+b)h_1,\end{cases} \Leftrightarrow \quad (a+2x-b)(b+2x-a)h_1h_2 = (a+b)^2 h_1h_2 \quad \Rightarrow$$

$4x^2 = (a-b)^2 + (a+b)^2 = 2(a^2+b^2) \Rightarrow x = \sqrt{(a^2+b^2)/2}$ **Ответ:** $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$.◄

Задача 18. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из ее боковых сторон на три равные части. Найти площадь средней части, если площади крайних S_1 и S_2.

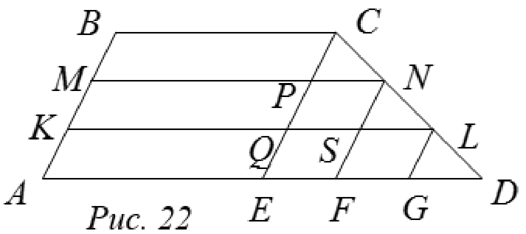

Рис. 22

►На рис.22 $MN \| KL \| BC \| AD$, $AK = KM = MB$. Проведем $CE \| NF \| LG \| AB$. На основании теоремы Фалеса и свойств параллелограмма $PN = QS = SL = EF = FG = GD$. Обозначим x длину этого отрезка, b – длину верхнего основания, h – высоту всех трех трапеций. Тогда

$$S_{AKLD} + S_{MBCN} = \frac{1}{2}((AD + KL) + (MN + BC))h = \frac{1}{2}(b + 3x + b + 2x) + (b + x + b))h =$$

$= (2b + 3x)h = (MN + KL)h = 2S_{KMNL}$; $S_{KMNL} = (S_1 + S_2)/2$. **Ответ:** $(S_1 + S_2)/2$ ◄

Задача 19. В трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$) диагонали AC и BD пересекаются в точке K, отношение площадей треугольников AKD и BKC равно 9. Найти отношение площади трапеции к площади треугольника ABC.

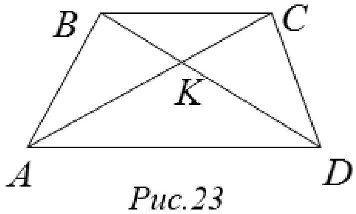

Рис.23

►Если $S_{BKC} = S_1$, $S_{AKD} = S_2$, то $S_{ABCD} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$, $S_{ABC} = \sqrt{S_1 S_2}$ (см. задачу 4), значит $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{ABC}} = \dfrac{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}{S_1 + \sqrt{S_1 S_2}} = \dfrac{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}{\sqrt{S_1}(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})} = \dfrac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} = 1 + \sqrt{\dfrac{S_2}{S_1}} = 4$

Ответ: 4. ◄

Задача 20. Перпендикуляр к боковой стороне AB трапеции $ABCD$, проходящий через ее середину K, пересекает сторону CD в точке L. Площадь $AKLD$ в 5 раз больше площади $BKLC$, $CL = 3, DL = 15, KC = 4$. Найти длину KD.

►Так как $DL/CL = 5$, то $S_{KLD} = 5S_{KLC}$, $S_{AKLD} = S_{AKD} + S_{KLD} = S_{AKD} + 5S_{KLC}$.

