

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа

СМИРНОВА

Виктория Олеговна

**МИНИМАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ ЦЕНТРА
КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ 4-Х НЕОДНОРОДНЫХ
ИНВАРИАНТНЫХ ПРЯМЫХ, НЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ В ОДНОЙ
ТОЧКЕ**

Дипломная работа

Научный руководитель:
профессор, доктор физ.-
мат. наук,
А. П. Садовский

Допущена к защите

«___» _____ 2018 г.

Зав. кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа

доктор физ.-мат. наук, профессор В. И. Громак

Минск, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

РЕФЕРАТ	3
ABSTRACT	4
РЕФЕРАТ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1 КУБИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ЧЕТЫРЬМЯ ИНВАРИАНТНЫМИ ПРЯМЫМИ	7
1.1 ЧЕТЫРЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПРЯМЫЕ В ОБЩЕМ ПОЛОЖЕНИИ	9
1.2 ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ	24
ГЛАВА 2 НАХОЖДЕНИЕ УСЛОВИЙ ЦЕНТРА	27
2.1 ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА	27
2.2 УПРОЩЕНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРА	33
2.3 СОКРАЩЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРА	36
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	38
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	40
ПРИЛОЖЕНИЕ А	41
ПРИЛОЖЕНИЕ В	48

РЕФЕРАТ

В дипломной работе 49 страниц, 5 источников, 2 приложения.

КУБИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ПРЯМЫЕ,
КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА, МНОГООБРАЗИЯ, ИДЕАЛЫ, БАЗИС ГРЁБНЕРА,
ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА

В дипломной работе исследуется кубическая система с 4 неоднородными инвариантными прямыми, а так же условия, при выполнении которых особая точка будет являться центром кубической системы.

Цели данной работы:

1. Рассмотреть проблему центра кубической системы с 4-мя инвариантными прямыми;
2. Проанализировать условия, которые являются достаточными для того, чтобы точка являлась центром кубической системы;
3. Сократить количество данных условий и упростить их, используя базисы Грёбнера.

В ходе выполнения дипломной работы, вводились некоторые определения из компьютерной алгебры.

Все вычисления проводились в программном пакете Wolfram Mathematica.

ABSTRACT

There are 49 pages, 5 sources, 2 applications.

CUBIC SYSTEMS, INVARIANT DIRECT, COMPUTER ALGEBRA,
MANIFOLD, IDEALS, GROBNER BASIS, THE PROBLEM OF THE CENTER

In this graduate work, a cubic system with 4 inhomogeneous invariant lines is investigated, as well as the conditions under which the singular point will be the center of the cubic system.

The objectives of this work are:

1. Consider the problem of the center of a cubic system with four invariant lines;
2. Analyze the conditions that are sufficient for the point to be the center of the cubic system;
3. Reduce the number of these conditions and simplify them using the Gröbner bases.

In the course of the thesis, some definitions of computer algebra were introduced.

All calculations were carried out in the software package Wolfram Mathematica.

РЭФЕРАТ

У дыпломнай працы 49 старонак, 5 крыніц, 2 прыкладання.

КУБІЧНЫЯ СІСТЭМЫ, ІНВАРЫЯНТНЫЯ ПРАМЫЯ, КАМПУТАРНАЯ АЛГЕБРА, РАЗНАСТАЙНАСЦЬ, ІДЭЯЛЫ, БАЗІС ГРЭБНЕРА, ПРАБЛЕМА ЦЭНТРА

У дыпломнай працы даследуецца кубічная сістэма з 4 неаднародным інварыянтнымі прамымі, а так ж умовы, пры выкананні якіх асаблівы пункт будзе з'яўляцца цэнтрам кубічнай сістэмы.

Мэты дадзенай працы:

1. Разгледзець праблему цэнтра кубічнай сістэмы з 4-ма інварыянтнымі прамымі;
2. Прааналізаваць ўмовы, якія з'яўляюцца дастатковымі для таго, каб кропка з'яўлялася цэнтрам кубічнай сістэмы;
3. Скараціць колькасць дадзеных умоў і спрасціць іх, выкарыстоўваючы базіс Грэбнера.

У ходзе выканання дыпломнай працы, ўводзіліся некаторыя вызначэння з кампютарнай алгебры.

Усе вылічэнні праводзіліся ў праграмным пакеце Wolfram Mathematica.

ВВЕДЕНИЕ

В качестве объекта исследования дипломной работы взята кубическая система вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x, y),\end{aligned}$$

где x, y – это вещественные переменные, а $a, b, \dots, z$ – это вещественные коэффициенты.

В этой работе приведены условия существования четырех инвариантных прямых, основанные на выводах Дмитрия Козьма в его книге «Интегрируемость кубических систем с тремя инвариантными прямыми и инвариантными кониками».

А так же описаны условия, необходимые для того, чтобы точка являлась центром заданной кубической системы с четырьмя инвариантными прямыми.

Целью работы является сократить количество этих условий, а так же упростить их.

Метод, описанный в этой работе, достаточно прост и эффективен, что позволяет сократить время и погрешность вычислений.

Все выводы и вычисления в данной работе основываются на понятиях из компьютерной алгебры, таких как: базисы Гребнера, полиномиальные идеалы и многообразия.

ГЛАВА 1

КУБИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ЧЕТЫРЬМЯ ИНВАРИАНТНЫМИ ПРЯМЫМИ

В ходе дипломной работы будет рассматриваться кубическая система вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x, y),\end{aligned}\quad (1.1)$$

где x, y – это вещественные переменные, а $a, b, \dots, z$ – это вещественные коэффициенты.

Введем определение инвариантной прямой.

Определение 1.1. Прямая линия вида

$$1 + Ax + By = 0, \quad A, B \in \mathbb{C}, \quad (A, B) \neq (0, 0) \quad (1.2)$$

является инвариантной прямой кубической системы (1.1), если выполнено следующее условие

$$A \cdot P(x, y) + B \cdot Q(x, y) \equiv (1 + Ax + By) \cdot K(x, y) \quad (1.3)$$

для некоторого полинома с комплексными коэффициентами

$$K(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2,$$

который называется кофактором инвариантной прямой.

Если у кубической системы существуют комплексные инвариантные прямые, то они встречаются в комплексно сопряженных парах

$$1 + Ax + By = 0, \quad 1 + \bar{A}x + \bar{B}y = 0.$$

Тут A и B это решения ситемы

$$\begin{aligned}
F_1(A, B) &\equiv AB^2 - fAB + bB^2 + rA - lB = 0, \\
F_2(A, B) &\equiv A^2B + aA^2 - gAB - kA + sB = 0, \\
F_3(A, B) &\equiv B^3 - 2A^2B + fA^2 - dB^2 + (c - b)AB - pA + nB = 0, \\
F_4(A, B) &\equiv A^3 - 2AB^2 - cA^2 + gB^2 + (d - a)AB + mA - qB = 0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Определение 1.2. Рассмотрим динамическую систему на плоскости

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \tag{1.5}$$

где $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ - аналитические функции в $D, D \subseteq \mathbb{R}^2$. Положим $O(0,0)$ является особой точкой для (1.3), т.е. $X(0,0) = Y(0,0) = 0$. Если собственные значения системы имеют ненулевые вещественные части ($Re\lambda_j \neq 0, j = 1, 2$) в $O(0,0)$, тогда особая точка называется гиперболической. Если же $Re\lambda_j = 0, Im\lambda_j \neq 0$, система приходит к виду

$$\dot{x} = y + \sum_{i=2}^{\infty} X_i(x, y), \quad \dot{y} = -x + \sum_{i=2}^{\infty} Y_i(x, y), \tag{1.6}$$

где X_i, Y_i однородные полиномы степени i . Траектории в окрестности точки $O(0,0)$ могут быть спиралями или близкими к ним траекториями. Поэтому начало координат может быть как фокусом, так и центром для (1.5).

1.1 Четыре инвариантные прямые в общем положении

Пусть кубическая система (1.1) имеет четыре инвариантные прямые. Тогда можно описать условия их существования, а также их вид.

Рассмотрим все случаи.

1.1.1. В случае, когда выполняется условие $a = f = k = p = r = 0, m(c^2 - 4m) \neq 0$, кубическая система (1.1) имеет две параллельные инвариантные прямые вида $l_{1,2} \equiv 2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m})x = 0$. Найдем условие существования еще двух инвариантных прямых вида (1.2) учитывая, что $B \neq 0$.

При $a = f = k = p = r = 0, B \neq 0$ система (1.4) запишется в виде

$$\begin{aligned} F_1(A, B) &\equiv (A + b)B - l = 0, \\ F_2(A, B) &\equiv A^2 - gA + s = 0, \\ F_3(A, B) &\equiv B^2 - 2A^2 + (c - b)A - dB + n = 0, \\ F_4(A, B) &\equiv A^3 - 2AB^2 - cA^2 + dAB + gB^2 + mA - qB = 0. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Предположим, что $A = -b$, тогда из уравнений $F_1 = 0, F_2 = 0$ из (1.5) следует, что $l = 0, s = -b(b + g)$ и система (1.4) будет иметь вид

$$\begin{aligned} F_3(B) &\equiv B^2 - dB - b^2 - bc + n = 0, \\ F_4(B) &\equiv (2b + g)B^2 - (bd + q)B - b(b^2 + bc + m) = 0. \end{aligned}$$

Полученная система не может иметь более двух решений вида $(-b, B)$ и мы получаем следующие два множества условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(1) a = b = f = g = k = l = p = q = r = s = 0, mn(c^2 - 4m)(d^2 - 4n) \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m})x = 0, \quad 2 + (d \pm \sqrt{d^2 - 4n})y = 0;$$

$$(2) \quad a = f = k = l = p = r = 0, \quad q = d(b + g), \quad s = -b(b + g),$$

$$m = \frac{[b(b + c)(b + g) - n(2b + g)]}{b},$$

$$bm(c^2 - 4m)(n - b(b + c))(d^2 - 4n + 4b(b + c)) \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + A_j x = 0, \quad 1 - bx + B_j y = 0,$$

где $A_j, B_j, j = 1, 2$ это решения соответствующих уравнений

$$bA^2 - bcA + b(b + c)(b + g) - n(2b + g) = 0, \quad B^2 - dB + n - bc - b^2 = 0.$$

Предположим, что $A \neq -b$. Тогда из уравнения $F_1 = 0$ из (1.5) получаем, что $B = \frac{l}{a+b}$. Подставляя это в (1.5) и принимая во внимание уравнение $F_2(A) = 0$, мы получаем следующие два множества условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(3) \quad a = f = k = p = r = 0, \quad d = \frac{bl^2 - (b+c)s^2}{ls}, \quad g = -b, \quad n = \frac{l^2 - 2s^2}{s}, \quad q = \frac{s^2 - ms - 2l^2}{l},$$

$$lms(c^2 - 4m)(b^2 - 4s) \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$2 + (c \pm \sqrt{c^2 - 4m})x = 0, \quad (b + A_j)(1 + A_j x) + ly = 0,$$

где $A_j, j = 1, 2$ определяется уравнением $A^2 + bA + s = 0$;

$$(4) \quad a = f = k = p = r = 0, \quad n = \frac{[l^2 - 2h^2 + h(3b - c + 2g)(b + g)]}{h}, \quad m = (c - b - g)(b + g),$$

$$q = \frac{[h^3 - b(b + g)h^2 - 2l^2 h + l^2(2b + g)(b + g)]}{lh}, \quad d = \frac{[h^2(b - c + 2g) + l^2(2b + g)]}{lh}, \quad h = b^2 + bg + s,$$

$$lh(b + g)(c - b - g)(c - 2b - 2g)(g^2 - 4s) \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + (b + g)x = 0, \quad 1 + (c - b - g)x = 0, \quad (b + A_j)(1 + A_j x) + ly = 0,$$

где для $j = 1, 2, A_j$ это корни уравнения $A^2 - gA + s = 0$.

