Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 48–58
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2018. No. 1. P. 48–58

УДК 519.24

ПРИМЕНЕНИЕ УМЕРЕННО УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В МОДЕЛЯХ GARCH(1, 1)

В. С. ТЕРЕХ [1)]

[1)] *Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассмотрено применение классического и модифицированного умеренно устойчивых распределений при построении моделей GARCH. Такие модели используются для анализа и прогнозирования финансовых и экономических временных рядов, которые обладают определенными особенностями: кластеризацией волатильности, тяжелыми хвостами и несимметричностью распределений остатков. Приведено сравнение свойств устойчивых и умеренно устойчивых распределений, описаны методологии построения моделей и последующей оценки параметров с помощью метода максимального правдоподобия. Выполнен экспериментальный сравнительный анализ точности оценок параметров моделей с различными распределениями остатков по модельным данным, который подтверждает эффективность используемых методов. Рассмотрен пример построения моделей по реальным данным.

Ключевые слова: модель GARCH; устойчивое распределение; умеренно устойчивое распределение; метод максимального правдоподобия.

USE OF TEMPERED STABLE DISTRIBUTIONS IN GARCH(1, 1) MODELS

U. S. TSERAKH [a]

[a] *Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Use of classical and modified tempered stable distributions for GARCH models is considered in the paper. Such models are applied for the analysis of financial and economic time series, which have several special properties: volatility clustering, heavy tails and asymmetry of residuals distributions. Comparison of the properties of stable and tempered stable distributions is presented; methodologies for constructing models and subsequent estimation of parameters using the maximum likelihood method are described. An experimental based on model data comparative analysis of the accuracy of models parameters estimates for different residuals distributions was held, and it confirms the operability of the used methods. An example of building models on real data is considered.

Key words: GARCH model; stable distribution; tempered stable distribution; maximum likelihood method.

Введение

Модель GARCH [1] (Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedastic) – обобщенная авторегрессионная модель условной гетероскедастичности, ее модификации являются одним из основных инструментов для анализа экономических и финансовых временных рядов. Такие временные ряды имеют специфические свойства, которые должны быть учтены при построении модели. Тяжелые хвосты распределения остатков свидетельствуют о наличии экстремальных наблюдений. Распределение может быть несимметричным, это является следствием того, что различные внешние факторы по-разному

Образец цитирования:
Терех В. С. Применение умеренно устойчивых распределений в моделях GARCH(1, 1) // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 48–58.

For citation:
Tserakh U. S. Use of tempered stable distributions in GARCH(1, 1) models. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 48–58 (in Russ.).

Автор:
Владимир Сергеевич Терех – аспирант кафедры теории вероятности и математической статистики факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Н. Н. Труш.

Author:
Uladzimir S. Tserakh, postgraduate student at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer science.
vladimir.terekh@gmail.com

влияют на изменения цен финансовых активов. Кластеризация волатильности означает, что малые изменения цен финансовых активов следуют за малыми изменениями, а большие изменения следуют за большими.

В ходе ряда исследований было установлено, что модель GARCH с нормальным распределением остатков дает неудовлетворительные результаты. Это связано с тем, что нормальное распределение имеет недостаточно тяжелые хвосты и является симметричным. Таким образом, актуальна задача исследования моделей GARCH с другими, отличными от нормального распределениями. Например, в последние годы активно изучаются модели с α-устойчивыми (α-stable) распределениями [2–4]. Такие модели дают удовлетворительные результаты, хотя и у них есть ряд недостатков. Во-первых, у α-устойчивых распределений есть конечные моменты лишь порядка меньше α. Во-вторых, они имеют явную форму функции плотности распределения лишь в нескольких частных случаях: $\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 1{,}0$, $\alpha = 2{,}0$. В-третьих, хвосты α-устойчивых распределений оказываются слишком тяжелыми, они недостаточно эффективны при анализе реальных данных. Чтобы избежать описанных выше трудностей, были разработаны различные обобщения α-устойчивых распределений, которые образуют класс распределений, называемых умеренно устойчивыми.

В настоящей работе исследуются модели GARCH(1, 1) с α-устойчивым, классическим умеренно устойчивым, модифицированным умеренно устойчивым распределениями [5; 6]. Проводится сравнительный анализ точности оценивания параметров модели GARCH(1, 1), а также параметров распределений остатков с помощью метода максимального правдоподобия. Рассмотрен пример построения по реальным данным моделей GARCH(1, 1) с различными распределениями, а также выбор оптимальной модели для прогнозирования на основании статистических критериев.