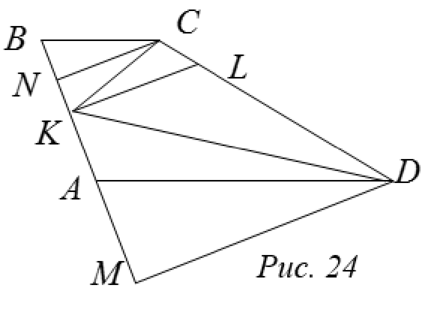

Рис. 24

Но $S_{AKLD} = 5S_{BKLC} = 5S_{BKC} + 5S_{KLC}$, значит, $S_{AKD} = 5S_{BKC}$. В треугольниках BKC и AKD проведем высоты CM и DN соответственно и покажем, что треугольники MKC и KDN подобны. Действительно, они оба прямоугольные, $\dfrac{MK}{KN} = \dfrac{CL}{LD} = \dfrac{1}{5}$ (теорема Фалеса), $\dfrac{CM}{DN} = \dfrac{S_{KBC}}{S_{AKD}} = \dfrac{1}{5}$ (эти треугольники имеют одинаковые основания), значит, $\dfrac{CK}{KD} = \dfrac{1}{5}$. Таким образом, $KD = 20$. **Ответ:** 20.◄

Задача 21. В трапеции $ABCD$ заданы основания $BC = 20$, $AD = 30$ и боковые стороны $AB = 6$, $CD = 8$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и B, и касающейся стороны CD или ее продолжения.

►Проведем $BF \| CD$ (рис 25). В треугольнике ABF $AB = 6$, $BF = CD = 8$, $AF = AD - BC = 10$, значит, он прямоугольный, $BF \perp AB$. Центр окружности,

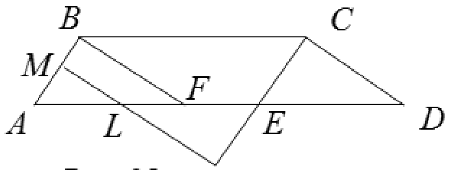

Рис. 25

проходящей через точки A и B, находится на серединном перпендикуляре отрезка AB. Если LK – этот серединный перпендикуляр, то $BF \| LK$. Тогда и $CD \| LK$. Так как окружность касается прямой CD, а ее центр лежит на параллельной прямой LK, то радиус окружности совпадает с расстоянием между этими параллельными прямыми. Если $DK \perp CD$, то $R = DK$. На рисунке 25 $AL = AB/2 = 3$, $AE = AF/2 = 5$, $ED = AD - AE = 25$. Из подобия треугольников ALE и DKE получаем: $\dfrac{DK}{AL} = \dfrac{DE}{AE} \Rightarrow DK = \dfrac{AL \cdot DE}{AE} = \dfrac{3 \cdot 25}{5} = 15$. **Ответ:** 15.◄

Задача 22. В трапеции $ABCD$ $\angle BAD = 90°$, $\angle ADC = 30°$. Окружность, центр которой принадлежит основанию AD, касается прямых AB, BC, CD. Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен R.

►На рисунке 26 O – центр заданной окружности, $OE \perp BC$, $OF \perp CD$, $\angle BCO = \angle BCD/2 = 75°$. Из прямоугольных треугольников OEC и OFD находим: $OD = 2OF = 2R$, $EC = EO\,\mathrm{ctg}\,75° = R\,\mathrm{tg}\,15°$. Так как

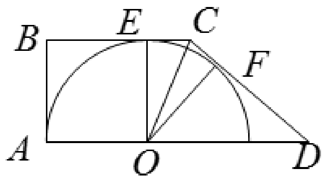

Рис. 26

$\mathrm{tg}\,15° = \mathrm{tg}(45° - 30°) = \dfrac{\mathrm{tg}\,45° - \mathrm{tg}\,30°}{1 + \mathrm{tg}\,45°\,\mathrm{tg}\,30°} = \dfrac{1 - 1/\sqrt{3}}{1 + 1/\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \dfrac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$, то $AD + BC = 4R + (2 - \sqrt{3})R = (6 - \sqrt{3})R$. Тогда $S_{ABCD} = (6 - \sqrt{3})R^2/2$.

Ответ: $(6 - \sqrt{3})R^2/2$.◄

Конечно, на нескольких страницах трудно изложить все интересные задачи. Внимательный ученик заметил, наверное, что во всех приведенных здесь задачах нет громоздких вычислений, все сложности ушли в теорию. Именно такие задачи и используются при тестировании.