1.1.2. В случае, когда выполняется условие $a = 1, f = -2, k = g, n = -d - 1, l = -b, p = b - c, r = 1, s = 0$ и $\Delta_1 = c^2(m - d - 1)^2 - 4(m - d - 1)^3 + 4c^3(g + q) - 18c(m - d - 1)(g + q) - 27(g + q)^2 \neq 0$, кубическая система имеет пучок из трех неоднородных инвариантных прямых вида

$$1 + S_j x - y = 0, \quad S_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2; \quad S_1 - S_2 \neq 0.$$

При этих условиях алгебраическая система (1.4) существования инвариантных прямых запишется в виде

$$\begin{aligned} F_1(A, B) &= AB + A + bB = 0, \\ F_2(A) &= A(A - g) = 0, \\ F_3(A, B) &= 2A^2 + (b - c)A - B^2 + (d + 1)B = 0, \\ F_4(A, B) &= (A - c)A^2 + (m - 2B^2 + dB - B)A + B(gB - q) = 0. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Рассмотрим совместимость системы (1.1.2) и определим одно решение вида (A, B) при условии $B \neq -1$. Тогда кубическая система (1.1) может иметь четыре различные инвариантные прямые.

Предположим, что $A = 0$, тогда из $F_2 \equiv 0$ и $F_1(B) = 0$ следует, что $b = 0$. В этом случае мы получаем следующее множество условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(5) \quad a = r = 1, \quad b = l = s = 0, \quad f = -2, \quad k = g, \quad n = -d - 1, \quad p = -c, \quad q = g(d + 1), \quad (d + 1)(d + 2)\Delta_1 \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + (d + 1)y = 0, \quad 1 + A_j x - y = 0,$$

где для $j = 1, 2, 3, A_j$ это корни уравнения

$$A^3 - cA^2 + (m - d - 1)A + (d + 2)y = 0.$$

Пусть $A \neq 0$, тогда из уравнения $F_2 = 0$ следует, что $A = g$. В этом случае мы получаем следующее множество условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(6) a = r = 1, f = -2, k = g, l = -b, n = -d - 1, p = b - c, s = 0, q = (b + g)(bg + g^2 - m) - 2g, d = (b + g)(b + 2g - c) + b(b + g)^{-1} - 2, bg(b + g)\Delta_1 \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + gx - g(b + g)^{-1}y = 0, \quad 1 + (b + g)x - y = 0, \quad 1 + A_j x - y = 0,$$

где для $j = 1, 2, A_j$ это корни уравнения

$$(b + g)(A^2 + (b - c + g)A - g(b + g) + m) + g = 0.$$

1.1.3 Если выполняется условие

$$a = 1, q = \frac{(d + n + 1)(c\gamma + b - c - p) - g\gamma^2}{\gamma^2},$$

$$m = \frac{(\gamma(d + 1) + c^2)(\gamma - 1) - (b - p)(c(\gamma - 2) + b - p) - n\gamma}{\gamma^2},$$

$$k = g, l = -b, r = -f - f, s = 0, \gamma = f + 2$$

и $\gamma \neq 0$, $\Delta_2 = (b - c - p)^2 + 4\gamma(d + n + 1) \neq 0$, кубическая система (1.1) имеет две не параллельные инвариантные прямые вида $1 + S_j x - y = 0$, $S_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$; $S_1 - S_2 \neq 0$. Найдем условия существования еще двух инвариантных прямых вида (1.2) учитывая, что $B \neq -1$. При этом условии, алгебраическая система (1.4) будет иметь вид

$$F_1(A, B) = A(B - \gamma + 1) + bB = 0,$$

$$F_2(A) = A(A - g) = 0,$$

$$F_3(A, B) = [B^2 - dB - 2A^2 + (c - b)A + n]B + \quad (1.1.3)$$

$$+[(\gamma - 2)A - p]A = 0,$$

$$F_4(A, B) = \gamma^2[(A - c)A^2 + (d - 1 - 2B)AB + gB^2] \\ + A[(b - c - p)(c + p - b - c\gamma) + \gamma(\gamma - 1)(d + 1) - \\ - n\gamma] + B[(d + n + 1)(c + p - b - c\gamma) + g\gamma^2].$$

Рассмотрим совместимость системы (1.1.3) и определим два различных решения вида (A, B) . Из уравнения $F_2 = 0$ видно, что решения системы (1.1.3) имеют вид $(0, B)$ или (g, B) .

Пусть $b = 0$, тогда $F_1(A, B) \equiv A(B - \gamma + 1) = 0$ и $F_2(A) \equiv A(A - g) = 0$. Если $g = 0$, то система (1.1.3) имеет одно решения вида $(0, B)$ и мы получаем следующее множество условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(7) b = g = k = l = q = s = 0, f = \gamma - 2, r = 1 - \gamma, a = 1, m = \\ \frac{[(d+1)(\gamma-1)-n]}{\gamma}, p = c(\gamma - 1), \gamma n(n + d + 1)(d^2 - 4n)\Delta_2 \neq 0. \\ \Delta_2 = (b - c - p)^2 + 4\gamma(d + n + 1).$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + S_j x - y = 0, \quad 1 + B_j y = 0,$$

где S_j и $B_j, j = 1, 2$ это решения соответствующих уравнений

$$\gamma S^2 - c\gamma S - d - n - 1 = 0, \quad B^2 - dB + n = 0.$$

Если $g \neq 0$, тогда система (1.7) имеет два решения вида $\{(0, B), (g, B)\}$ и мы получаем следующие два множества условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(8) b = l = s = 0, a = 1, k = g, r = 1 - \gamma, m = cg - g^2 + \gamma - 1, n = (\gamma - d - \\ 1)(1 - \gamma), p = (c - g)\gamma - c, q = g(d - \gamma + 1), f = \gamma - 2, \gamma g(\gamma - d - \\ 2)(\gamma - d - 1)\Delta_2 \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + S_j x - y = 0, \quad 1 - (\gamma - d - 1)y = 0, \quad 1 + gx + (\gamma - 1)y = 0,$$

где $S_j, j = 1, 2$ определяются уравнением $S^2 + (a - c)S + \gamma - d - 2 = 0$;

$$(9) a = 1, k = g, l = -b, q = \frac{[(d+n+1)(c\gamma+b-c-p)-g\gamma^2]}{\gamma^2}, \quad m = \frac{[(\gamma(d+1)+c^2)(\gamma-1)-(b-p)(c(\gamma-2)+b-p)-n\gamma]}{\gamma^2}, \quad d = \frac{[c\gamma^5+(g-c-p)\gamma^4+c(cg-2)\gamma^3-(c+p)(c^2+2cg-2)\gamma^2+(2c+g)(c+p)^2\gamma-(c+p)^3]}{[\gamma^2(c\gamma-c-p)]},$$

$$b = s = 0,$$

$$n = \frac{[\gamma^4 + (cg - 1)\gamma^2 - (c + g)(c + p)\gamma + (c + p)^2][g\gamma^2 - c\gamma + c + p]}{[\gamma^2(c\gamma - c - p)]},$$

$$f = \gamma - 2,$$

$$r = 1 - \gamma, \gamma^5 - 2\gamma^4 + (cg + 1)\gamma^3 - (c^2 + 3cg + cp + gp)\gamma^2 + (c + p)(2c + 2g + p)\gamma - (c + p)^2 = 0,$$

$$g\gamma(c - c - p)[\gamma^4 + (cg - 1)\gamma^2 - (c + p)(c + g)\gamma + (c + p)^2][\gamma^4 + cg\gamma^2 - (c + p)(c + g)\gamma + (c + p)^2]\Delta_2 \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + S_j x - y = 0, \quad 1 + gx + (\gamma - 1)y = 0,$$

$$[\gamma^4 + (cg - 1)\gamma^2 - (c + p)(c + g)\gamma + (c + p)^2]y + \gamma^2 = 0,$$

где при $j = 1, 2, S_j$ это корни уравнения

$$(c + p - c\gamma)[\gamma S^2 - (c + p)S] + g[\gamma^4 + cg\gamma^2 - (c + p)(c + g)\gamma + (c + p)^2] = 0.$$

Пусть $b \neq 0$. В этом случае уравнение $F_2 = 0$ предполагает, что $A = g, g \neq 0$ и $F_1(B) \equiv (b + g)B - g(f + 1) = 0$.

Если $g = -b$, то из уравнения $F_1 = 0$ следует, что $f = -1$. В этом подслучае мы сокращаем уравнение $F_3(B) = 0$ из (1.1.3) на B^2 из уравнения $F_4(B) = 0$. Далее

остаётся рассмотреть $F_3(B) \equiv 0$ и мы получаем следующие два множества условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(10) \quad r = s = 0, a = 1, f = -1, k = g = l = -b, m = -n, p = q = b, \\ b(d^2 + 4(b^2 + bc - n))(1 + d + n - b^2 - bc)\Delta_2 \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + S_j x - y = 0, \quad 1 - bx + B_j y = 0,$$

где S_j и $B_j, j = 1, 2$ это решения соответствующих уравнений

$$S^2 - cS - d - n - 1 = 0, \quad B^2 - dB - b^2 - bc + n = 0; \\ (11) \quad a = 1, f = -1, c = b - p - (d + 1)(2b - p)^{-1} + b(2b - p)^{-2}, m = \\ \frac{[b(2bd + b - dp - p)]}{(2b - p)^2}, k = g = l = -b, r = s = 0, n = \frac{dp + p - 2bd - b}{2b - p}, q = \frac{[b(3b - 2p)]}{2b - p}, \\ b(2b - p)[b((p - 2b)^2 + 1) + (d + 2)(p - 2b)][(b - (d + 1)(2b - p))^2 \\ + 4b(2b - p)^3]\Delta_2 \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + S_j x - y = 0, \quad 1 - bx + B_j y = 0,$$

где S_j и $B_j, j = 1, 2$ это решения соответствующих уравнений

$$(2b - p)^2 S^2 + ((d + 1)(2b - p) - b)S - b(2b - p) = 0, \\ (2b - p)B^2 + (b + (d + 1)(2b - p))B - b(2b - p)^2 = 0.$$

Если $g \neq -b$, тогда из уравнения $F_1 = 0$ следует, что $B = \frac{g(f+1)}{b+g}$. В этом случае алгебраическая система (1.1) имеет не более трёх неоднородных инвариантных прямых.

Если выполняется условие

$$p = \frac{[(b - c)h + (k - g)\gamma]}{h}, n = \frac{[s\gamma - (1 + d)h]}{h}, h = a - 1,$$

$$m = \frac{[(d - h + 1)h^2 + h(c(k - g) - s) - (k - g)^2]}{h^2}, \gamma = f + 2,$$

$$q = \frac{[h(cs - gh) + s(g - k)]}{h^2}, l = -b, r = -f - 1$$

и $h \neq 0, \Delta_3 = (g - k)^2 + 4sh \neq 0$, кубическая система (1.1) имеет две параллельные инвариантные прямые вида $1 + S_j x - y = 0$, $S_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$; $S_1 - S_2 \neq 0$. В этом случае необходимо найти условия существования еще двух инвариантных прямых вида (1.2), учитывая, что $B \neq -1$.