Модель GARCH(1, 1) с устойчивыми распределениями

α-Устойчивое распределение. Пусть $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\sigma \in (0, +\infty)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда случайная величина X имеет α-устойчивое распределение, если ее характеристическая функция описывается следующим выражением:

$$\Phi_X(u) = \Phi_{\text{stable}}(u; \alpha, \sigma, \beta, \mu) = E\left[e^{iuX}\right] = \begin{cases} \exp\left(i\mu u - |\sigma u|^{\alpha}\left(1 - i\beta(\operatorname{sign} u)\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)\right), & \alpha \neq 1, \\ \exp\left(i\mu u - |\sigma u|\left(1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}(\operatorname{sign} u)\ln|u|\right)\right), & \alpha = 1, \end{cases}$$

где $u \in \mathbb{R}$;

$$\operatorname{sign} t = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Будем обозначать $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Параметры имеют следующий смысл: α – параметр устойчивости; β – асимметрии; μ – сдвига; σ – масштаба. Если задать $\mu = 0$, $\sigma = 1$, $\beta = 0$, то получим стандартное α-устойчивое распределение, которое будем обозначать как $\operatorname{std} S_\alpha$. Отметим несколько свойств α-устойчивого распределения:

$$E|X| = \mu,\ \alpha > 1;\ E|X| = \infty,\ 0 < \alpha \leq 1;\ E|X|^p < \infty,\ 0 < p < \alpha;\ E|X|^p = \infty,\ p \geq \alpha.$$

Приведенные выше свойства вызывают определенные трудности для использования α-устойчивого распределения при построении моделей GARCH. Более подробно это рассмотрено в [4; 7].

Классическое умеренно устойчивое распределение. Пусть $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$, $\sigma, \lambda_+, \lambda_- > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда случайная величина X обладает классическим умеренно устойчивым распределением (classical tempered stable, CTS), если ее характеристическая функция имеет вид

$$\Phi_X(u) = \Phi_{\text{CTS}}(u; \alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu) =$$
$$= \exp\left(iu\mu - iu\sigma\Gamma(1-\alpha)\left(\lambda_+^{\alpha-1} - \lambda_-^{\alpha-1}\right) + \sigma\Gamma(-\alpha)\left((\lambda_+ - iu)^{\alpha} - \lambda_+^{\alpha} + (\lambda_+ - iu)^{\alpha} - \lambda_-^{\alpha}\right)\right),$$

где $u \in \mathbb{R}$; Γ – гамма-функция. Будем обозначать $X \sim \text{CTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$. Семиинварианты для распределения находятся следующим образом:

$$c_1(X) = \mu,$$

$$c_n(X) = \alpha\Gamma(n-\alpha)\left(\lambda_+^{\alpha-n} + (-1)^n \lambda_-^{\alpha-n}\right),\ n = 2, 3, \ldots.$$

Параметры α, μ, σ имеют такой же смысл, как и для α-устойчивого распределения. Параметры λ_+ и λ_- контролируют скорость затухания для положительного и отрицательного хвостов соответственно. Если $\lambda_+ > \lambda_-$ $(\lambda_+ < \lambda_-)$, то распределение имеет левую (правую) асимметрию, и если $\lambda_+ = \lambda_-$, то распределение симметрично. Параметры λ_+, λ_- и α также задают тяжесть хвостов распределения. Если сделать замену

$$\sigma = \left(\Gamma(2-\alpha)\left(\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2}\right)\right)^{-1},$$

тогда случайная величина $X \sim \mathrm{CTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, 0)$ имеет нулевое среднее, а дисперсия будет равна 1. В таких случаях говорят, что X имеет стандартное CTS-распределение с параметрами α, λ_+, λ_-, и обозначают $X \sim \mathrm{stdCTS}(\alpha, \lambda_+, \lambda_-)$.