Задачи для самостоятельного решения

1. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны 1 и 2. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M и N являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD и AD, O – точка пересечения отрезков KM и LN. Известно, что $\angle LOM = \pi/3$, $KM = a$, $LN = b$. Найдите длины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

3. Боковые стороны трапеции равны 5 и 11. Диагональ трапеции делит ее площадь в отношении 3:5. Найдите основания трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

4. Найти площадь трапеции, если известно, что при последовательном соединении середин ее сторон получается квадрат, длина стороны которого равна a.

5. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Расстояния от центра окружности до концов боковых сторон равны 8 и 15. Найдите периметр трапеции.

6. В трапеции длины оснований равны 5 и 15, а длины диагоналей – 12 и 16. Найдите площадь трапеции.

7. В трапеции с основаниями a и b через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции.

8. В трапеции $ABCD(AD \| BC)$ диагонали AC и BD в точке O. Площадь треугольника BOC равна S, $BC:AD=1:2$. Найдите площадь трапеции.

9. Диагональ равнобедренной трапеции равна 5, а площадь 12. Найдите высоту трапеции.

10. Длины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 8 и 10, а длина основания BC равна 2. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

11. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны, большая из них точкой пересечения делится на отрезки, равные 36 и 64. Найдите основания трапеции.

Ответы. 1. 1.**2.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2 \pm ab}$. **3.** 6 и 10. **4.** $2a^2$. **5.** $1058/17$. **6** 96. **7.** $2ab/(a+b)$. **8.** $9S$. **9.** 3 или 4. **10.** 40. **11.** 45 и 80.

Подготовила кандидат физ.-мат. наук, доцент Березкина Л.Л.

Источник: http://www.physics.bsu.by/sites/default/files/files/docs/entrants/zips/les12_math_tr.zip

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Пример заданий Заочной школы математического отделения Новосибирского государственного университета специализированного учебно-научного центра

5-11 классы Задание № 1 (2017 г.)

5 класс

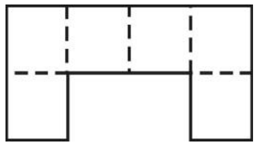

Рис. 2

1. Фигуру, составленную из шести равных квадратов (рис. 1), разделите на четыре одинаковые фигуры.
2. Автомобиль от пункта А до пункта Б с некоторой постоянной скоростью едет 25 минут. Если бы он двигался со скоростью на 3 км/ч больше, то весь путь проехал бы за 24 минуты. Найдите расстояние от пункта А до пункта Б.
3. Найдите количество трехзначных натуральных чисел, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, в записи которых не встречается цифра 9.
4. Одну из сторон квадрата увеличили на 3 см, другую – уменьшили на 2 см, и получили прямоугольник, площадь которого на 30 см^2 больше площади квадрата. Найдите сторону этого квадрата.
5. Найдите сумму $2017 - 2015 + 2013 - 2011 + \ldots + 5 - 3 + 1$.
6. Лист бумаги разрезали на три части. Затем некоторые из полученных частей также разрезали на три части каждую, и так проделали несколько раз. Может ли при подсчете количества всех частей получиться число 2018, и почему?

6 класс

1. В выражении $2 : 3 : 4 : 5$ расставьте скобки так, чтобы получилось наибольшее число.
2. Алеша проехал первую половину некоторого пути на велосипеде со скоростью 12 км/ч, а вторую прошел пешком со скоростью 4 км/ч. Боря весь этот путь бежал со скоростью 7 км/ч. Кто из мальчиков затратил на весь путь больше времени?
3. Найдите различные натуральные числа m и n такие, что
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{7}.$$
4. Найдите сумму $2017 - 2014 + 2011 - 2008 + \ldots + 7 - 4 + 1$.
5. Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых все цифры различны и одна из них не равна 5.
6. Фигуру, составленную из трех равных квадратов (Рис. 2),
разделите на восемь одинаковых фигур.