При условии приведенном выше, система (1.4) запишется в виде

$$\begin{aligned} F_1(A, B) &\equiv (A + b)B - (\gamma - 1)A = 0, \\ F_2(A, B) &\equiv (B + h + 1)A^2 - (gB + k)A + sB = 0, \\ F_3(A, B) &\equiv h(2B - \gamma + 2)A^2 + A[h(b - c)(B + 1) + \\ &+ (k - g)\gamma] + B[h(B + 1)(d + 1 - B) - \gamma s], \\ F_4(A, B) &\equiv h^2(A^3 - cA^2) + A[h^2(B + 1)(d - h + \\ &+ 1 - 2B) + (k - g)(ch + g - k) - hs] + \\ &+ B[gh^2(B + 1) + s(k - g - ch)] = 0. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Рассмотрим совместимость системы (1.1.4) и определим два различных решения вида (A, B) .

Рассмотри три случая: $\{b = 0\}$, $\{b \neq 0, \gamma = 1\}$, $\{b\{\gamma - 1\} \neq 0\}$.

В случае, когда $b = 0$, $F_1(A, B) \equiv A(B - \gamma + 1) = 0$ и каждое решение системы (1.1.4) имеет вид $(0, B)$ или $(A, \gamma - 1)$.

1) Найдем решения в виде $(0, B)$. Если $A = 0$ и $B \neq 0$, то из уравнений $F_2 = 0$, $F_4 = 0$ и $F_3 = 0$ из (1.1.4) найдем $s = g = 0, B = d + 1$ соответственно. Таким образом система (1.1.4) имеет не более одного решения вида $(0, d + 1)$.

2) Предположим, что $s = g = 0$ и найдем решение в виде $(A, \gamma - 1)$. Если $A \neq 0$ и $B = \gamma - 1$, тогда из $F_2(A) = 0$ следует, что $A = k/(h + \gamma)$. Из $F_3 = 0$ найдем c

и получим $F_4 \equiv (\gamma + h - 1)(\gamma + h - d - 2) = 0$. В этом случае получаем следующие два множества условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(12) \quad a = h + 1, b = g = l = q = s = 0, f = -h - 1, n = -d - 1, \\ c = \frac{[k^2(h + 1) - h^2(1 + d + h)]}{hk}, m = \frac{k^2 - 2h^2}{h}, p = \frac{dh + h + h^2 - 2k^2}{k}, \\ r = h, kh(h - 1)(d + 1)(d + 2) \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 - y = 0, \quad h + kx - hy = 0, \quad 1 + (d + 1)y = 0, \quad 1 + kx - hy = 0; \\ (13) \quad a = h + 1, b = g = l = q = s = 0, f = d - h, n = -d - 1, \\ c = \frac{[(d + 2)^2((d + 1)h^2 - h^3) + k^2(d + h + 2)]}{[hk(d + 2)]}, \\ m = \frac{[(d + 2)(d + 3)(dh + h - h^2) + k^2]}{[hk(d + 2)]}, r = h - d - 1, \\ p = [(d + 2)(h^3 - (d + 1)h^2) + k^2((d + 1) - \frac{(d + 3)(d + 2)^{-1}h}{hk})], \\ kh(d + 1)(d + 2)(d - h + 2) \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 - y = 0, \quad h + kx - hy = 0, \quad 1 + (d + 1)y = 0, \\ (d + 2)(1 + (d - h + 1)y) + kx = 0.$$

3) Найдем только решение в виде $(A, \gamma - 1)$ системы (1.1.4). Легко проверить, что этот случай содержится в множествах условий (19) и (20).

Действительно, если $B = \gamma - 1$ и $\gamma = h - 1$, мы получаем условия (19) и (20) при $b = 0$ и $\gamma = h - 1$ соответственно. Если $B = \gamma - 1$ и $\gamma + h - 1 \neq 0$, мы получаем множество условий (19) при $b = 0$ и $k = g(h - 1)$.

В случае когда $b \neq 0$ и $\gamma = 1$, $F_1(A, B) \equiv (A + b)B = 0$ и единственное решение системы (1.1.1) имеет вид $(A, 0)$ или $(-b, B)$.

1) Найдем только решение в виде $(A, 0)$. Если $B = 0$ и $A \neq 0$, то из уравнения

$$F_3(A) = 0 \text{ из (1.1.4) получаем } A = \frac{g-k-bh+ch}{h}.$$

Подставляя это в (1.1.4) получим

$$d = \frac{h^2 - b^2h + bch + 2bg - 2bk - h + s}{h}, \quad (1.1.5)$$

$$\gamma = 1, (ch + g - bh)(h + 1) - (2h + 1)k = 0.$$

Таким образом, система (1.1.4) имеет не более одного решения вида $(A, 0)$.

2) Предполагая, что условие (1.1.5) выполнено, найдем одно решение вида $(-b, B)$. Если $A = -b$, то второе уравнение из (1.1.4) запишется в виде

$$F_2(B) \equiv (b^2 + bg + s)B + b(bh + b + k) = 0.$$

Пусть $s = -b^2 - bg$, тогда из уравнения $F_2(B) = 0$ следует, что $k = -b(h + 1)$. В этом подслучае найдем $h = -1, B = b(c - g)$ и получим множество условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(14) \quad \begin{aligned} a = k = r = 0, l = -b, d = b(c - g) - 2, s = -b(b + g), f = -1, \\ m = (c - b - g)(b + g), n = b^2 - b(c - 2g) + 1, p = b - c + g, \\ q = bc(b + g) - g(b^2 + bg + 1), b(2b + g)(c - b - g)(bc - bg +) \\ (c - g) \neq 0. \end{aligned}$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$\begin{aligned} 1 - bx - y = 0, \quad 1 + (b + g)x - y = 0, \quad 1 + (c - b - g)x = 0, \\ 1 - bx(bc - bg)y = 0. \end{aligned}$$

Пусть $s \neq -b^2 - bg$, тогда из уравнения $F_2(B) = 0$ следует, что

$$B = [-b(bh + b + k)]/(b^2 + bg + s).$$

Из $F_3 = 0$ выразим c и подставляя в (1.1.4) получим

$$F_4 \equiv (b^2 + bg + s - h^2 - h)(b^2 + bg + bk + gk - hs) = 0.$$

В этом случае мы получаем два множества условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(15) \quad a = h + 1, f = -1, l = -b, r = 0, m = \frac{[k(bh - g + k)]}{[h(h + 1)]}, p = \frac{-k}{h + 1},$$

$$c = \frac{bh^2 + bh - gh - g + 2hk + k}{[h(h + 1)]}, d = \frac{(2h^3 + 2h^2 - b^2h - b^2 - bk)}{[h(h + 1)]},$$

$$s = h - b^2 - bg + h^2, n = \frac{[bk - (h + 1)(bg + h^2)]}{[h(h + 1)]},$$

$$q = \frac{[(h + 1)^2(bh - g + k) - (h + 1)(b^3 + b^2g - g + k) - bk(b + g)]}{[h(h + 1)]},$$

$$bhk(h + 1)(bh + b + k)(b(bh + b + k) - h(h + 1))\Delta_3 \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + S_j x - y = 0, \quad h(h + 1)(1 - bx) - b(bh + b + k)y = 0, \quad 1 + h + kx = 0,$$

где $S_j, j = 1, 2$ определяются уравнением $hS^2 + (g - k)S + b^2 + bg - h^2 - h = 0$;

$$(16) \quad a = h + 1, f = -1, g = -2b, l = -b, m = \frac{[(bh + 2b + k)k]}{[(h + 1)h]},$$

$$c = \frac{bh^2 + 3bh + 2b + 2hk + k}{[(h + 1)h]}, p = \frac{-k}{h + 1}, n = \frac{[(h + 1)(2b^2 - h^2) + bk]}{[(h + 1)h]},$$

$$s = -\frac{[(b + k)b]}{h}, d = \frac{[h^2(h^2 - 1) - b(2h + 1)(bh + b + k)]}{[h^2(h + 1)]}, r = 0,$$

$$q = \frac{b[2h^2(h + 1) - (b + k)(b + k + bh)]}{[h^2(h + 1)]}, bh(h + 1)k \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$h + bx - hy = 0, \quad h + (b + k)x - hy = 0, \quad 1 + h + kx = 0,$$

$$1 - bx + hy = 0.$$

3) Найдем решение в виде $(-b, B)$. Если $A = -b$, то

$$F_2(B) \equiv (b^2 + dg + s)B + b^2(h + 1) + bk = 0.$$

Система (1.1.4) может иметь два различных решения вида $(-b, B)$ только если $s = -b(b + g)$, $k = -b(h + 1)$ и $g = -2b$, $d = \frac{[(h-1)(h^2-b^2)-bch]}{h^2}$.

В этом случае мы получаем множество условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(17) \quad a = h + 1, f = -1, l = -b, g = -2b, r = 0, s = b^2, p = \frac{b-ch}{h},$$

$$d = \frac{[(h-1)(h^2-b^2)-bch]}{h^2}, k = -(h+1)b, m = -(b+c)b,$$

$$n = \frac{2b^2h - b^2 + bch - h^3}{h^2}, q = \frac{[(b^2h - b^2 + bch + 2h^2)b]}{h^2},$$

$$bh(h+1)(h^2 + b(b-bh-ch))(h^3 - b(b-bh-ch)) \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 - bx - y = 0, \quad h + bx - hy = 0, \quad 1 - bx + hy = 0,$$

$$h^2(1 - bx) + b(b - bh - ch)y = 0.$$

В случае $b(\gamma - 1) \neq 0$, из уравнения $F_1(A, B) = 0$ из (1.1.4) следует, что $B = \frac{[(\gamma-1)A]}{A+b}$.

Подставляя B в (1.1.4) и сокращая уравнения $F_3(A) = 0$, $F_4(A) = 0$ на s из уравнения $F_2(A) = 0$, уравнение $F_4(A) = 0$ на d из уравнения $F_3(A) = 0$, мы получаем $F_4(A) = f_1 f_2 = 0$, где

$$f_1 = hA^2 + (2bh - ch - g + k)A + b^2h - bch - bg + bk + \gamma h^2 - h^2,$$

$$f_2 = (\gamma + h - 1)A + bh - g\gamma + g.$$

Пусть $f_1 = 0$. Сокращаем уравнения $F_2(A) = 0$ и $F_3(A) = 0$ на A^2 из уравнения $f_1 = 0$, тогда мы получаем уравнения $\widetilde{F}_2(A) = 0$ и $\widetilde{F}_3(A) = 0$ первой степени. Чтобы получить два различных решения, остается рассмотреть уравнения

$\widetilde{F}_2(A) \equiv 0$ и $\widetilde{F}_3(A) \equiv 0$. В этом случае мы получаем два множества условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & a = h + 1, f = -h - 2, l = -b, r = h + 1, k = (b + g)(h + 1), \\
 & d = \frac{b^2 - 2h^2 + bh(b - c + g)}{h^2}, p = -(bh + c + gh), \\
 & m = -[(b + g)(b + g - c) + h + 1], s = -b(b + g), \\
 & n = \frac{[h^2 + b^2(h^2 - h - 1) + bh(c + gh - g)]}{h^2}, \\
 & q = \frac{[b^3(h + 1) - gh^2 - bgh(c - g) + b^2(g + 2gh - ch)]}{h^2}, \\
 & bh(\gamma - 1)(h(b + g) - b)[2b^2(h + 1) + bh(g - c) - h^3] \\
 & [(3bh + b - ch + gh)^2 - 4h(b^2(2h + 1) - bh(c - g) - \\
 & - h^2(h + 1))] \neq 0.
 \end{aligned}$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 h + bx - hy &= 0, \quad 1 + (b + g)x - y = 0, \\
 (b + A_j)(1 + A_j x) - (h + 1)A_j y &= 0,
 \end{aligned}$$