Модифицированное умеренно устойчивое распределение. Пусть $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$, $\sigma, \lambda_+, \lambda_- > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда случайная величина X имеет модифицированное умеренно устойчивое распределение (modified tempered stable, MTS), если ее характеристическая функция описывается следующим выражением:

$$\Phi_X(u) = \Phi_{\mathrm{MTS}}(u; \alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu) =$$
$$= \exp\left(iu\mu - \sigma\left(G_R(u; \alpha, \lambda_+) + G_R(u; \alpha, \lambda_-)\right) + iu\sigma\left(G_I(u; \alpha, \lambda_+) + G_I(u; \alpha, \lambda_-)\right)\right),$$

где для $u \in \mathbb{R}$

$$G_R(x; \alpha, \lambda) = 2^{-\frac{\alpha+3}{2}} \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(\lambda^2 + x^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} - \lambda^\alpha\right),$$

$$G_I(x; \alpha, \lambda) = 2^{-\frac{\alpha+3}{2}} \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\lambda^{\alpha-1}\left[{}_2F_1\left(1, \frac{1-\alpha}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{\lambda^2}\right) - 1\right],$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция. Семиинварианты для распределения находятся следующим образом:

$$c_1(X) = \mu,$$

$$c_n(X) = 2^{n-\frac{\alpha+3}{2}} \sigma\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\left(\lambda_+^{\alpha-n} + (-1)^n \lambda_-^{\alpha-2}\right),\ n = 2, 3, \ldots.$$

Будем обозначать $X \sim \mathrm{MTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$. Параметры распределения имеют такой же смысл, как и параметры CTS-распределения. Если сделать замену

$$\sigma = 2^{\frac{\alpha+1}{2}}\left(\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\lambda_+^{\alpha-2} + \lambda_-^{\alpha-2}\right)\right)^{-1},$$

тогда случайная величина $X \sim \mathrm{MTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, 0)$ будет иметь нулевое среднее, а дисперсия будет равна 1. В таких случаях говорят, что X имеет стандартное MTS-распределение с параметрами α, λ_+, λ_-, и обозначают $X \sim \mathrm{stdMTS}(\alpha, \lambda_+, \lambda_-)$.

Модель GARCH(1, 1). Процесс X_t, $t \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет модели GARCH(1, 1), если

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t Z_t, \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 \sigma_{t-1}^2, \end{cases}$$

где $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, а $\omega_0 > 0$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ – параметры модели. Условие стационарности имеет следующий вид:

$$\omega_1 + \omega_2 < 1.$$

Оценка параметров. Зададим векторы параметров и допустимые множества параметров для моделей GARCH(1, 1) с различными распределениями величин Z_t. Пусть $Z_t \sim N(0, 1)$. Тогда вектор параметров будет иметь вид

$$\theta_{\text{norm}} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)^{\text{T}},$$

где Т – знак транспонирования, а допустимое множество параметров

$$K_{\text{norm}} = \left\{\theta_{\text{norm}} : \omega_1 + \omega_2 < 1;\ 0 < \min\left\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\right\} \le \max\left\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\right\} < 1\right\}.$$

Для случая, когда $Z_t \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$, зададим вектор параметров и допустимое множество параметров следующим образом:

$$\theta_{\text{stable}} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \alpha, \beta, \sigma, \mu)^{\text{T}},$$

$$K_{\text{stable}} = \left\{\theta_{\text{stable}} : \omega_1 + \omega_2 < 1;\ 0 < \min\left\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\right\} \le\right.$$
$$\left.\le \max\left\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\right\} < 1;\ \alpha \in (0, 2];\ \beta \in [-1, 1];\ \sigma \in (0, +\infty)\right\}.$$

Для случая, когда $Z_t \sim \text{CTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$:

$$\theta_{\text{CTS}} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \alpha, \lambda_+, \lambda_-, \sigma, \mu)^{\text{T}},$$

$$K_{\text{CTS}} = \left\{\theta_{\text{CTS}} : \omega_1 + \omega_2 < 1;\ 0 < \min\left\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\right\} \le\right.$$
$$\left.\le \max\left\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\right\} < 1;\ \alpha \in (0, 1) \cup (1, 2);\ \lambda_+, \lambda_-, \sigma \in (0, +\infty)\right\}.$$

Для случая, когда $Z_t \sim \text{MTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu)$:

$$\theta_{\text{MTS}} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \alpha, \lambda_+, \lambda_-, \sigma, \mu)^{\text{T}},$$

$$K_{\text{MTS}} = \left\{\theta_{\text{MTS}} : \omega_1 + \omega_2 < 1;\ 0 < \min\left\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\right\} \le\right.$$
$$\left.\le \max\left\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\right\} < 1;\ \alpha \in (0, 1) \cup (1, 2);\ \lambda_+, \lambda_-, \sigma \in (0, +\infty)\right\}.$$

