УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ЯДРОМ КОШИ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Белорусский государственный университет

(*Поступила в редакцию 18.06.2010*)

Предлагается алгоритм численного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt=\ln\frac{1-x}{1+x}f(x),\quad -1<x<1, \tag{1}$$

в классах $h(-1)$ и $h(1)$, основанный на разложении сингулярного интеграла по многочленам Чебышева. Здесь $f(x)$ – заданная на $[-1,1]$ функция, непрерывная по Гельдеру, $\varphi(x)$ – искомая функция (класс $h(-1)$ по Мусхелишвили означает ограниченность решения в окрестности точки $z=-1$ и интегрируемую неограниченность в окрестности точки $z=1$).

Аппарат сингулярных интегральных уравнений (СИУ) применяется при исследовании большого класса граничных задач теории упругости, аэродинамики и в других областях естествознания [1–3]. Эффективность численных методов для решения подобных задач во многом зависит от способа дискретизации задачи. Среди известных подходов следует отметить методы, основанные на полиномиальной аппроксимации искомого решения, в том числе метод ортогональных многочленов [2–4].

Метод ортогональных многочленов базируется на замечательном свойстве классических ортогональных многочленов Чебышева первого и второго рода для сингулярных интегралов, а именно:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}=U_{n-1}(x),\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{U_{n-1}(t)dt}{t-x}=-T_n(x),\quad |x|<1,\quad n\geq 1,$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Эти так называемые спектральные соотношения для сингулярных интегралов позволили в дальнейшем построить хорошо известные методы решения простейшего сингулярного интегрального уравнения (1), основанные на обращении сингулярного интеграла в различных классах функций [2–4].

В [5, 6] получены «квазиспектральные соотношения» для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{P_k(t)dt}{t-x},\quad -1<x<1,\quad |\alpha|=|\beta|=1/2,$$

где P_k – многочлен Чебышева первого или второго рода степени $k\geq 0$.

Приведем один из результатов:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{U_k(t)dt}{t-x}=\sum_{j=0}^{k+\alpha+\beta-1}\gamma_j^{(k)}U_j(x)-\pi(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}U_k(x), \tag{2}$$

$$k=0,1,\ldots,$$

$$\gamma_j^{(k)}=Q_{k-j-1}+Q_{k+j+1}+2A_{jk},\quad j=\overline{0,k+\alpha+\beta-1},$$

где

$$Q_M=\frac{1}{\sin\alpha\pi}\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{M1}b_k^{(M)}c^{(1)}_{\left[\frac{M+\alpha+\beta}{2}\right]-k}, & M+\alpha+\beta-\text{четное},\\ 0, & M=-1,\\ \sum\limits_{k=0}^{M2}b_k^{(M)}c^{(2)}_{\left[\frac{M-1+\alpha+\beta}{2}\right]-k}, & M+\alpha+\beta-\text{нечетное},\end{cases}$$

$$M1=\min\left\{\left[\frac{M}{2}\right],\left[\frac{M+\alpha+\beta}{2}\right]\right\},\quad M2=\min\left\{\left[\frac{M}{2}\right],\left[\frac{M-1+\alpha+\beta}{2}\right]\right\},$$

$$b_0^{(n)}=2^n,\ b_{k+1}^{(n)}=-b_k^{(n)}\frac{(n-2k)(n-1-2k)}{4(k+1)(n-k)},\ k=\overline{0,\left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

$$\mu_k=\sum_{j=0}^{k}g_j v_{k-j},\ g_0=v_0=1,\quad g_{j+1}=g_j\frac{j-\alpha}{j+1},\quad v_{j+1}=v_j\frac{\beta-j}{j+1},\ j=0,1,\ldots,$$

$$c_p^{(1)}=\sum_{n=0}^{p}\frac{2\mu_{2n}}{2p-2n+1},\qquad c_p^{(2)}=\sum_{n=0}^{p}\frac{2\mu_{2n+1}}{2p-2n+1},\ p=0,1,\ldots,$$

$$A_{jk}=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}(1-\tau)^{\alpha}(1+\tau)^{\beta}U_j(\tau)U_k(\tau)d\tau,\ 0\le j\le k+\alpha+\beta-1.$$

Использование возможностей компьютерной алгебры математического пакета Mathematica позволяет упростить формулы (2) при $\alpha=-\beta=\pm1/2$, что не только существенно сокращает время по их вычислению, но и визуализирует результаты. Привлечение же известных соотношений для многочленов Чебышева первого и второго рода позволило построить и некоторые другие разложения. В частности, получены следующие результаты.