где при $j = 1, 2$, A_j это корни уравнения

$$\begin{aligned}
 hA^2 + (3bh + b - ch + gh)A + b^2(2h + 1) - bh(c - g) - h^2(h + 1) &= 0; \\
 (19) \quad p &= \frac{[(b-c)h+(k-g)\gamma]}{h}, q = \frac{[h(cs-gh)+s(g-k)]}{h^2}, l = -b, r = 1 - \gamma, \\
 m &= \frac{[(d-h+1)h^2 + h(c(k-g) - s) - (k-g)^2]}{h^2}, n = \frac{[s\gamma - (1+d)h]}{h}, \\
 a &= h + 1, f = \gamma - 2, c = \frac{[bh^2 + h(2b\gamma - b + g\gamma - 2g + 2k) + (k-g)\gamma]}{h^2 + h\gamma}, \\
 d &= \frac{[b^2(1 - 2\gamma - h) + b(g - k - g\gamma) + 2h(\gamma + h)(\gamma + h + 1)]}{h^2 + h\gamma}, \\
 s &= h^2 + 2h - b^2 - bg + fh, bh(\gamma - 1)(\gamma + h)[\gamma^2(h\gamma - b^2 - bg + h^2) + \\
 &+ b\gamma(g - k) - b^2h][(bh + b - g\gamma + g - k)^2 - 4(\gamma + h)((1 - \gamma)(b^2 + bg -
 \end{aligned}$$

$$-h\gamma - h^2) - bk)]\Delta_3 \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + S_j x - y = 0, \quad (b + A_j)(1 + A_j x) + (\gamma - 1)A_j y = 0,$$

где S_j и $A_j, j = 1, 2$ это решения соответствующих уравнений

$$hS^2 + (g - h)S + b^2 + bg - h\gamma - h^2 = 0,$$

$$(\gamma + h)A^2 + (bh + b - g\gamma + g - k)A + (1 - \gamma)(b(b + g) - h(\gamma + h)) - bk = 0.$$

Пусть $f_1 \neq 0$ и $f_2 = 0$. Если $\gamma = 1 - h$, тогда из $f_2 = 0$ следует, что $g = -b$. В этом случае $F_2(A) \equiv A^2 + (b - k)A - bk - hs = 0$. Сокращая уравнение $F_3(A) = 0$ на A^2 из уравнения $F_2(A) = 0$ мы получаем множество условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(20) \quad a = h + 1, f = -a, l = -b, r = h, p = \frac{-2ks - bh}{s}, q = \frac{2bh + ks}{h},$$

$$d = \frac{[(s - h)(h + 1)s - bh(b + k)]}{hs}, n = \frac{b^2 + bk + hs - 2s^2}{s},$$

$$m = \frac{bk - 2h^2 + hs + k^2}{h}, c = \frac{bh^2 + bs + hks + ks}{hs},$$

$$bhs(h^2s + h(bk - 2s) + s - bk - b^2)((b - k)^2 + 4bk + 4hs)\Delta_3 \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$1 + S_j x - y = 0, \quad (b + A_j)(1 + A_j x) + hA_j y = 0,$$

где S_j и $A_j, j = 1, 2$ это решения соответствующих уравнений

$$hS^2 - (b + k)S - s = 0, \quad A^2 + (b - k)A - bk - hs = 0.$$

Предположим, что $\gamma \neq 1 - h$, тогда из уравнений $f_2 = 0$, $F_2 = 0$ и $F_3 = 0$ из системы (1.1.4) можно выразить A, s и d соответственно. Таким образом,

$$s = \frac{[(b + g)(g + bh + g\gamma + k(\gamma + h - 1))]}{(\gamma + h - 1)^2},$$

$$d = \frac{(b+g)[(b+g)(2-\gamma) + (\gamma+h-1)(b+c)]}{(\gamma+h-1)^2} + \frac{[(b+g)(\gamma-2) - b(\gamma+h-1)]}{b+g}. \quad (1.1.6)$$

и система (1.1.4) дает только одно решение

$$A = \frac{g\gamma - bh - g}{\gamma + h - 1}, \quad B = \frac{g\gamma - bh - g}{b + g}. \quad (1.1.7)$$

Найдем еще одно решение системы (1.1.4) отличное от (1.1.7). Подставляя (1.1.6) в (1.1.4) получаем

$$F_2(A) \equiv (\gamma + h)(\gamma + h - 1)A + (b + g)(\gamma - 1) - k(\gamma + h - 1) = 0.$$

Если $\gamma = -h$, то из уравнения $F_2(A) = 0$ слудует, что $k = (b + g)(h + 1)$. Легко проверить, что этот случай содержится в множестве условий (18).

Если $\gamma \neq -h$, тогда $A = \frac{[(b+g)(1-\gamma)+k(\gamma+h-1)]}{(\gamma+h)(\gamma+h-1)}$. В этом случае выражаем c из уравнения $F_4 = 0$ и подставляя в уравнение $F_3 = 0$, получаем, что $F_3 \equiv g_1 g_2 = 0$, где $g_1 = b(\gamma - 1) + h(2b + g)$ и

$$g_2 = (\gamma + h - 1)^2(h\gamma + h^2 - b^2 - bg) + (b + g)[(g - k)(\gamma + h - 1) - h(b + g)].$$

Пусть $g_1 = 0$, тогда мы получаем множество условий для существования четырех неоднородных инвариантных прямых:

$$(21) \quad p = \frac{[(b-c)h+(k-g)\gamma]}{h}, q = \frac{[h(cs-gh)+s(g-k)]}{h^2}, l = -b, \\ m = \frac{[(d-h+1)h^2 + h(c(k-g)-s) - (k-g)^2]}{h^2}, r = 1 - \gamma, \\ n = \frac{[s\gamma - (1+d)h]}{h}, a = h + 1, \gamma = -\frac{bh - v}{b}, v = (b + g)h - b, \\ c = \frac{[b^2u^2(bh - v) + b^2uv(2b + v) - h^2v^2(bh + b + v)]}{b^2huv},$$

$$d = \frac{[(2b + v)(b^2 - h^2) - b^2 hc]}{bh^2}, s = \frac{bu - b^2 - bv}{h}, f = \gamma - 2,$$

$$u = (b + g)(h + 1) - k, bhuv(2b + g - k)(bh + gh - b)((2b + g)v - bu)((gh - u)v - (u - 2v)bh) \neq 0.$$

Инвариантные прямые будут иметь вид

$$h + bx - hy = 0, \quad buv + b^2u(u - v)x + v(v + u)(b + bh + v)y = 0,$$

$$h + (bh + gh - u)x - hy = 0, \quad b + (b + g)(bx - hy) = 0.$$

Случай $g_1 \neq 0$ и $g_2 = 0$ содержится в множестве условий (19).

Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.1 Кубическая система (1.1) со слабым фокусом в $O(0,0)$ не может иметь более четырех неоднородных инвариантных прямых вида

$$1 + Ax + By = 0, \quad A, B \in \mathbb{C}, (A, B) \neq (0, 0).$$

Теорема 1.2 Кубическая система (1.1) имеет четыре неоднородные инвариантные прямые вида $1 + Ax + By = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий (1) – (21).

1.2 Понятия и определения из компьютерной алгебры

Определение 1.3. Мономом от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется произведение вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$, где a_i – неотрицательные целые числа.

Определение 1.4. Полиномом f от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ с коэффициентами из поля k называется конечная линейная комбинация мономов (с коэффициентами из поля k), т.е. $f = \sum b_a x^a$, где $b_a \in k$ и суммирование производится по конечному множеству набров $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Множество всех полиномов с коэффициентами из поля k обозначается $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и образует кольцо полиномов или полиномиальное кольцо.

Определение 1.5. Подмножество $J \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ называется идеалом, если выполнены следующие условия:

1. $0 \in J$,
2. если $f, g \in J$, то $f + g \in J$,
3. если $f \in J$, и $h \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, то $f \cdot h \in J$.

Определение 1.6. Пусть $J \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ – ненулевой идеал. Обозначим через $LT(J)$ множество старших членов из J , т.е. $LT(J) = \{cx^a : \exists f \in J, \text{ что } LT(f) = cx^a\}$. Обозначим через $\langle LT(J) \rangle$ идеал, порожденный элементами из $LT(J)$. Идеал $\langle LT(J) \rangle$ называется идеалом старших членов.

Определение 1.7. Пусть k – некоторое поле, а $f_i \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $i = \overline{1, s}$. Положим $V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, i = \overline{1, s}\}$. Множество $V(f_1, \dots, f_s)$ называется аффинным многообразием, определенным полиномами f_i , $i = \overline{1, s}$, т.е. множеством решений системы уравнений.

Пусть $J \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ – некоторый идеал. Тогда $V(J)$ является аффинным многообразием, которое будем называть многообразием идеала J .

Определение 1.8. Пусть задано некоторое мономиальное упорядочение и задан идеал $J \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Конечное подмножество $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ элементов идеала J называется базисом Грёбнера идеала J (или стандартным базисом), если $\langle LT(g_1), \dots, LT(g_s) \rangle = \langle LT(J) \rangle$.

Следствие 1.1. Пусть задано некоторое мономиальное упорядочение. Тогда идеал $J \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеет базис Грёбнера. При этом базис Грёбнера идеала J является его базисом.

Определение 1.9. Мономиальным упорядочением на $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ называется любое бинарное отношение $>$ на $Z_{\geq 0}^n$, обладающее следующими свойствами:

1. отношение $>$ является линейным упорядочением на $Z_{\geq 0}^n$;
2. если $\alpha > \beta$, то для любого $\gamma \in Z_{\geq 0}^n$ $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$;
3. отношение $>$ вполне упорядочивает множество $Z_{\geq 0}^n$, т.е. любое ненулевое подмножество в $Z_{\geq 0}^n$ имеет минимальный (наименьший) элемент (по отношению к упорядочению $>$).

ГЛАВА 2

НАХОЖДЕНИЕ УСЛОВИЙ ЦЕНТРА

2.1 Проблема центра

Рассмотрим проблему центра для кубической системы (1.1) с четырьмя неоднородными инвариантными прямыми, которые не пересекаются в одной точке.

Теорема 2.1. Пусть у кубической системы (1.1) четыре инвариантные прямые вида $1 + Ax + By = 0$ и первое условие Ляпунова обращается в ноль $L_1 = 0$. Тогда особая точка $O(0,0)$ является центром для (1.1).

$$L_1 = ac + 2ag - bd - 2bf + cf - dg - 3k.$$

Теорема 2.2. Начало координат является центром для кубической системы (1.1) с четырьмя неоднородными инвариантными прямыми тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

Условие (1)

$$a = b = f = g = k = l = p = q = r = s = 0;$$

Условие (2)

$$a = f = k = l = p = r = 0, q = d(b + g), s = -b(b + g),$$

$$m = \frac{[b(b + c)(b + g) - n(2b + g)]}{b};$$

Условие (3)

$$a = f = k = p = r = 0, d = \frac{bl^2 - (b+c)s^2}{ls}, g = -b, m = \frac{l^2 + s^2}{s},$$
$$n = \frac{l^2 - 2s^2}{s}, q = -3l;$$

Условие (4)

$$a = f = k = p = r = 0, d = \frac{[h^2(b-c+2g) + l^2(2b+g)]}{lh},$$
$$m = (c-b-g)(b+g), n = \frac{[l^2 - 2h^2 + h(3b-c+2g)(b+g)]}{h},$$
$$q = \frac{[h^3 - b(b+g)h^2 - 2l^2h + l^2(2b+g)(b+g)]}{lh}, c$$
$$= \frac{[2(b+g)^2h - l^2 - h^2]}{[h(b+g)]}, h = b^2 + bg + s;$$

Условие (5)

$$a = r = 1, b = l = s = 0, f = -2, k = g, n = -d - 1, p = -c, q = g(d+1);$$

Условие (6)

$$a = r = 1, q = (b+g)(bg + g^2 - m) - 2g, s = 0, k = g,$$
$$d = (b+g)(b+2g-c) + b(b+g)^{-1} - 2, l = -b,$$
$$m = (c-b-g)(b+g) + (b-g)(b+g)^{-1}, n = -d - 1, f = -2,$$
$$p = b - c;$$