Введем обозначения:

$$\theta = \begin{cases} \theta_{\text{norm}},\ Z_t \sim N(0, 1), \\ \theta_{\text{stable}},\ Z_t \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu), \\ \theta_{\text{CTS}},\ Z_t \sim \text{CTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu), \\ \theta_{\text{MTS}},\ Z_t \sim \text{MTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu); \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} K_{\text{norm}},\ Z_t \sim N(0, 1), \\ K_{\text{stable}},\ Z_t \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu), \\ K_{\text{CTS}},\ Z_t \sim \text{CTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu), \\ K_{\text{MTS}},\ Z_t \sim \text{MTS}(\alpha, \sigma, \lambda_+, \lambda_-, \mu). \end{cases}$$

Для оценки параметров модели GARCH(1, 1) будем использовать метод максимального правдоподобия. Пусть известна выборка размером n $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, за процессом X_t, $t \in \mathbb{Z}$. Тогда оценка $\widehat{\theta}_n$ вектора параметров θ модели GARCH(1, 1) на компакте K определяется следующим образом:

$$\widehat{\theta}_n = \arg\max_{\theta \in K} \widehat{L}_n(\theta),$$

где

$$\widehat{L}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \ln\left[\frac{1}{\widehat{h}_t(\theta)} f\left(\frac{X_t}{\widehat{h}_t(\theta)}\right)\right],$$

$\theta \in K$, $t = \overline{1, n}$, $f(x)$ – функция плотности распределения величин Z_t; $\widehat{h}_t(\theta)$ можно расценивать как оценку σ_t. Заметим, что $\widehat{h}_t(\theta_0) = \sigma_t$ при всех $t \in \mathbb{N}$, а θ_0 – истинный вектор параметров. В качестве $\widehat{h}_t(\theta)$ будем использовать функцию $\widehat{h}_t(\theta) = \widehat{y}_t^{1/2}(\theta)$, где $\widehat{y}_t(\theta)$ определяется следующим образом:

$$\widehat{y}_t(\theta) = \begin{cases} \varepsilon, \ t = 0, \\ \omega_0 + \omega_1 X_{t-1}^2 + \omega_2 \widehat{y}_{t-1}(\theta), \ t \geq 1, \end{cases}$$

где $\varepsilon \in [0, \infty)$ – произвольное начальное значение. Отметим, что для некоторых рассматриваемых выше распределений явный вид функции плотности распределения неизвестен. Для нахождения значений функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, будем использовать обратное преобразование Фурье характеристической функции $\Phi(t)$.

Анализ точности оценки параметров моделей GARCH(1, 1) с устойчивыми распределениями

По заранее заданным параметрам (табл. 1) моделировались процессы GARCH с различными распределениями остатков:

$$\text{GARCH}(1, 1)\text{-stable} - Z_t \sim S_\alpha,$$

$$\text{GARCH}(1, 1)\text{-CTS} - Z_t \sim \text{CTS}(\alpha, \lambda_+, \lambda_-),$$

$$\text{GARCH}(1, 1)\text{-MTS} - Z_t \sim \text{MTS}(\alpha, \lambda_+, \lambda_-).$$

Таблица 1

Истинные значения параметров

Table 1

Real parameter values

Модель	ω_0	ω_1	ω_2	α	λ_+	λ_-
GARCH(1, 1)-stable	0,000 1	0,3	0,5	1,3	–	–
GARCH(1, 1)-CTS	0,000 1	0,3	0,5	1,3	10	15
GARCH(1, 1)-MTS	0,000 1	0,3	0,5	1,3	10	15

Для каждого процесса было смоделировано 50 выборок длиной T от 100 до 5000 наблюдений с интервалом 100 наблюдений. По каждой выборке проводилась оценка параметров соответствующей модели с помощью метода максимального правдоподобия, описанного в разделе «Оценка параметров», и для каждой оценки была получена стандартная ошибка. В табл. 2–4 приведены полученные оценки, в скобках даны стандартные ошибки оценок параметров каждой из моделей для выборок различной длины.