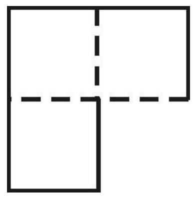

Рис. 3

7 класс

1. Для новогодних подарков закупили 42 шоколадки трех видов: по 50 руб., по 60 руб. и по 70 руб., затратив на них 2500 рублей. Найдите, каких шоколадок, первого или третьего вида, было закуплено больше, и насколько.

2. Найдите, чему равен наименьший периметр прямоугольника, который можно составить из 300 маленьких прямоугольников размера 1×2 см.

3. Найдите различные натуральные числа m и n такие, что
$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{13}.$$

4. Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых сумма первой и третьей цифры равна 11.

5. Найдите семь последовательных натуральных чисел, сумма которых равна сумме некоторых четырех последовательных натуральных чисел.

6. Лист бумаги разрезали на четыре части. Затем некоторые из полученных частей также разрезали на четыре части каждую, и так проделали несколько раз.

Может ли при подсчете количества всех частей получиться число 2018, и почему?

8 класс

1. Цену товара увеличили на 28 %. Найдите, сколько процентов составляет повышение цены товара от его новой цены.

2. Представьте число $\sqrt{76-42\sqrt{3}}$ в виде $a+b\sqrt{3}$, где a и b – целые числа.

3. В выражение $\frac{3n+7}{3n-7}$ вместо n подставляются натуральные числа. Найдите,

при каком n полученное значение будет наименьшим.

4. В прямоугольнике $ABCD$ точки M и N середины сторон AB и CD соответственно. Через точку M проводится прямая, пересекающая диагональ AC в точке P и луч CB в точке Q. Докажите, что

$\angle MNP = \angle MNQ$.

5. Найдите сумму $2017-2010+2003-1996+\ldots+15-8+1$.

6. Найдите девять последовательных натуральных чисел, сумма которых равна сумме некоторых семи последовательных натуральных чисел.

9 класс

1. Найдите, при каком наименьшем значении a уравнение
$$|x-1|+|x-2|+|x-4|+|x-7|=a$$
имеет решения.

2. По дорожке стадиона длиной 400 м из одной точки одновременно в одном направлении выбегают три спортсмена со скоростями 12 км/ч, 15 км/ч и 17 км/ч. Найдите, через какое наименьшее время спортсмены поравняются.

3. Составьте уравнение четвертой степени с целыми коэффициентами, два корня которого есть числа $2+\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}-2$.

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 9$ и $BC = 7$ угол при вершине A прямой, а диагональ AC перпендикулярна стороне CD. Найдите отношение $AB : CD$.

5. Докажите, что число $200^4 + 201^4 + 200^2 \cdot 201^2$ составное.

6. Докажите, что на клетчатой бумаге, составленной из квадратов со стороной 1, не существует двух вершин, расстояние между которыми равно $1000\sqrt{3}$.

10 класс

1. Рыбаки поймали не менее 30 и не более 100 рыб, из которых 48 % окуней. Пять рыб было отпущено в озеро. После этого оказалось, что среди оставшихся рыб 50 % составляют окуни. Найдите, сколько рыб поймали рыбаки.

2. Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющих соотношению $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$.

3. Найдите все действительные корни уравнения

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{4x^2+12x+9}=6.$$

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 5$ и $BC = 3$ диагональ AC перпендикулярна стороне CD. Найдите площадь этой трапеции.

5. Докажите, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, то $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}$.

6. Докажите, что на клетчатой бумаге, составленной из квадратов со стороной 1, не существует двух вершин, расстояние между которыми равно $1000\sqrt{3}$.

11 класс

1. Рыбаки поймали не менее 30 и не более 100 рыб, из которых 48 % окуней. Пять рыб было отпущено в озеро. После этого оказалось, что среди оставшихся рыб 50 % составляют окуни. Найдите, сколько рыб поймали рыбаки.

2. Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых ровно две цифры совпадают.

3. В четырехугольник $ABCD$ с неравными сторонами AB и CD вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M и N соответственно. Докажите, что прямые AC, KL и MN имеют общую точку.

4. Найдите, на какую наибольшую степень числа 3 делится произведение всех натуральных чисел от 1 до 2017 включительно.

5.Решите систему из двух уравнений $x+y^2=2$ и $x^2+y=2$.

6. Для каждого значения a находят наибольшее значение функции $f(x) = (a+1)\,sin2x + (a-3)\,cos2x$, равное $M(a)$. Найдите, чему равно наименьшее значение $M(a)$.

Разработка задания: к. п.н., доцент Ю. В. Михеев, к.ф.-м. н., профессор А.С. Марковичев.

Источник: http://sesc.nsu.ru/zfmsh/1st-tasks.html?download=7%3Am-5-11-1

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Пример занятия Заочной школы юного математика
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета

9 класс

Занятие 3. Взаимно простые числа. НОД, НОК. Простые числа

Краткий теоретический материал с примерами

Определение 1
Два числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих натуральных делителей, кроме единицы.

Теорема 1
Если числа a и b взаимно просты, то существуют такие два целых числа x_0 и y_0, что $ax_0 + by_0 = 1.$
Теорема 2
Если число a делится на каждое из двух взаимно простых чисел b и c, то оно делится и на их произведение bc.
Теорема 3
Если произведение ab делится на число c, причем числа a и c взаимно простые, то b делится на c.
Теорема 4 (Основная теорема арифметики)
Каждое натуральное число, большее единицы, представимо в виде произведения простых чисел, причём единственным способом с точностью до порядка следования сомножителей.

Определение 2
Общим делителем чисел a и b называется число, на которое делятся оба числа a и b. Наибольший общий делитель чисел a и b обозначается $\text{НОД}(a;b)$.

Способ нахождения $\text{НОД}(a;b)$ состоит в разложении чисел a и b на простые множители, отыскании общих множителей, входящих в оба разложения, и вычислении произведения общих простых множителей в наименьших степенях, с которыми эти множители входят в разложение a и b.

Определение 3
Общим кратным чисел a и b называется число, которое делится на a и на b. Наименьшее общее кратное обозначается $\text{НОК}(a;b)$.

Для нахождения $\text{НОК}(a;b)$ можно разложить на простые множители a и b и вычислить произведение всех простых множителей, входящих хотя бы в одно

из разложений, причем простые множители, входящие в оба разложения, надо брать в наибольшей из степеней, с которыми этот множитель входит в разложение a и b.
Заметим, что $\text{НОД}(a;b) \cdot \text{НОК}(a;b) = ab.$

Определение 4
Простое число – это натуральное число, имеющее ровно два различных натуральных делителя: единицу и само себя. Все остальные натуральные числа, кроме единицы, называются составными. Таким образом, все натуральные числа больше единицы разбиваются на простые и составные.

Приведём некоторые свойства простых чисел:

• Простых чисел бесконечно много.

• **Теорема.** Если натуральное число p, большее единицы, не делиться ни на одно из простых чисел, квадраты которых не превосходят p, то число p простое.

• Если p – простое, и p делит $a \cdot b$, то p делит a или b.

• **Малая теорема Ферма.** Если p – простое, a – натуральное, то $a^p – a$ делится на p.

• **Теорема Вильсона.** Натуральное $p > 1$ является простым тогда и только тогда, когда $(p – 1)! + 1$ делится на p.

• **Постулат Бертрана.** Если $n > 1$ – натуральное, то существует простое p, такое, что $n < p < 2n$.

• **Теорема Ферма.** Каждое простое число вида $4k + 1$ есть сумма двух квадратов натуральных чисел.

Пример 1

Докажите, что ни для какого натурального n число $n(n + 1)$ не может быть степенью натурального числа.