Условие (7)

$$b = g = k = l = q = s = 0, r = 1 - \gamma, f = \gamma - 2, a = 1,$$
$$m = \frac{[(d+1)(\gamma-1) - n]}{\gamma}, p = c(\gamma-1);$$

Условие (8)

$$b = l = s = 0, a = 1, k = g, r = 1 - \gamma, f = \gamma - 2, m = cg - g^2 + \gamma - 1,$$
$$q = g(d - \gamma + 1), n = (\gamma - 1 - d)(1 - \gamma), p = (c - g)\gamma - c;$$

Условие (9)

$$\begin{aligned}a &= 1, b = l = s = 0, k = g, d = \gamma^2 - \gamma + cg - 2, m = 2\gamma^2 - \gamma + cg - g^2 - 1, \\n &= (1 + \gamma)(1 - cg - \gamma^2), p = (c + g)\gamma - c, q = g(\gamma^2 + cg - 1), \\f &= \gamma - 2, c = \frac{[\gamma(\gamma - 1)^2 + g^2]}{[g(1 - \gamma)]}, r = 1 - \gamma;\end{aligned}$$

Условие (10)

$$r = s = 0, a = 1, k = g = l = -b, m = -n, p = q = b, f = -1;$$

Условие (11)

$$\begin{aligned}a &= 1, r = s = 0, k = l = g = -b, p = q = 3b, f = -1, c = \frac{d - 2b^2 + 2}{b}, \\m &= n = -d - 2;\end{aligned}$$

Условие (12)

$$\begin{aligned}a &= h + 1, b = g = l = q = s = 0, c = \frac{[k(2h + 1)]}{h}, p = -3k, f = -h - 1, \\n &= -d - 1, r = h, d = -h - 1 - h^{-1}k^2, m = \frac{k^2 - 2h^2}{h};\end{aligned}$$

Условие (13)

$$\begin{aligned}a &= h + 1, b = g = l = q = s = 0, m = (2d + 5)(d - h + 1), \\c &= \frac{[(d + 2h + 2)(d - h + 1)(d + 2)]}{k}, n = -(d + 1), p \\&= \frac{[(d^2 - dh + 3d - 4h + 2)(d - h + 1)(d + 2)]}{k}, \\k^2 - h(d - h + 1)(d + 2)^2 &= 0, r = h - 1 - d, f = d - h;\end{aligned}$$

Условие (14)

$$\begin{aligned}a &= k = r = 0, l = -b, d = b(c - g) - 2, s = -b(b + g), f = -1, \\m &= (c - b - g)(b + g), n = b^2 - b(c - 2g) + 1, p = b - c + g, \\q &= bc(b + g) - g(b^2 + bg + 1);\end{aligned}$$

Условие (15)

$$\begin{aligned}a &= h + 1, f = -1, l = -b, r = 0, m = \frac{[k(bh - g + k)]}{[h(h + 1)]}, \\c &= \frac{bh^2 + bh - gh - g + 2hk + k}{[h(h + 1)]}, \\p &= \frac{-k}{h + 1}, d = \frac{2h^3 + 2h^2 - b^2h - b^2 - bk}{[h(h + 1)]}, s = h - b^2 - bg + h^2, \\n &= \frac{[bk - (h + 1)(bg + h^2)]}{[h(h + 1)]}, \\q &= \frac{[(h + 1)^2(bh - g + k) - (h + 1)(b^3 + b^2g - g + k) - bk(b + g)]}{[h(h + 1)]};\end{aligned}$$

Условие (16)

$$\begin{aligned}a &= h + 1, f = -1, l = -b, r = 0, c = -3b, g = -2b, k = -2b(h + 1), m = 2b^2, \\n &= -h, p = 2b, s = \frac{[b^2(2h + 1)]}{h}, d = \frac{[b^2(2h + 1) + h^2(h - 1)]}{h^2}, \\q &= \frac{[b(2h^2 - 2b^2h - b^2)]}{h^2};\end{aligned}$$

Условие (17)

$$\begin{aligned}a &= h + 1, f = -1, l = -b, r = 0, g = -2b, p = 0, c = \frac{b}{h}, d = \frac{h^2 - b^2 - h}{h}, \\k &= -b(h + 1), s = b^2, m = -\frac{b^2(h + 1)}{h}, n = \frac{2b^2 - h^2}{h}, \\q &= \frac{[b(b^2 + 2h)]}{h};\end{aligned}$$

Условие (18)

$$\begin{aligned}a &= h + 1, f = -h - 2, l = -b, r = h + 1, k = (b + g)(h + 1), \\d &= \frac{b^2 - 2h^2 + bh(b - c + g)}{h^2}, p = -(bh + c + gh),\end{aligned}$$

$$m = -[(b+g)(b+g+c) + h + 1], s = -b(b+g),$$

$$n = \frac{[h^2 + b^2(h^2 - h - 1) + bh(c + gh - g)]}{h^2},$$

$$q = \frac{[b^3(h+1) - gh^2 - bgh(c-g) + b^2(g + 2gh - ch)]}{h^2};$$

Условие (19)

$$p = \frac{[(b-c)h + (k-g)\gamma]}{h}, q = \frac{[h(cs - gh) + s(g - k)]}{h^2}, l = -b,$$

$$m = \frac{[(d-h+1)h^2 + h(c(k-g) - s) - (k-g)^2]}{h^2}, r = 1 - \gamma,$$

$$n = \frac{[s\gamma - (1+d)h]}{h}, a = h + 1, f = \gamma - 2,$$

$$c = \frac{[bh^2 + h(2b\gamma - b + g\gamma - 2g + 2k) + (k-g)\gamma]}{h^2 + h\gamma},$$

$$d = \frac{[b^2(1 - 2\gamma - h) + b(g - k - g\gamma) + 2h(\gamma + h)(\gamma + h - 1)]}{h^2 + h\gamma},$$

$$s = h^2 + 2h - b^2 - bg + fh;$$

Условие (20)

$$a = h + 1, g = l = -b, c = \frac{[(b+k)(h+1)]}{h}, r = s = h, d = -\frac{b(b+k)}{h},$$

$$m = \frac{bk - h^2 + k^2}{h}, f = -h - 1, n = \frac{b^2 + bk - h^2}{h}, p = -b - 2k, q = 2b + k;$$

Условие (21)

$$a = h + 1, g = l = -b, c = \frac{[(2h^2 + h + s)b]}{hs}, p = \frac{-3bh}{s}, f = -h - 1, k = \frac{bh}{s},$$

$$q = 3b, m = \frac{[s^2(s - 2h) + b^2(s + h)]}{s^2}, n = m + 3(h - s),$$

$$d = \frac{[(s-h)(h+1)s^2 - (s+h)b^2h]}{hs^2}, r = h;$$

Условие (22)

$$\begin{aligned} a &= h+1, c = \frac{[h^2(hg-b) + hb^2(3b+2g) + b^3]}{b^2h}, \\ d &= -\frac{[h^2(b+2g) + b^2(2b+g)]}{bh}, f = -2h-1-ghb^{-1}, \quad m = \\ &= \frac{[bh(b+g)^2(b^2+h^2) + (b+g)(b^4(h+1) - h^2(h^3+2b^2)) + bh^2(h^2-2b^2)]}{b^3h}, \\ s &= \frac{[bh - (b+g)(b^2+h^2)]}{b}, n = \frac{[h(b+g)(2b+g)(h^2+b^2) + b^2(b^2-2h^2)]}{b^2h}, \\ l &= -b, p = \frac{[bh^2(3b+g) - b^3(3b+2g) - h(b+g)(2b+g)(h^2+b^2)]}{b^3}, \\ q &= \frac{[(b+g)(h^4 - bh^2(b+g) - b^3(2b+g)) + bh(2b^2 - h^2)]}{b^2h}, \\ k &= \frac{[(b+g)(h^3 + b^2h + b^2) - bh^2]}{b^2}, r = \frac{[h(2b+g)]}{b}; \end{aligned}$$

Условие (23)

$$p = \frac{[(b-c)h + (k-g)\gamma]}{h}, q = \frac{[h(cs - gh) + s(g-k)]}{h^2}, l = -b,$$

$$m = \frac{[(d-h+1)h^2 + h(c(k-g) - s) - (k-g)^2]}{h^2}, a = h+1,$$

$$r = 1 - \gamma, n = \frac{[s\gamma - (1+d)h]}{h}, \gamma = -\frac{bh+v}{b},$$

$$c = [b^2u^2(bh-v) + b^2uv(2b+v) - \frac{h^2v^2(bh+b+v)}{b^2huv}],$$

$$d = \frac{[(2b+v)(b^2-h^2) - b^2hc]}{bh^2}, s = \frac{bu - b^2 - bv}{h},$$

$$f = \gamma - 2, b^3hu^2 - b^2uv(b+v) + h^2v^2(bh+b+v) = 0,$$

$$u = (b+g)(h+1) - k, v = (b+g)h - b;$$

2.2 Упрощение условий существования центра

Для анализа и сокращения данных условий, перепишем их в более простом виде.

Рассмотрим подробно упрощение условия (21).

$$\begin{aligned}a &= h + 1, g = l = -b, c = \frac{[(2h^2 + h + s)b]}{hs}, p = \frac{-3bh}{s}, f = -h - 1, k = \frac{bh}{s}, \\q &= 3b, m = \frac{[s^2(s - 2h) + b^2(s + h)]}{s^2}, n = m + 3(h - s), \\d &= \frac{[(s - h)(h + 1)s^2 - (s + h)b^2h]}{hs^2}, r = h;\end{aligned}$$

Для этого необходимо задать лексикографический порядок переменных.

$$lex = \{l, q, k, p, s, n, m, r, d, a, f, c, b, g\}.$$

Так же, для контроля знаменателей, введем новый параметр t и добавим еще одно условие:

$$1 - ths = 0.$$

Теперь мы можем переписать каждое уравнение из этого множества в другом виде:

$$\begin{aligned}a - h - 1 &= 0, & g - l &= 0, & g + b &= 0, & chs - (2h^2 + h + s)b &= 0, \\ps + 3bh &= 0, & f + h + 1 &= 0, & ks - bh &= 0, & q - 3b &= 0, \\ms^2 - [s^2(s - 2h) + b^2(s + h)] &= 0, & n - m - 3(h - s) &= 0, \\dhs^2 - [(s - h)(h + 1)s^2 - (s + h)b^2h] &= 0, & r - h &= 0, \\1 - ths &= 0.\end{aligned}$$

Найдем базис Грёбнера этого множества условий с помощью встроенной в пакет Wolfram Mathematica функции

$$GroebnerBasis[\{poly1, poly2, \dots\}, \{x1, x2, \dots\}],$$

где $\{poly1, poly2, \dots\}$ – это список полиномов, а $\{x1, x2, \dots\}$ – это порядок коэффициентов.

$$y21 = \{-1 + a - h, g - l, b + g, chs - b(h + 2h^2 + s), 3bh + ps, 1 + f + h, -bh + ks, -3b + q, ms^2 - s^2(-2h + s) - b^2(h + s), -m + n - 3(h - s), dhs^2 - (1 + h)s^2(-h + s) + b^2h(h + s), -h + r, 1 - hst\}$$

Посчитаем базис Грёбнера заданного условия (21), учитывая порядок переменных lex и исключая искусственно введенную переменную t .