Таблица 2

Оценки параметров модели GARCH(1, 1)-stable для различных объемов выборки

Table 2

Parameter estimates of GARCH(1, 1)-stable model for samples of different length

T	$\omega_0 = 0{,}000\,1$	$\omega_1 = 0{,}3$	$\omega_2 = 0{,}5$	$\alpha = 1{,}3$
1000	7,787 1 E-5 (3,117 2 E-5)	0,274 3 (0,017 2)	0,640 1 (0,038 1)	1,221 5 (0,035 0)
2000	5,364 3 E-5 (1,855 1 E-5)	0,289 5 (0,028 1)	0,593 0 (0,066 9)	1,405 6 (0,029 1)
3000	0,000 123 1 (3,798 2 E-6)	0,282 1 (0,019 0)	0,625 9 (0,039 2)	1,394 1 (0,025 3)

Окончание табл. 2
Ending table 2

T	$\omega_0 = 0{,}0001$	$\omega_1 = 0{,}3$	$\omega_2 = 0{,}5$	$\alpha = 1{,}3$
4000	9,0823 E-5 (1,6031 E-5)	0,3060 (0,0145)	0,5298 (0,0413)	1,3511 (0,0235)
5000	0,0001092 (2,0913 E-6)	0,2953 (0,0122)	0,5390 (0,0334)	1,2903 (0,0231)

Таблица 3

Оценки параметров модели GARCH(1, 1)-CTS для различных объемов выборки

Table 3

Parameter estimates of GARCH(1, 1)-CTS model for samples of different length

T	$\omega_0 = 0{,}0001$	$\omega_1 = 0{,}3$	$\omega_2 = 0{,}5$	$\alpha = 1{,}3$	$\lambda_+ = 10$	$\lambda_- = 15$
1000	0,0001013 (3,9621 E-5)	0,2760 (0,0344)	0,5811 (0,1069)	1,3225 (0,0387)	17,3370 (5,0788)	16,5912 (7,6182)
2000	0,0001628 (4,6092 E-5)	0,3494 (0,0429)	0,4082 (0,0690)	1,2136 (0,0285)	11,0608 (1,3078)	14,1813 (1,9617)
3000	0,0001170 (4,6433 E-5)	0,2953 (0,0229)	0,5345 (0,0621)	1,2561 (0,0257)	9,4542 (1,4710)	16,9755 (2,2065)
4000	0,0001145 (2,7861 E-5)	0,3024 (0,0213)	0,5284 (0,0414)	1,3625 (0,0251)	11,3170 (1,0056)	17,3655 (1,9084)
5000	0,0001050 (1,8093 E-5)	0,2900 (0,0199)	0,5577 (0,03491)	1,3203 (0,0214)	11,5770 (0,9962)	14,3655 (1,4943)

Таблица 4

Оценки параметров модели GARCH(1, 1)-MTS для различных объемов выборки

Table 4

Parameter estimates of GARCH(1, 1)-MTS model for samples of different length

T	$\omega_0 = 0{,}0001$	$\omega_1 = 0{,}3$	$\omega_2 = 0{,}5$	$\alpha = 1{,}3$	$\lambda_+ = 10$	$\lambda_- = 15$
1000	0,0001086 (3,7704 E-5)	0,2915 (0,0282)	0,5723 (0,1045)	1,3025 (0,0252)	14,9946 (5,1246)	13,2414 (7,6869)
2000	0,0001062 (5,7113 E-5)	0,2804 (0,0271)	0,488 8 (0,0919)	1,2909 (0,0233)	8,8276 (2,7494)	21,6396 (4,1241)
3000	0,0001011 (4,5194 E-5)	0,3024 (0,0227)	0,4619 (0,0567)	1,2938 (0,0193)	14,4264 (1,5156)	12,7785 (2,2734)
4000	0,0001197 (2,8935 E-5)	0,3053 (0,0205)	0,4784 (0,0423)	1,3241 (0,1937)	8,5190 (1,0512)	17,5335 (1,5768)
5000	0,0001378 (2,1973 E-5)	0,2956 (0,0153)	0,4825 (0,0383)	1,3248 (0,01829)	11,689 (0,8850)	15,0909 (1,3275)

Графики с отмеченными значениями оценок для различных длин выборок для параметров модели GARCH(1, 1)-CTS приведены на рис. 1–6. Горизонтальная линия на каждом графике соответствует истинному значению параметра. Графики зависимости стандартной ошибки от размера выборки для каждого параметра этой модели представлены на рис. 7–12.