Решение:

Предположим, что $n(n + 1) = m^k$, где m и k — натуральные числа, $k \geq 2$. Числа n и $n + 1$ взаимно простые, поэтому $n = a^k$ и $n + 1 = b^k$, где a и b — натуральные числа. Ясно, что $b > a$.

Но $(a+1)^k > (a+1)\cdot a^{k-1} = a^k + a^{k-1} \geq n+1$.
Поэтому $b^k \geq (a+1)^k > n+1$.

Пример 2

Докажите, что

$$НОД(a, НОД(b,c)) = НОД(НОД(a,b),c) = НОД(a,b,c).$$

Решение:

Пусть наибольшая степень простого числа p, на которую делятся a, b, c, равна α, β, γ. Требуется доказать, что

$$min(\alpha, min(\beta,\gamma)) = min(min(\alpha,\beta),\gamma)) = min(\alpha,\beta,\gamma),$$

где $min(x,y)$ — наименьшее из чисел x и y. Это утверждение о наименьших числах очевидно.

Пример 3

Найдите все целые числа n, для которых модуль значения трёхчлена $n^2 - 7n + 10$ будет простым числом.

Решение:

Так как

$$|n^2 - 7n + 10| = |n-2| \cdot |n-5|,$$

то следует искать такие n при которых один из множителей последнего произведения равен 1, а второй является простым числом. Этому требованию удовлетворяют $n=3$ и $n=4$.

Ответ:
$n=3, n=4$.

Пример 4

Найдите все простые p такие, что число p^2+11 имеет ровно 6 различных делителей (включая единицу и само число).

Решение:

Заметим, что $p^2+11=p^2-1+12=(p-1)(p+1)+12$.
Если $p>5$ и простое, то числа $p-1$ и $p+1$ оба четные, и одно из них кратно трем. Поэтому произведение $(p-1)(p+1)$ делится на 12, следовательно, p^2+11 также делится на 12, а значит, имеет не менее семи делителей (6 делителей числа 12 и само число $p^2+11>12$). Осталось проверить $p=2$ и $p=3$.
Если $p=2$, то $p^2+11=2^2+11=15$ имеет 4 делителя ($1,3,5,15$).
Если $p=3$, то $p^2+11=3^2+11=20$ имеет 6 делителей ($1,2,4,5,10,20$).

Ответ:
$p=3$.

Пример 5
Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

Решение:

$1995=3\cdot5\cdot7\cdot19$. Надо разбить это произведение на две группы: часть множителей войдёт в исходное число, а другая часть будет его цифрами. Ясно, что 19 войдёт в искомое число (цифры "19": нет!). Остаётся несложный перебор, который даёт единственный ответ: $57\cdot5\cdot7=1995$.

Ответ:
57.

Задание для самостоятельной работы

Задача 1

Доказать, что дробь $\frac{12n+1}{30n+1}$ несократима.

Задача 2

Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное (НОК) равно 2000?

Задача 3

На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3m-n}{5n+2m}$, если известно, что она сократима и что числа m и n взаимно просты.

Задача 4

Наибольший общий делитель натуральных чисел m и n равен 1. Каково наибольшее возможное значение $\text{НОД}(m+2000n, n+2000m)$?

Задача 5

Известно, что числа n и 6 взаимно просты. Докажите, что число n^2 при делении на 24 дает в остатке 1.

Задача 6

Найти все натуральные числа n, для которых каждое из шести чисел $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ и $n+15$ является простым.

Задача 7

Докажите, что при любом натуральном n число $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ имеет не менее n различных простых делителей.

Задача 8

Существуют ли пять таких двузначных составных чисел, что каждые два из них взаимно просты?

Задача 9

Найдите два таких простых числа, что и их сумма, и их разность – тоже простые числа.

Задача 10

Найдите все пары $(p;q)$ простых чисел, удовлетворяющих равенству $p^5+p^3+2=q^2-q$.