$$gb21 = FullSimplify[GroebnerBasis[y21, lex, \{t\}]]$$

$$\begin{aligned} &\{b + g, 1 + f + h, -1 + a - h, -2g^3 + g^2(c - 4ch) + ch(1 + d(1 + 2h)^2 + h(5 + c^2 + 4h(2 + h))) + g(2 + d(1 + 2h)^2 + 2h(6 - c^2(-1 + h) + 13h + 4h^2(3 + h))), -h + r, 2g^2 - c^2h + cg(-1 + 2h) + (1 + 2h)(m + h(1 - d + h + m)), 2cg^2 + c(-h(2 + c^2 + 4d(1 + h) + 4h(2 + h)) + m) + g(c^2(-1 + 2h) - (3 + 2h)(2 + d + h(7 + 4h) + m)), cg(3 - 2h) + 2c^2h - 2g^2(3 + 2h) - (1 - d + h - m)(m + h(1 - d + h + m)), -m + n + h(3d + 3h + m + 2n), 2cg^2 + c(-h(5 + c^2 + 4d(1 + h) + 4h(2 + h)) + n) + g(c^2(-1 + 2h) - 2(6 + d(3 + h) + 2m + h(17 + h(13 + 4h) + m) + n)), 6(c - 2g)g + 9h^2 - 3h(-2 + d - 5m) + 7m - n + 2(d + m)(2m + n), -243dh + 162d^2h + 36c^3gh - 117h^2 - 126dh^2 + 36h^3 - 9c^2(23h + g^2(-4 + 8h)) + 9cg(-45 - 8g^2 + 16h(1 + h)^2 + 4d(-1 + 4h(1 + h))) - 222dm - 24d^2m - 279hm - 54dhm - 168m^2 + 32m^3 + 9(h + m) - 12d(1 + d)n + 6n^2 + 4n^3 + 18g^2(57 + 2d(5 + 2h) + 4h(19 + h(13 + 4h) + m) + 2n), -3h - m + n + 3s, 3g + 3ch + p + 2hp, -27h^2 + 3h(-2 + d - 11m) - 7m + n - 2(d + 2m - n)(2m + n) + 6g(-c + 5g + p), -6(c - 5g)g - (-1 + 2d + 6h + 4m - 2n)(3h + 2m + n) + \end{aligned}$$

$$+3cp, -9ch - 3g(5 + 4h) + (-1 + 2d + 2m)p, 3g(-1 + h) + (1 + d + n)p, 3(c - 5g)g + (1 + d + 3h + 2m - n)(3h + 2m + n) + p^2, 3k + p, 3g + q, -g + l\}$$

Теорема 2.3. Идеалы равны тогда и только тогда, когда их базисы Грёбнера равны.

Воспользуемся вышеприведенной теоремой и будем сокращать количество условий, удаляя поочередно элементы и сравнивая базисы Гребнера.

Удалим первый элемент:

$$e[21] = \text{FullSimplify}[\text{GroebnerBasis}[\text{Delete}[gb21, \{1\}], \text{lex}, \{t\}]];$$

Идеал **gb21** содержит 22 элемента, а полученный идеал **e[21]** содержит 21 элемент. Значит можно сделать вывод, что они не равны.

Удалим теперь четвертый элемент:

$$e[21] = \text{FullSimplify}[\text{GroebnerBasis}[\text{Delete}[gb21, \{4\}], \text{lex}, \{t\}]];$$

В этом случае длины идеалов совпадут. Тогда разделим один на другой, чтобы проверить совпадают ли сами идеалы.

$$\text{Table}[\text{Factor}[gb21[[i]]/e[[i]]], \{i, 1, 22\}]$$

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Так как в результате деления получились единицы, можно сделать вывод, что эти идеалы равны, а значит, четвертый элемент можно выбросить.

Продолжив удалять элементы аналогичным образом, можно значительно сократить их количество.

В случае идеала 21, лишними являются элементы 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14.

$$e[21] = \text{FullSimplify}[\text{Factor}[\text{Delete}[gb21, \{\{4\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{11\}, \{12\}, \{14\}\}]]]$$

$$\{b + g, a + f, 1 + f + r, -3 - 3f + m - n - 3s, -21 - 3f(16 + 9f) + 26m + 33fm - 8m^2 + n + 2n^2 - d(3 + 3f + 4m + 2n) + 6g(-c + 5g + p), 18f^2 + 6(c - 5g)g + f(39 - 24m) + (-7 + 4m - 2n)(-3 + 2m + n) + d(-6 - 6f + 4m + 2n) - 3cp, -3c(1 + f) + 3g - (1 + 2f)p, 9c(1 + f) + 3(-1 + 4f)g + (-1 + 2d + 2m)p, -3(2 + f)g + (1 + d + n)p, -6 - 15f - 3(c - 5g)g - (3f - 2m)^2 + 10m + d(3 + 3f - 2m - n) - n + n^2 - p^2, -3k - p, 3g + q, -g + l\}$$

Проделав аналогичные операции с каждым из двадцати трех условий, получим их упрощенные базисы Гребнера.

Результаты представлены в Приложении А.

2.3 Сокращение количества условий существования центра

Когда получены все 23 идеала, соответствующие данным 23 условиям, можно провести анализ на подмножество.

Для этого нужно выделить всевозможные пары идеалов (506 пар) и делить один на другой с помощью встроенной в Wolfram Mathematica функции

$$PolynomialReduce[poly1, poly2, \{x1, x2\}],$$

где $poly1$ и $poly2$ – это пара идеалов, а $\{x1, x2, \dots\}$ – это порядок коэффициентов.

Рассмотри пример деления второго идеала на восьмой.

$$e[2] = \{f, a, r, b(-(b + c)(b + g) + m) + (2b + g)n, b(b + g) + s, p, k, -d(b + g) + q, l\}$$

$$e[8] = \{b, -1 + a, 1 + f + r, -1 - f - cg + g^2 + m, (1 + f)(1 - d + f) + n,$$

$$s, -c(1 + f) + (2 + f)g + p, -g + k, (1 - d + f)g + q, l\}$$

***PolynomialReduce*[bg2, bg8, lex];**

***Table*[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]**

$$\{f, 1, -1 - f, -g + dg - 2fg + dfg - f^2g, 0, c + cf - 2g - fg, g, -g - fg, 0\}$$

Из того, что остатки от деления не равны нулю, следует, что многообразие $V(I_8)$ не содержится в многообразии $V(I_2)$.

В этом случае мы не можем убрать из рассмотрения идеал I_8 , т.к. он дает новые условия центра для кубической системы.

Рассмотрим пример деления второго идеала на первый.

$$e[2] = \{f, a, r, b(-(b + c)(b + g) + m) + (2b + g)n, b(b + g) + s, \\ p, k, -d(b + g) + q, l\}$$

$$e[1] = \{g, b, f, a, r, s, p, k, q, l\}$$

***PolynomialReduce*[bg2, bg1, lex];**

***Table*[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]**

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

Из того, что остатки от деления равны нулю, следует, что многообразие $V(I_1)$ содержится в многообразии $V(I_2)$.

В этом случае идеал I_1 не дает новые условия центра для кубической системы, поэтому его можно считать лишним.

Проделав аналогичные действия со всеми парами условий, мы получаем, что условия 1, 5, 7 – 14, 16 – 18, 20 и 22 содержатся в других и их можно убрать из рассмотрения. Обоснование этого вывода находится в Приложении В.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дипломной работе рассматривалась кубическая система с четырьмя инвариантными прямыми.

В пункте 1.1 «Четыре инвариантные прямые в общем положении» выведены и представлены условия, необходимые для того, чтобы кубическая система имела четыре инвариантные прямые. За основу этих выводов были взяты условия существования двух инвариантных прямых, описанные в книге Д.Козьма «».

Во втором пункте первой главы вводятся некоторые определения из компьютерной алгебры, связанные с полиномиальными идеалами и многообразиями. А так же определение базиса Гребнера, основное для дальнейших выводов и рассуждений.

В пункте 2.1 рассматривается проблема центра кубической системы с четырьмя инвариантными прямыми. В нем приведена теорема 2.2, определяющая двадцать три условия, необходимых для того, чтобы точка являлась центром кубической системы.

В пункте 2.2 описывается алгоритм анализа и сокращения условий из предыдущего пункта. Сперва вводится лексикографический порядок переменных и добавляются условия ограничения на знаменатели для подсчета базиса Гребнера каждого из двадцати трех условий, описанных в предыдущем пункте. Далее приводится теорема 2.3 о равенстве идеалов и на ее основе сокращаются базисы Гребнера. Результаты представлены в Приложении А.

В следующем пункте 2.3 описано сокращение количества условий. Оно основано на проверке каждого идеала на включение во все остальные. По результатам данной проверки, среди двадцати трех идеалов подмножествами других оказались пятнадцать идеалов. Результаты представлены в Приложении В.

Таким образом, мы существенно сократили количество условий, необходимых для того, чтобы точка являлась центром кубической системы с четырьмя неоднородными инвариантными прямыми. А применение базисов Гребнера позволяет значительно упростить изначальный вид условий.

Описанный в работе метод можно использовать для оптимизации процесса нахождения условий центра кубической системы. Он достаточно прост и эффективен, что позволяет сократить время и погрешность вычислений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козбма Д. Интегрируемость кубических систем с тремя инвариантными прямыми и инвариантными кониками, 2013.
2. Садовский А.П. Полиномиальные идеалы и многообразия. Минск, 2004.
3. Аржанский И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. Москва, 2003.
4. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры, 2000.
5. Wolfram Language&System. Documentation Center [Электронный ресурс] - Режим доступа: <http://reference.wolfram.com/language/?source=nav>

Базисы Гребнера

bg1 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[1], bb, {t}]]

[\[упростить в пол...\]](#) [\[базис Грёбнера\]](#)

{g, b, f, a, r, s, p, k, q, l}

bg2 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[2], bb, {t}]]

[\[упростить в пол...\]](#) [\[базис Грёбнера\]](#)

{f, a, r, b (- (b + c) (b + g) + m) + (2 b + g) n, b (b + g) + s, p, k, -d (b + g) + q, l}

bg3 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[3], bb, {t}]]

[\[упростить в пол...\]](#) [\[базис Грёбнера\]](#)

{b + g, f, a, r, c² (m - n)² + 2 c g (m - n) (m + 2 n) + g² (m + 2 n)² + d² (-2 m² + m n + n²),
-m + n + 3 s, p, k, -(c + g) m + (c - 2 g) n + d q,
d (m - n) (2 m + n) - (c (m - n) + g (m + 2 n)) q, -2 m² + m n + n² + q², 3 l + q}

bg4 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[4], bb, {t}]]

[\[упростить в пол...\]](#) [\[базис Грёбнера\]](#)

{f, a, r, (b + g) (b - c + g) + m, 49 b⁶ + (-2 d² + (2 c - 5 g)²) (c - 2 g)² g² +
14 b⁵ (-9 c + 26 g) + (d² + 2 (2 c - 5 g) (c - g)) (c - 2 g) g n +
(d² + (c - g)²) n² + b⁴ (109 c² - 5 d² - 720 c g + 1082 g² + 14 n) +
b ((c - 2 g) g (8 c³ - 4 c d² - 92 c² g + 15 d² g + 296 c g² - 290 g³) +
(c (4 c² + d²) - 6 (6 c² + d²) g + 76 c g² - 38 g³) n + 2 (c - g) n²) +
b² (4 c⁴ - 108 c³ g + 1361 g⁴ + 6 g² n + n² - d² (41 g² + 4 n) -
2 c² (d² - 353 g² + 7 n) + 2 c g (11 d² - 846 g² + 17 n)) +
b³ (-36 c³ + 456 c² g - 24 d² g + 1648 g³ + 38 g n + c (7 d² - 4 (396 g² + n))) ,
-2 (b + g) (b - c + 2 g) + n + 3 s, p, k,
7 b³ + 2 c² g + b² (-9 c + 26 g) - g (d² - 10 g² + n) +
c (-9 g² + n) + b (2 c² - d² - 18 c g + 29 g² + n) + d q,
d (- (b + g)² (2 b + g) (b - c + 2 g) + (b + g) (3 b - 2 c + 3 g) n - n²) +
(b + g) (b - c + 2 g) (7 b - 2 c + 5 g) + (b + c - g) n) q,
(b + g)² (-d² + (b - c + 2 g) (9 b - 2 c + 6 g)) - (b + g) (2 b - 3 c + 4 g) n + n² + q²,
-d (b + g) + 3 l + q}

bg5 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[5], bb, {t}]]