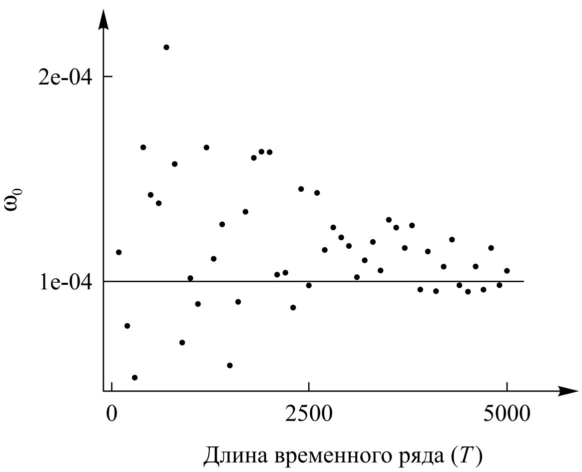

Рис. 1. Оценка параметра ω_0 в зависимости от объема выборки

Fig. 1. Parameter ω_0 estimate depending on sample length

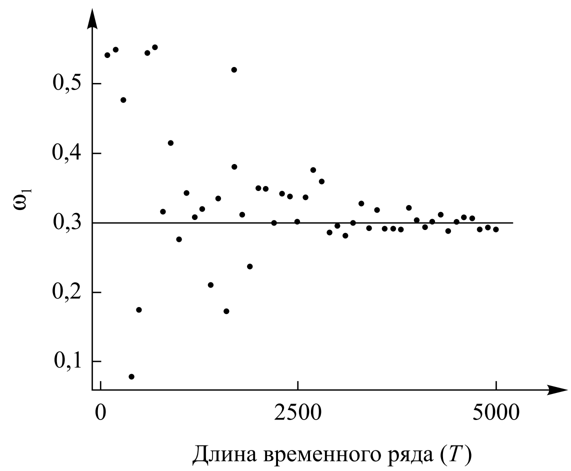

Рис. 2. Оценка параметра ω_1 в зависимости от объема выборки

Fig. 2. Parameter ω_1 estimate depending on sample length

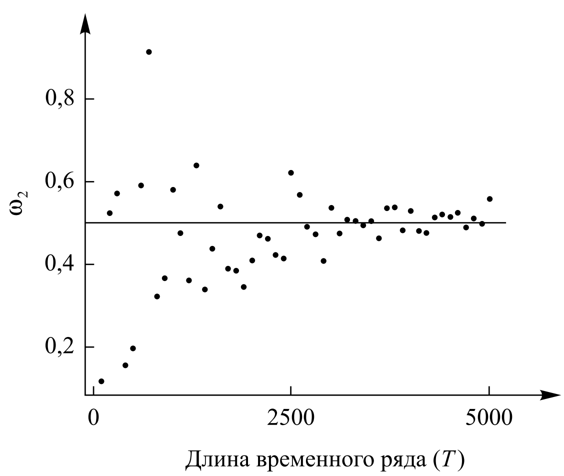

Рис. 3. Оценка параметра ω_2 в зависимости от объема выборки

Fig. 3. Parameter ω_2 estimate depending on sample length

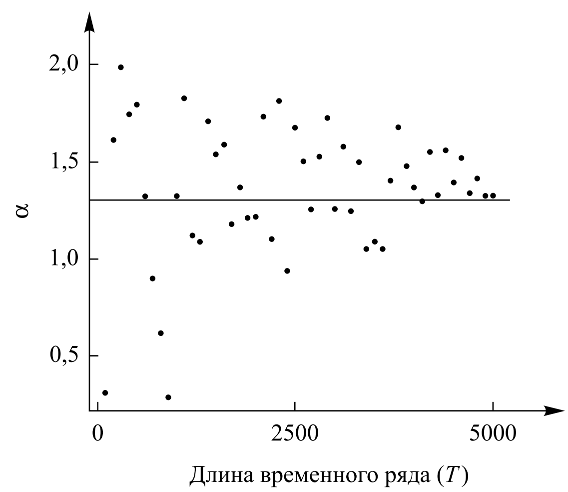

Рис. 4. Оценка параметра α в зависимости от объема выборки

Fig. 4. Parameter α estimate depending on sample length

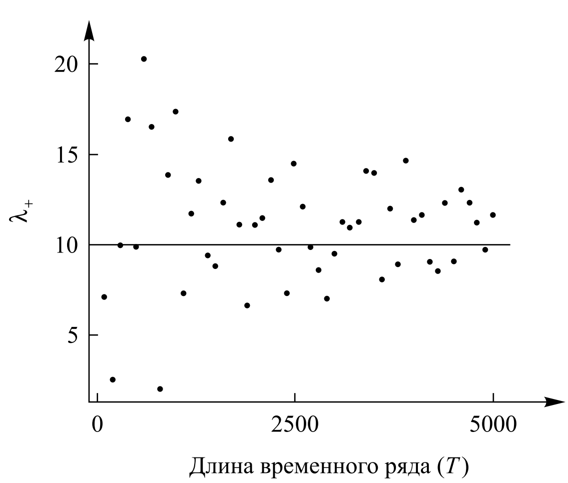

Рис. 5. Оценка параметра λ_+ в зависимости от объема выборки

Fig. 5. Parameter λ_+ estimate depending on sample length

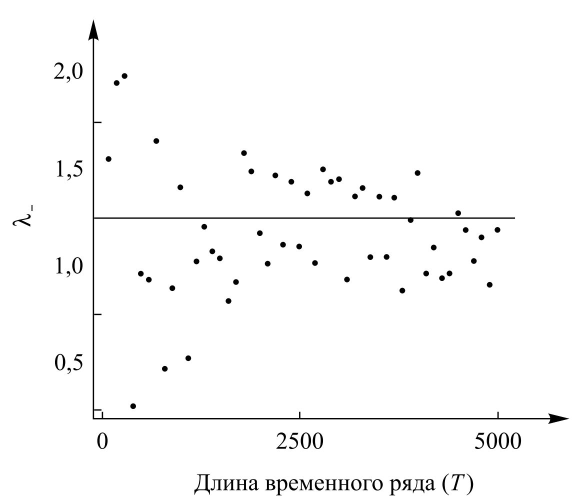

Рис. 6. Оценка параметра λ_- в зависимости от объема выборки

Fig. 6. Parameter λ_- estimate depending on sample length

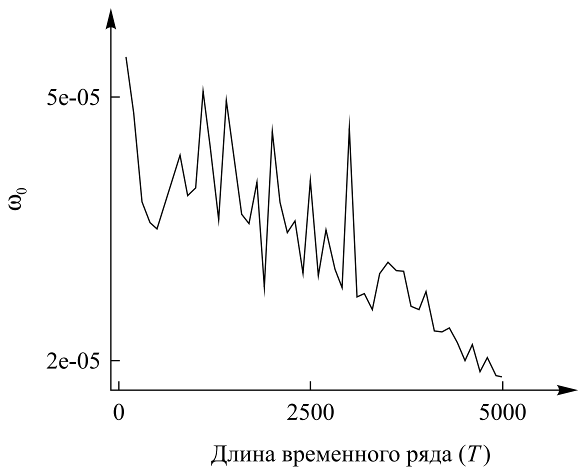

Рис. 7. Стандартная ошибка параметра ω_0 в зависимости от объема выборки

Fig. 7. Standard error of ω_0 parameter depending on sample length