Т е о р е м а 1. *Для* $x\in(-1,1)$ *и* $k\ge0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=-4U_{k-1}(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sum_{m=0}^{j-1}\frac{8}{2m+1}U_{k-2j}(x)-$$
$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\left(\sum_{m=0}^{j}\frac{8}{2m+1}-\frac{4}{2j+1}\right)U_{k-1-2j}(x)-\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}U_k(x), \tag{3}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=-2U_{k-1}(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{4}{2j-1}U_{k-2j}(x)-$$
$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{8j}{4j^2-1}U_{k-1-2j}(x)-\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}T_k(x). \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о истинности равенств (3), (4) проведем методом математической индукции, основываясь на двух леммах из [5].

Л е м м а 1. *Пусть* α *и* β *таковы, что* $|\alpha|=|\beta|=0{,}5$. *Для любого многочлена* $P_M(x)$ *степени* $M\ge 0$ *справедливо*:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}P_M(t)\ln\frac{1-t}{1+t}dt=\frac{1}{\sin\alpha\pi}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left((z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}P_M(z)\ln\frac{z-1}{z+1}\right). \tag{5}$$

Л е м м а 2. *Пусть* α *и* β *таковы, что* $|\alpha|=|\beta|=0{,}5$. *При* $m\ge 0$ *для* $|x|<1$ *имеет место следующее представление*:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}t^{m}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{dt}{t-x}=-P_{m+(\alpha+\beta)-1}(x)-\pi(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}x^{m}, \tag{6}$$

где $P_{m+(\alpha+\beta)-1}(z)$ *– главная часть на бесконечности функции*

$$z^{m}(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\ln\frac{z-1}{z+1},$$

представляющая собой многочлен степени $m+(\alpha+\beta)-1$ $(m+(\alpha+\beta)-1\ge 0)$ *и тождественный нуль в противном случае.*

При $k=0$ и $k=1$ на основании (6) с учетом того, что $U_{-1}(x)=0$, $U_0(x)=1$, $U_1(x)=2x$, равенство (3) верно. Пусть (3) верно для $k\le n$, т. е.

$$I_n\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_n(t)\frac{dt}{t-x}=-4U_{n-1}(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{m=0}^{j-1}\frac{8}{2m+1}U_{n-2j}(x)-$$
$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\sum_{m=0}^{j}\frac{8}{2m+1}-\frac{4}{2j+1}\right)U_{n-1-2j}(x)-\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}U_n(x).$$

Покажем, что (3) справедливо и для $k=n+1$.

Известно, что при $n>1$

$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x), \tag{7}$$

поэтому

$$I_{n+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{(2tU_n(t)-U_{n-1}(t))\,dt}{t-x}=J_n+2xI_n-I_{n-1},$$

где

$$J_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_n(t)\,dt.$$

Так как на основании (5) $J_n=\begin{cases}-8\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right), & n-\text{нечетное},\\ -8\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{4}{n+1}, & n-\text{четное},\end{cases}$ то, используя (7), получаем справедливость (3) для $k=n+1$.

Доказательство равенства (4) проводится аналогично с использованием при $n > 1$ соотношения

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \tag{8}$$

и того, что $J_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{n}, & n \text{ – нечетное}, \\ -\dfrac{2}{n-1} - \dfrac{2}{n+1}, & n \text{ – четное}. \end{cases}$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Для* $x \in (-1,1)$ *и* $k \ge 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x} = 2U_{k-1}(x) - \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{4}{2j-1}U_{k-2j}(x) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{8j}{4j^2-1}U_{k-1-2j}(x) - \pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}T_k(x), \tag{9}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x} = 4U_{k-1}(x) +$$
$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sum_{m=0}^{j-1}\frac{-8}{2m+1}U_{k-2j}(x) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\left(\sum_{m=0}^{j}\frac{8}{2m+1} - \frac{4}{2j+1}\right)U_{k-1-2j}(x) - \pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}U_k(x). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о истинности равенств (9), (10) проведем также методом математической индукции, основываясь на леммах 1, 2.

При $k = 0$ и $k = 1$ на основании (6) с учетом того, что $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ равенство (9) верно. Пусть (9) верно для $k \le n$, т. е.

$$I_n \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_n(t)\frac{dt}{t-x} = 2U_{n-1}(x) - \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{4}{2j-1}U_{n-2j}(x) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{8j}{4j^2-1}U_{n-1-2j}(x) - \pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}T_n(x).$$

Покажем, что (9) справедливо и для $k = n+1$. Используя (8), имеем

$$I_{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{(2tT_n(t) - T_{n-1}(t))\,dt}{t-x} = J_n + 2xI_n - I_{n-1},$$

где

$$J_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_n(t)\,dt.$$

Так как на основании (5) $J_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{n}, & n \text{ – нечетное}, \\ \dfrac{2}{n-1} + \dfrac{2}{n+1}, & n \text{ – четное}, \end{cases}$ то, используя (7), получаем справедливость (9) для $k = n+1$.