Решение заданий для самостоятельной работы

Задача 1

Доказать, что дробь $\frac{12n+1}{30n+1}$ несократима.

Решение:

$5(12n+1)–2(30n+1)=3$, поэтому $\text{НОД}(12n+1, 30n+1)$ равен 3 или 1. Но $12n+1$ на 3 не делится.

Задача 2

Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное (НОК) равно 2000?

Решение:

Рассмотрим две возможности.

1) Одно из чисел равно 2000. Тогда другое число может быть любым делителем числа 2000. Поскольку $2000=2^4\cdot 5^3$, оно имеет 20 делителей.

2) Ни одно из двух чисел a, b не равно 2000. Тогда в разложении одного из этих чисел a, b (для определенности, a) на простые сомножители должен присутствовать множитель 2^4, а в разложении другого –

множитель 5^3. Таким образом, $a = 2^4 \cdot 5^m$, $b = 2^n \cdot 5^3$, где m может принимать 3 значения $(0, 1, 2)$, и независимо от этого n может принимать 4 значения $(0, 1, 2, 3)$. Таким образом, в этом случае имеется $3 \cdot 4 = 12$ возможностей.
Итак, имеется $20 + 12 = 32$ пары натуральных чисел, имеющие $\text{НОК} = 2000$.

Ответ:
32 пары.

Задача 3

На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3m - n}{5n + 2m}$, если известно, что она сократима и что числа m и n взаимно просты.

Решение:

Если $3m – n$ и $5n + 2m$ делятся на d, то и числа $17m = 5(3m – n) + 5n + 2m$ и $17n = 3(5n + 2m) – 2(3m – n)$ делятся на d. Но $\text{НОК}(17m, 17n) = 17$. Значит, $d = 17$. Это возможно, например, при $m = 1$, $n = 3$ (или при $m = 6$, $n = 1$).

Ответ:
На 17.

Задача 4
Наибольший общий делитель натуральных чисел m и n равен 1. Каково наибольшее возможное значение $\text{НОД}(m + 2000n, n + 2000m)$?

Решение:

Пусть $a = 2000m + n$, $b = 2000m + n$, $d = \text{НОД}(a, b)$. Тогда d делит также числа $2000a – b = (2000^2 – 1)m$ и $2000b – a = (2000^2 – 1)n$.
Поскольку m и n взаимно просты, то d делит $2000^2 – 1$.
С другой стороны, при $m = 2000^2 – 2000 – 1$, $n = 1$, получаем $a = (2000^2 – 1)(2000 – 1)$, $b = 2000^2 – 1 = d = 3999999$.

Ответ:
3999999.

Задача 5
Известно, что числа n и 6 взаимно просты. Докажите, что число n^2 при делении на 24 дает в остатке 1.

Решение:

Число n не является четным числом, так как n и 6 взаимно просты. $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ – произведение двух последовательных четных чисел, поэтому $n^2 - 1$ кратно 8. Число n не кратно 3, так как n и 6 взаимно просты, значит $n - 1$ или $n + 1$ кратно 3.

Итак, $n^2 - 1$ делиться на 3. Числа 3 и 8взаимно просты,
поэтому $n^2 - 1$ делиться на 24 (их произведение), т.е. $n^2 = 24m + 1$.

Задача 6

Найти все натуральные числа n, для которых каждое из шести чисел
$n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$ и $n + 15$
является простым.

Решение:

Рассмотрим варианты. Для $n = 1$ число $n + 3 = 4$ составное.
Для $n = 2$ число $n + 7 = 9$ составное.
Для $n = 3$ число $n + 1 = 4$ составное.
Для $n > 4$ все наши числа больше 5 и по крайней мере одно из них делится на 5, так как числа $1, 3, 7, 9, 13$ и 15 при делении на 5 дают соответственно остатки $1, 3, 2, 4, 3$ и 0, то есть все возможные остатки, откуда следует, что и числа
$n + 1, n + 3, n + 7, n + 9, n + 13$ и $n + 15$
при делении на 5 дают все возможные остатки и, следовательно, хотя бы одно из них делится на 5 и как число, большее пяти (так как $n > 4$), является составным.
Но для $n = 4$ мы получаем простые числа $5, 7, 11, 13, 17$ и 19.