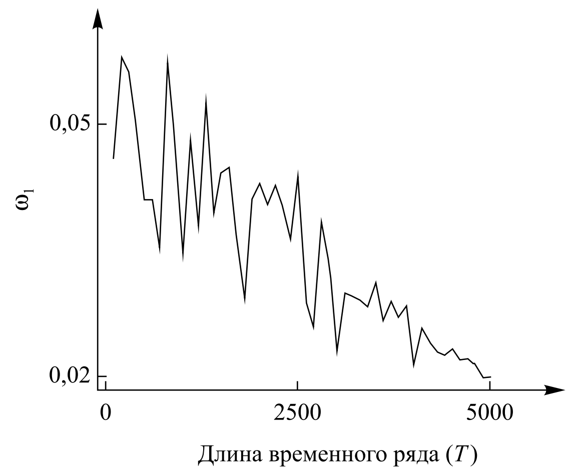

Рис. 8. Стандартная ошибка параметра ω_1 в зависимости от объема выборки

Fig. 8. Standard error of ω_1 parameter depending on sample length

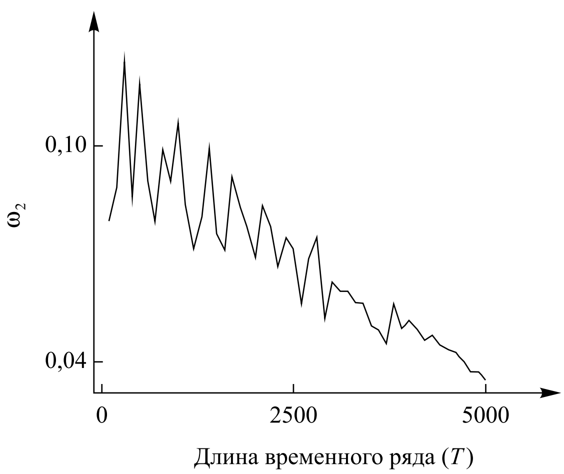

Рис. 9. Стандартная ошибка параметра ω_2 в зависимости от объема выборки

Fig. 9. Standard error of ω_2 parameter depending on sample length

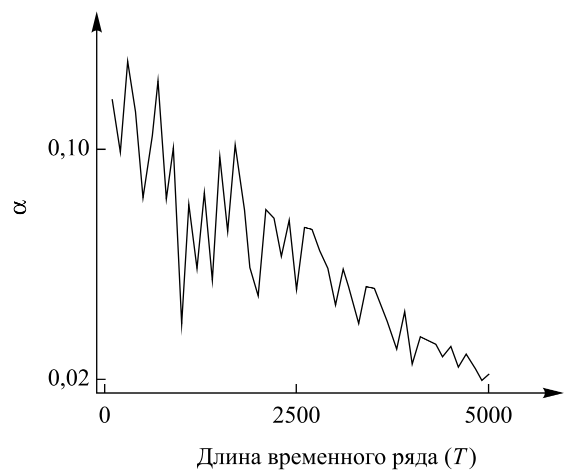

Рис. 10. Стандартная ошибка параметра α в зависимости от объема выборки

Fig. 10. Standard error of α parameter depending on sample length

Рис. 11. Стандартная ошибка параметра λ_+ в зависимости от объема выборки

Fig. 11. Standard error of λ_+ parameter depending on sample length

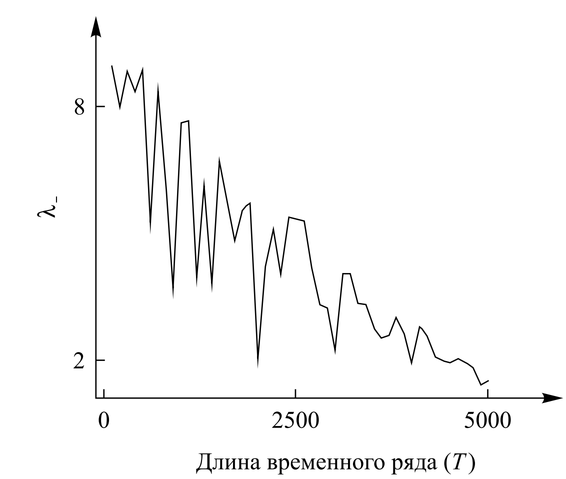

Рис. 12. Стандартная ошибка параметра λ_- в зависимости от объема выборки

Fig. 12. Standard error of λ_- parameter depending on sample length

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 48–58
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2018. No. 1. P. 48–58

Построение моделей GARCH(1, 1) по реальным данным