Доказательство равенства (10) проводится аналогично с использованием того, что

$$J_n = \begin{cases} -8\left(1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right), & n \text{ – нечетное}, \\ 8\left(1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n+1}\right) - \dfrac{4}{n+1}, & n \text{ – четное}. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Применим полученные формулы (3), (4), (9), (10) к построению приближенного решения уравнения (1).

Известно [7, 8], что искомое решение уравнения (1) $\varphi(x) \in h(1)$ определяется формулой

$$\varphi(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}f(t)\frac{dt}{t-x}\right), \quad -1<x<1. \tag{11}$$

Для приближенного решения уравнения (1) используем разложение функции $f(x)$ по полиномам Чебышева [9], в результате чего приходим к следующему уравнению:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\frac{dt}{t-x} = \ln\frac{1-x}{1+x}f_n(x), \quad -1<x<1, \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered} f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\, T_k(x), \qquad f_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} f(t_j),\ f_k = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} f(t_j)T_k(t_j),\ k>0, \\ t_j = \cos\frac{2j-1}{2n+2}\pi,\ j=1,2,\dots,n+1. \end{gathered} \tag{13}$$

Согласно (11), решение уравнения (12) имеет вид:

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}f_n(t)\frac{dt}{t-x}\right), \quad -1<x<1. \tag{14}$$

Используя (13) и учитывая (4), из (14) получаем

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{j=0}^{n-1}U_{n-1-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_k\, f_{n-j+2k} + \sum_{j=2}^{n}U_{n-j}(x)\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\beta_k\, f_{n-j+2k}\right) + \pi f_n(x), \tag{15}$$

где $\alpha_k = \begin{cases} -2, & k=0, \\ -8\dfrac{k}{4k^2-1}, & k=\overline{1,\left[\dfrac{j-1}{2}\right]}, \end{cases}$ $\quad \beta_k = \dfrac{-4}{2k-1},\ k=\overline{1,\left[\dfrac{j}{2}\right]}.$

Пусть далее [9]

$$\begin{gathered} f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k U_k(x), \quad f_k = G_k - \varepsilon_k\, G_{k+2}, \quad G_k = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} f(t_j)T_k(t_j), \\ \varepsilon_k = \begin{cases} 1, & k=0,1,\dots,n-2, \\ 0, & k=n-1,n, \end{cases} \qquad t_j = \cos\frac{2j-1}{2n+2}\pi,\ \ j=1,2,\dots,n+1. \end{gathered} \tag{16}$$

Используя (16) и учитывая (3), из (14) получаем

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{j=0}^{n-1}U_{n-1-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\delta_k\, f_{n-j+2k} + \sum_{j=2}^{n}U_{n-j}(x)\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_k\, f_{n-j+2k}\right) + \pi f_n(x), \tag{17}$$

где $\delta_k = \begin{cases} -4, & k=0, \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{k}\frac{-8}{2m+1} + \frac{4}{2k+1}, & k=\overline{1,\left[\dfrac{j-1}{2}\right]}, \end{cases}$ $\quad \gamma_k = \displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\frac{-8}{2m+1},\ k=\overline{1,\left[\dfrac{j}{2}\right]}.$

Решение уравнения (1) $\varphi(x)\in h(-1)$ определяется формулой

$$\varphi(x)=-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}f(t)\frac{dt}{t-x}\right),\quad -1<x<1. \tag{18}$$

Приближенное решение в заданном классе получим из уравнения (12)

$$\varphi_n(x)=-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}f_n(t)\frac{dt}{t-x}\right),\quad -1<x<1. \tag{19}$$

Используя (13) и учитывая (9), из (19) получаем

$$\varphi_n(x)=-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\sum_{j=0}^{n-1}U_{n-1-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_k f_{n-j+2k}+\sum_{j=2}^{n}U_{n-j}(x)\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\beta_k f_{n-j+2k}\right)+\pi f_n(x), \tag{20}$$

где $\alpha_k=\begin{cases}2, & k=0,\\ 8\dfrac{k}{4k^2-1}, & k=\overline{1,\left[\dfrac{j-1}{2}\right]},\end{cases}$ $\quad\beta_k=\dfrac{-4}{2k-1},\ k=\overline{1,\left[\dfrac{j}{2}\right]}.$

Используя (16) и учитывая (10), из (19) получаем

$$\varphi_n(x)=-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\sum_{j=0}^{n-1}U_{n-1-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\delta_k f_{n-j+2k}+\sum_{j=2}^{n}U_{n-j}(x)\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_k f_{n-j+2k}\right)+\pi f_n(x), \tag{21}$$