Ответ:
$n = 4$.

Задача 7

Докажите, что при любом натуральном n число $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ имеет не менее n различных простых делителей.

Решение:

Воспользуемся тождеством $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1 - x) \cdot (x^2 + 1 + x)$.
При $x = 2^{2^{n-2}}$ получаем, что рассматриваемое число является произведением чисел $2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-2}} + 1$ и $2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-2}} + 1$. Эти числа взаимно просты, поскольку они нечётны, а их разность равна $2^{2^{n-2}} + 1$.
Теперь можно воспользоваться индукцией по n, поскольку число $2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-2}} + 1$ имеет тот же самый вид.

Задача 8

Существуют ли пять таких двузначных составных чисел, что каждые два из них взаимно просты?

Решение:

Каждое из составных чисел является произведением, по крайней мере, двух простых чисел. В каждом из таких произведений не может быть больше одного двузначного сомножителя, иначе это произведение будет, как минимум, трёхзначным. Значит, в разложении на простые множители каждого из искомых двузначных чисел должно присутствовать однозначное простое число. Но простых однозначных чисел всего четыре: 2, 3, 5 и 7. Следовательно, среди любых пяти составных двузначных чисел найдутся два, у которых будет общий делитель, отличный от 1.

Ответ:
Не существуют.

Задача 9
Найдите два таких простых числа, что и их сумма, и их разность – тоже простые числа.

Решение:

Если оба числа нечётны, то и сумма их, и разность будут чётны, а чётное простое число всего одно. Это значит, что среди искомых простых чисел обязательно одно чётное, то есть равно 2. Поэтому разность, второе число и сумма являются последовательными нечётными числами. Среди таких чисел одно обязательно делится на 3. Значит, одно из них равно 3. Итак, одно из чисел равно 2, разность (или сумма) равна 3. Единственная возможность – искомые числа 2 и 5.

Ответ:
2 и 5.

Задача 10
Найдите все пары $(p;q)$ простых чисел, удовлетворяющих равенству $p^5+p^3+2=q^2-q$.

Решение:

Если $p=2$ или $p=3$, то, решая получающееся квадратное относительно q уравнение, находим соответственно $q=7$ и $q=17$. Пусть теперь $p>3$. Перепишем уравнение в виде:

$$p^3(p^2+1)=(q+1)(q-2).$$

Заметим, что наибольший общий делитель чисел $q+1$ и $q-2$ равен 1 или 3. Так как $(q+1)(q-2)\vdots p^3$ и $p\neq 3$, то ровно одно из чисел $q+1$ и $q-2$ может делиться на p, а значит, одно из чисел делиться на p^3. Если $(q+1)\vdots p^3$, то $q+1\geq p^3$, а если $(q-2)\vdots p^3$, то $q-2\geq p^3$. В любом случае $q\geq p^3-1$.Тогда получаем

$$p^5+p^3=(q+1)(q-2)\geq p^3(p^3-3),$$

откуда $p^2+1\geq p^3-3$, т.е. $0\geq p^3-p^2-4=(p-2)(p^2+p+2)$, что невозможно при $p > 2$. Следовательно, других, кроме указанных выше, решений нет.

Ответ:
$(p;q) = (2;7)$ или $(p;q) = (3;17)$.

Подготовила студентка 4 курса ММФ БГУ Федукович Ю.И. Минск, 2018.
Источник:
https://dl.bsu.by/mod/page/view.php?id=31645
https://dl.bsu.by/mod/assign/view.php?id=31644
https://dl.bsu.by/mod/page/view.php?id=31441