[\[упростить в пол...\]](#) [\[базис Грёбнера\]](#)

{b, 2 + f, -1 + a, -1 + r, 1 + d + n, s, c + p, -g + k, -(1 + d) g + q, l}

bg6 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[6], bb, {t}]]

[\[упростить в пол...\]](#) [\[базис Грёбнера\]](#)

{2 + f, -1 + a, -b³ + b² (c - 4 g) + g (2 + d + (c - 2 g) g) + b (1 + d + 2 c g - 5 g²),
-1 + r, -3 - 2 d + (b + g) (3 b - 3 c + 5 g) + m, 1 + d + n, s,
-b + c + p, -g + k, -(b + g) (-1 + (b + g) (b - c + 2 g)) + q, b + l}

```

bg7 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[7], bb, {t}]]
      |упростить в пол... |базис Грёбнера
{g, b, -1 + a, 1 + f + r, -1 - d (1 + f) + f (-1 + m) + 2 m + n, s, -c (1 + f) + p, k, q, 1}

bg8 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[8], bb, {t}]]
      |упростить в пол... |базис Грёбнера
{b, -1 + a, 1 + f + r, -1 - f - c g + g2 + m, (1 + f) (1 - d + f) + n,
 s, -c (1 + f) + (2 + f) g + p, -g + k, (1 - d + f) g + q, 1}

bg9 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[9], bb, {t}]]
      |упростить в пол... |базис Грёбнера
{b, (1 + f)2 (2 + f) + c (1 + f) g + g2, -1 + a, d - f (3 + f) - c g,
 1 + f + r, -5 - f (7 + 2 f) - c g + g2 + m, 7 + f (10 + 3 f) + 2 c g - g2 + n,
 s, -c (1 + f) - (2 + f) g + p, -g + k, -g (3 + f (4 + f) + c g) + q, 1}

bg10 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[10], bb, {t}]]
      |упростить в пол... |базис Грёбнера
{b + g, 1 + f, -1 + a, r, m + n, s, g + p, -g + k, g + q, -g + 1}

bg11 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[11], bb, {t}]]
      |упростить в пол... |базис Грёбнера
{b + g, 1 + f, -1 + a, 2 + d + (c - 2 g) g, r,
 -c g + 2 g2 + m, -c g + 2 g2 + n, s, 3 g + p, -g + k, 3 g + q, -g + 1}

bg12 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[12], bb, {t}]]
      |упростить в пол... |базис Грёбнера
{g, b, a + f, -c2 (1 + f) + (d - f) (1 + 2 f)2, 1 + f + r, -2 + d - 3 f + m, 1 + d + n, s,
 3 (d - f) (1 + 2 f) + c p, 3 c (1 + f) + p + 2 f p, 9 (1 + f) (-d + f) + p2, 3 k + p, q, 1}

bg13 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[13], bb, {t}]]
      |упростить в пол... |базис Грёбнера
{g, b, c2 + 9 a2 (1 + f) + (-1 + f)2 (1 + f) - a (6 + c2 - 6 f2), 1 - a + d - f, 1 + f + r,
 -(1 + f) (3 + 2 a + 2 f) + m, a + f + n, s, (1 + f) (-c2 + 6 a (2 + f) + 2 (-2 + f + f2)) + c p,
 -c (3 + a (-1 + f) + f (2 + f)) + (-1 + 3 a + f) p,
 (1 + f) (-c2 (1 + f) + 4 a (2 + f) (1 + 2 f) + 4 (2 + f) (1 + f + f2)) + p2,
 -c (a + f) + 3 k + p, q, 1}

bg14 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[14], bb, {t}]]
      |упростить в пол... |базис Грёбнера
{1 + f, a, 2 + d + b (-c + g), r, (b + g) (b - c + g) + m, -1 + b (-b + c - 2 g) + n,
 b (b + g) + s, -b + c - g + p, k, g - b (c - g) (b + g) + q, b + 1}

```

bg15 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[15], bb, {t}]]

[Упростить в пол...](#) [Базис Грёбнера](#)

$$\{b+1, (-1+a)(2b+g)-br, 1+f+r, \\ -(-1+a)^2(ab+k)(2ab+k)-(-1+a)\left(a\left(b^2+a\left((-1+a)^2-5b^2\right)\right)+(1-4a)bk\right)r+ \\ \left(2a\left((-1+a)^3+(1-2a)b^2\right)-(-1+a)bk\right)r^2-\left((-1+a)^3-ab^2\right)r^3, \\ (-1+a)^3d(a-r)-(-1+a)^3(-2+a-r)(a-r)+ \\ (-1+a)bk(-2+3a-r)+b^2(-1+a-r)(a(-3+4a-2r)+r), \\ (-1+a)^4q(a-r)-(-1+a)b^2k(-1+a-r)(-2+3a-r)- \\ b^3(1-a+r)^2(a(-3+4a-2r)+r)-(-1+a)^3b(a-r)(-2-r-2r^2+2a(1+r)), \\ (-1+a)^3n(a-r)+(-1+a)^3(-1+a-r)(a-r)-(-1+a)bk(-2-r^2+a(2+r))- \\ b^2(-1+a-r)(4a^2-(-2+r)r-a(4+r)), \\ (-1+a)^2p(a-r)+b(-1+a-r)(2(-1+a)a+ar-r^2)+(-1+a)k(-2-r^2+a(2+r)), \\ (-1+a)^2c(a-r)-(-1+a)k(-2+3a-r)-b(a(-1+a-r)(-1+3a-r)+r), \\ (-1+a)^3m(a-r)+(-1+a)bk(-1+a-r)(-2+3a-r)+(-1+a)^3(1+2a-2r) \\ (a-r)r+b^2(-1+a-r)(4a^3-r^2-6a^2(1+r)+a(2+r)(1+2r)), \\ b((-1+a)(b+k)-br)+s+(-2+a)as, 1-(-1+a)(a-r)(-2+3a-r)t\}$$

bg16 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[16], bb, {t}]]

[Упростить в пол...](#) [Базис Грёбнера](#)

$$\{2b+g, 2c-3g, 1+f, -4(-1+a)^2(-2+a-d)+(1-2a)g^2, r, -g^2+2m, \\ -1+a+n, 2+a^2+d-a(3+d)+s, g+p, -ag+k, ag-dg+2q, -g+2l\}$$

bg17 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[17], bb, {t}]]

[Упростить в пол...](#) [Базис Грёбнера](#)

$$\{2b+g, 1+f, 2(-1+a)c+g, 4-2a+2d-cg, r, -2cg+g^2+4m, \\ -1+a+cg+n, -g^2+4s, p, -ag+2k, g(4-cg)+4q, -g+2l\}$$

bg18 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[18], bb, {t}]]

[Упростить в пол...](#) [Базис Грёбнера](#)

$$\{1+a+f, b^2(1+f)+(2+d)(2+f)^2-b(2+f)(c-g), \\ 1+f+r, -1-f+(b+g)(b-c+g)+m, 1+d-b(b+g)+n, b(b+g)+s, \\ c-b(2+f)-(2+f)g+p, (1+f)(b+g)+k, -b(2+d)-(1+d)g+q, b+1\}$$

bg19 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[19], bb, {t}]]

[Упростить в пол...](#) [Базис Грёбнера](#)

$$\begin{aligned} & \{-1-f-r, -2-4a+4a^2+4b^2+2ab^2+a^2b^2-6bc+c^2-a^2c^2+ \\ & (2-4a)d+8bg-4cg+4g^2+f^2(-2+a-d+(2b+g)(2b-c+g))+ \\ & f(-7+8b^2-d+(c-2g)^2+b(-6c+10g)+a(4+4b^2-bc-c^2-2d+2bg))+ \\ & (2a+f)^2m+(2+f)n, 1-d-a^2(2+f)+b^2(2+f)+f(3+f)+ \\ & b(2+f)g-n+a(1+d-f(2+f)+n), -1+a^2-b^2+(-1+a)f-bg-s, \\ & b^2-2a^2(2+f)-(d-2f)(2+f)+a(2+d-2f)(2+f)+b(c+cf-p), -2b^2(-1+f)+ \\ & 2bc(2+f)-2a^2(8+3f)-bfg+a(16-b^2+c^2+8d-8f+3df-6f^2-4m)+ \\ & f(c^2-d+6f-cg-2m)-2(-1+3d-8f+n)-(c-2g)p, \\ & c(2+f(2+a+f))-b(4+f(5+a+2f))-(2+f)^2g-(2a+f)p, 2b^3(-1+a+2f)- \\ & c(2+d(4+3f)+a^2(6+4f)-f(6+5f)+a(-8+f+4f^2-d(3+2f)))- \\ & 2b^2(2c(1+f)+g-fg)+b(6+2a^2(11+6f)+d(11+6f)-f(19+14f)+ \\ & 2c(c-(1+f)g)-2m+4fm+a(-30-2c^2+3f(1+4f)-d(11+6f)+8m))+ \\ & g(6+8a^2(1+f)+d(8+7f)-f(10+11f)-4a(4+d+f+df-2f^2)-2n)+(d-f)p, \\ & -8a+4a^2+13b^2+6ab^2+3a^2b^2-16bc+4c^2-3a^2c^2-6(-1+a)f^3+ \\ & d(4-f(8+3f)+a(-8+f(4+3f)))+12(2b-c)g+12g^2+ \\ & f^2(16-2a(5+3a)+10b^2-4bc+c^2+11bg-4cg+3g^2)-4m+ \\ & 12a^2m+f(-20a^2+26b^2+b(-13c+30g)+4(-1+c^2-3cg+3g^2-m)+ \\ & a(20+11b^2-3bc-2c^2+6bg+8m))+4n+2fgp-p^2, \\ & -c(a+f)+b(1+a+2f)+fg+2k+p, -c(a+f)+b(-3+3a-2d+2f)+ \\ & (4a-2d+3f)g+p+2q, b+1\} \end{aligned}$$

bg20 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[20], bb, {t}]]

[Упростить в пол...](#) [Базис Грёбнера](#)

$$\begin{aligned} & \{b+g, a+f, df+cg, 1+f+r, d^2-dg(c+g)+g^2(-1-f+m), \\ & c^2g+c(-d+g^2)+fg(-1-f+m), c^2(1+f)+cfg+f^2(-1-f+m), -1+d-f+n, \\ & 1+f+s, -2d+g(2c+g+p), 2f(1+f-m)+c(-g+p), 2c(1+f)+f(g+p), \\ & -g(2+d+2f-2m)+dp, -4-g^2-4f(2+f-m)+4m+p^2, -g+2k+p, 3g+p+2q, -g+1\} \end{aligned}$$

bg21 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[21], bb, {t}]]