где $\delta_k=\begin{cases}4, & k=0,\\ \displaystyle\sum_{m=0}^{k}\frac{8}{2m+1}-\frac{4}{2k+1}, & k=\overline{1,\left[\dfrac{j-1}{2}\right]},\end{cases}$ $\quad\gamma_k=\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\frac{-8}{2m+1},\ k=\overline{1,\left[\dfrac{j}{2}\right]}.$

Оценим порядок точности приближенного решения в классе функций $W^rH^\mu, r\geq 0,\ 0<\mu\leq 1$, имеющих производные до порядка r включительно, причем r-я производная принадлежит классу Гельдера $H(\mu)$: $\left|f^{(r)}(x_1)-f^{(r)}(x_2)\right|\leq K|x_1-x_2|^\mu,\ \forall x_1,x_2\in[-1,1]$, где K и μ – константы, не зависящие от выбора точек x_1,x_2.

С учетом (11), (14), (13), (16) и оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью [10], могут быть доказаны следующие теоремы.

Т е о р е м а 3. *Пусть функция* $f(x)$, *являющаяся правой частью уравнения* (1), *принадлежит классу* $W^rH^\mu, r\geq 0, 0<\mu\leq 1$. *Пусть, далее,* $f(x)$ *аппроксимируется интерполяционным многочленом* (13) (*или* (16)) *по узлам Чебышева первого рода,* $\varphi(x)$, $\varphi_n(x)$ *означают соответственно точное и приближенное решения уравнений* (1), (12) *в классе* $h(-1)$. *Тогда*

$$\sqrt{1-x}\,\|\varphi(x)-\varphi_n(x)\|_\infty\leq M_1\frac{\ln^2(n)}{n^{r+\mu}},\ x\in[-\delta,\delta]\subset(-1,1).$$

Т е о р е м а 4. *Пусть функция* $f(x)$, *являющаяся правой частью уравнения* (1), *принадлежит классу* $W^rH^\mu, r\geq 0, 0<\mu\leq 1$. *Пусть, далее,* $f(x)$ *аппроксимируется интерполяционным много-*

членом (13) (*или* (16)) *по узлам Чебышева первого рода,* $\varphi(x)$, $\varphi_n(x)$ *означают соответственно точное и приближенное решения уравнений* (1), (12) *в классе* $h(1)$. *Тогда*

$$\sqrt{1+x}\|\varphi(x)-\varphi_n(x)\|_\infty \le M_2 \frac{\ln^2(n)}{n^{r+\mu}},\ x\in[-\delta,\delta]\subset(-1,1).$$

Константы M_1, M_2 не зависят от n.

В табл. 1 даны результаты численного решения уравнения (1) в классе $h(-1)$ по формулам (15), (17) ($\varphi_n^{(I,II)}(x)$) при $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Таблица 1

n	20	25	30	35
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1}\left\lvert\varphi(x)-\varphi_n^{(I,II)}(x)\right\rvert$	1,7*10^{-8}	1,5*10^{-10}	1,6 *10^{-12}	2,2*10^{-14}

В табл. 2 даны результаты численного решения уравнения (1) в классе $h(1)$ по формулам (20), (21) ($\varphi_n^{(III,IV)}(x)$) при $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Таблица 2

n	20	25	30	35
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1}\left\lvert\varphi(x)-\varphi_n^{(III,IV)}(x)\right\rvert$	1,7*10^{-8}	1,5*10^{-10}	1,6 *10^{-12}	2,2*10^{-14}

В обоих случаях решением будет функция $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}}{4}\right)$.

Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, 1976.
2. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М., 1982.
3. Габдулхаев Б. Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ. Казань, 1994.
4. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
5. Расолько Г. А., Альсевич Л. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 2. С. 46–51.
6. Расолько Г. А., Альсевич Л. А. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т 53, № 5. С. 10–14.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
9. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.
10. Якименко Т. С. Квадратурные формулы для интегралов с ядром Коши со степенно-логарифмической особенностью и смежные вопросы. Дис. … канд. физ.-мат. наук. Мн., 1991.

G. A. RASOLKO

SOLUTION OF THE FIRST-KIND SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH CAUCHY'S KERNEL AND A SPECIAL RIGHT-HAND SIDE BY THE ORTHOGONAL POLYNOMIAL METHOD

Summary

An algorithm for solution of the singular integral equation of the first kind

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt=\ln\frac{1-x}{1+x}f(x),\quad -1<x<1$$

is suggested. Here f is Hölder's continuous functions on $[-1, 1]$; $\varphi(x)$ is an unknown function. The algorithm is based on the decomposition of the singular integral with respect to Chebyshev's polynomials in the classes $h(-1)$ and $h(1)$.