[упростить в пол...](#) [базис Грёбнера](#)

$$\{b + g, a + f, -c^3 (1 + f)^2 + c (d - f) (1 + f) (1 + 2 f)^2 + 2 c^2 (1 + f) (2 + f) g - (1 + 2 f)^2 (d + 2 f^2) g - c (5 + 4 f) g^2 + 2 g^3, 1 + f + r, c^4 (1 + f) - c^3 (3 + 2 f) g + c g (5 - 3 d + f (7 + 4 f + 8 f^2) - 3 m) + 2 g^2 (-1 + d + f + 4 f^2 + m) + c^2 (-2 + 2 f (-1 - 2 d (1 + f) + 2 f (1 + f)) + 2 g^2 + m), c^3 (1 + f) - c^2 (3 + 2 f) g + (-1 + 2 f) g (-1 + d + f + 4 f^2 + m) + c (-2 + 2 f (-1 - 2 d (1 + f) + 2 f (1 + f)) + 2 g^2 + m), g + c (1 + f) (-2 + d - 3 f + m) - g (d + f + 4 f^2 + m), c^2 (1 + f) - d (1 + f) (1 + 2 f) - c (3 + 2 f) g + 2 g^2 - f (1 + 2 f) (1 + f - m), -c^3 (1 + f) + 2 c^2 (2 + f) g + g (d^2 - d (5 + 6 f) - f (3 + f (15 + 8 f)) + 4 g^2 - (-1 + m) (2 + m)) + c (-4 - f (13 + f (13 + 4 f)) - 6 g^2 + m^2 + d (3 + f (7 + 4 f) + m)), -d^2 + 2 c^2 (1 + f) - c (5 + 2 f) g + 2 g^2 - f (d^2 + f + f^2 + 2 d (1 + f) + 4 g^2) - (d + f) m + f m^2, c (3 + 3 f - m + n) - g (-3 + 3 d - 9 f + m + 2 n), -3 + 3 d (1 + f) + 2 m + n + f (-6 - 3 f + m + 2 n), 9 f^2 + 6 (c - 2 g) g + 3 f (4 - 5 m) + (-1 + 2 m) (-3 + 2 m + n) + d (3 + 3 f + 4 m + 2 n), -162 - 351 f - 225 f^2 - 36 f^3 + 207 c^2 (1 + f) + 342 g^2 - 468 f g^2 - 9 c g (53 + 4 d + 8 f - 4 m) + 288 m + 279 f m - 108 g^2 m - 168 m^2 + 32 m^3 + 36 g^2 n + 6 n^2 + 4 n^3 - 6 d^2 (27 + 27 f + 4 m + 2 n) - 3 d (-39 - 24 g^2 + 3 f (1 + 14 f - 6 m) + 56 m + 4 n), 3 + 3 f - m + n + 3 s, -21 - 3 f (16 + 9 f) + 26 m + 33 f m - 8 m^2 + n + 2 n^2 - d (3 + 3 f + 4 m + 2 n) + 6 g (-c + 5 g + p), -21 - 39 f - 6 (c - 5 g) g + 26 m + n + 2 (- (3 f - 2 m)^2 + d (3 + 3 f - 2 m - n) + n^2) + 3 c p, 3 c (1 + f) - 3 g + p + 2 f p, 9 c (1 + f) + 3 (-1 + 4 f) g + (-1 + 2 d + 2 m) p, -3 (2 + f) g + (1 + d + n) p, 6 + 15 f + 3 (c - 5 g) g + (3 f - 2 m)^2 - 10 m + n - n^2 + d (-3 - 3 f + 2 m + n) + p^2, 3 k + p, 3 g + q, -g + 1\}$$

bg22 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[22], bb, {t}]]

[упростить в пол...](#) [базис Грёбнера](#)

$$\begin{aligned} & \{4 b^3 (1+3 f) - 4 b^2 (c+c f-2 g-5 f g) + g ((1+f)^2 (2+f) - c (1+f) g + (1+2 f) g^2) + \\ & \quad b (2 (1+f)^2 - 4 c (1+f) g + (5+11 f) g^2), b (-1+2 a+f) + (-1+a) g, \\ & \quad -2 b c (1+f) + 2 a (1+f)^2 + f (1+f)^2 + b^2 (2+6 f) - c (1+f) g + b (3+7 f) g + (1+2 f) g^2, \\ & \quad -6 a (1+f) + 4 a^2 (1+f) + 4 b c (1+f) - f (1+f) (3+f) - 4 b^2 (1+3 f) + \\ & \quad c (1+f) g - b (5+11 f) g - (1+2 f) g^2, -20 a^2 + 8 a^3 + 6 b^2 (1+3 f) + c g - \\ & \quad 6 b (c+c f-g-2 f g) + a (14-2 f-2 c g+g^2) + f (7+f (4+f) - c g+2 g^2), \\ & \quad 1+d-f (3+f) - a (5+2 f) - (2 b+g) (3 b-c+2 g), 1+f+r, \\ & \quad 4+b^2 (2+6 f+4 g^2) + a^2 (4-4 c g+6 g^2) + a (-8+g (c (2-4 f) + 9 f g)) + \\ & \quad b (-3 f (1+f) g + 8 g^3 - 2 c (1+f+2 g^2)) + g (c (2+4 f-4 g^2) + g (-10-13 f+4 g^2+4 m)), \\ & \quad -8-f (7+f (4+f)) + 8 b^3 g + c g - c f g + 2 (1+2 f) g^2 - \\ & \quad 2 b^2 (4+f (13+3 f) + 4 (c-2 g) g) + a^2 (-4+4 c g-6 g^2) + \\ & \quad a (2 (5+f) + 2 c (-2+f) g + 3 (1-2 f) g^2) + \\ & \quad 2 b (c (4+f (5+f) - 4 g^2) + g (-11-f (17+3 f) + 4 g^2+4 m)), \\ & \quad 16 b^4 - 4 b c (1+f) (4+f) - 16 b^3 (c-2 g) + 2 b (12+f (27+7 f)) g + a^2 (4-4 c g+6 g^2) + \\ & \quad a (-4 (3+f) + 6 c g + 3 (-2+f) g^2) + (2+f) (8+f (3+f)^2 - 3 c g - c f g + 2 (1+f) g^2) + \\ & \quad 4 b^2 (-3+f (5+2 f) + 4 g (-c+g) + 4 m), 4 b^3 (5+9 f) + c (1+f) (4-2 a+f (3+f)) - \\ & \quad c^2 (1+f) g - c (7+2 f) g^2 + b^2 (-4 c (5+3 f) + 5 (9+11 f) g) - \\ & \quad b (11+f (17+3 f (3+f)) + 24 c g + 10 c f g - (33+26 f) g^2 - 8 m) + \\ & \quad g (-11-15 f+3 a (1+f) + 8 g^2+8 m+4 f (-f+g^2+m)), 8 c^2 - 29 f + 8 c^2 f - 20 f^2 - \\ & \quad 3 f^3 - 33 c g - 31 c f g + 12 g^2 - 8 c^2 g^2 + 2 f g^2 + 8 c g^3 + 4 a^2 (3-2 c^2+3 c g) + \\ & \quad 2 b^2 (7+9 f+4 c g) - 2 b (c (1+f) (10+3 f) + (-13+4 c^2-8 f) g - 8 c g^2) + \\ & \quad 8 (f+c g) m + a (-34+g^2-2 f (5+4 c^2-9 c g) + 16 m), \\ & \quad -2-2 a^2+b^2+a (3-2 f) - f^2-g^2-b (c+g) + n, 1+f-a (a+f) + b (b+g) + s, \\ & \quad -4 b^2 g + b (8+f (11+3 f) + 4 (c-2 g) g) + c (-4-6 f+2 a (-1+2 a+2 f) + 4 g^2) - \\ & \quad g (-14+6 a^2-15 f+9 a f+4 g^2+4 m) + 2 p, 4 b^2 g - b (5+f (8+3 f) + 4 (c-2 g) g) - \\ & \quad 4 c ((-1+a) (1+a+f) + g^2) + 4 k + g (-13-13 f+a (-1+6 a+9 f) + 4 g^2+4 m), \\ & \quad -24 b^3 - 4 (-1+a) c (1+a+f) + 8 b^2 (c-6 g) - b (17+f (16+3 f) - 8 c g+28 g^2) - \\ & \quad g (17-6 a^2-5 a (-1+f) + f (25+4 f) + 4 g^2-4 m) + 4 q, b+1\} \end{aligned}$$

bg23 = FullSimplify[GroebnerBasis[e[23], bb, {t}]]

[упростить в пол...](#) [базис Грёбнера](#)

$$\left\{ \begin{aligned} & (-1+a)^2 a b c (-1+a-r) + (-1+a)^3 (a-r) (-2+3a-r) r + \\ & a b^2 (-1+a-r) (3+3a^2+r(3+r)-2a(3+2r)) + \\ & k \left((-1+a)^3 c + (-1+a) b (3+3a^2+r(3+r)-2a(3+2r)) \right), \\ & (-1+a)^4 k (-2+a-r) + (-1+a) b^2 k (-1+a-r) (-1+2a-r) + \\ & a b^3 (-1+2a-r) (1-a+r)^2 + (-1+a)^3 d \left((1-a) (ab+k) + a b r \right) + \\ & (-1+a)^3 b \left(a^3 + a^2 (-3+r) + r^2 (2+r) + a (2+r-3r^2) \right), 1+f+r, (-1+a) (2b+g) - b r, \\ & b+l, (-1+a)^4 k r (-1-2a+2r) + (-1+a)^3 m \left((1-a) (ab+k) + a b r \right) + \\ & (-1+a)^3 b (-1+a-r) r \left(a^2 + r (2+r) - a (3+2r) \right) + \\ & (-1+a) b^2 k (-1+a-r) \left(2+2a^2+r(2+r)-a(4+3r) \right) + \\ & a b^3 (1-a+r)^2 \left(2+2a^2+r(2+r)-a(4+3r) \right), \\ & (-1+a)^4 k (-1+a-r) + (-1+a) b^2 k r (1-2a+r) (1-a+r) + \\ & a b^3 (-1+2a-r) r (1-a+r)^2 + (-1+a)^3 n \left((-1+a) (ab+k) - a b r \right) + \\ & (-1+a)^3 b \left((-1+a)^2 a + (2+(-1+a) a) r^2 - 2a r^3 + r^4 \right), \\ & (-1+a)^2 p \left((1-a) (ab+k) + a b r \right) + (-1+a) b k (-1+a-r) \left(-2+2a-r+2a r - r^2 \right) + \\ & a b^2 (1-a+r)^2 \left(-2+2a-r+2a r - r^2 \right) + (-1+a)^3 (a-r) r \left(-2-r^2+a(2+r) \right), \\ & a b^4 (-1+a-r)^3 (-1+2a-r) + (-1+a) b^3 k (-1+2a-r) (1-a+r)^2 + \\ & (-1+a)^4 q \left((-1+a) (ab+k) - a b r \right) - (-1+a)^4 b k \left(-2-r-2r^2+2a(1+r) \right) + \\ & (-1+a)^3 b^2 (-1+a-r) \left(a^2 (-2+r) + r^2 (2+r) - a (-2+r+2r^2) \right), \\ & b \left((-1+a) (b+k) - b r \right) + s + (-2+a) a s, \\ & -(-1+a)^2 (ab+k) (2ab+k) - (-1+a) \left(a \left(b^2 + a \left((-1+a)^2 - 5b^2 \right) \right) + (1-4a) b k \right) r + \\ & \left(2a \left((-1+a)^3 + (1-2a) b^2 \right) - (-1+a) b k \right) r^2 - \left((-1+a)^3 - a b^2 \right) r^3, \\ & 1 - (-1+a) \left((-1+a) (ab+k) - a b r \right) t \end{aligned} \right\}$$

Результаты исключения

```

PolynomialReduce[bg2, bg1, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg15, bg5, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg15, bg7, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg15, bg8, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg15, bg9, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg15, bg10, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg15, bg11, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

```

```

PolynomialReduce[bg15, bg13, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg15, bg16, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg15, bg17, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg18, bg14, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg19, bg18, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg19, bg20, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg19, bg22, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

PolynomialReduce[bg21, bg12, bb];
|полиномиальная редукция
Table[%[[i]][[-1]], {i, Length[%]}]
|таблица значений |длина
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

```