Рассмотрим пример построения моделей GARCH(1, 1) для данных стоимостей акций компании *Microsoft* (MSFT). Используются дневные данные с 1 марта 2007 г. по 1 марта 2017 г. Предположим, что динамика логарифма доходности ценных бумаг имеет следующий вид:

$$\log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \sigma_t Z_t,\ 1 \le t \le \mathrm{T},$$

где $S_t > 0$ – стоимость ценной бумаги в момент времени t, $t \in \mathbb{N}$; $\sigma_t Z_t$ – волатильность доходности, определенная с помощью модели GARCH(1, 1). Для временного ряда были построены модели GARCH(1, 1) с нормальным, α-устойчивым, классическим умеренно устойчивым, модифицированным умеренно устойчивым распределениями остатков. Результаты оценки параметров моделей приведены в табл. 5.

Таблица 5

Оценки параметров моделей GARCH(1, 1)
с различными распределениями остатков (по данным MSFT)

Table 5

Parameter estimates of GARCH(1, 1) models
with different residuals distributions (for MSFT data)

Модель	ω_0	ω_1	ω_2	α	λ_+	λ_-
GARCH(1, 1)-normal	6,3755 E-5	0,1984	0,7988	–	–	–
GARCH(1, 1)-stable	4,9219 E-5	0,1275	0,8664	1,5931	–	–
GARCH(1, 1)-CTS	5,0119 E-5	0,1164	0,7553	1,6989	0,0693	0,0724
GARCH(1, 1)-MTS	5,8313 E-5	0,1323	0,6931	1,6534	0,0721	0,0694

Для оценки того, насколько хорошо модель подходит для временного ряда, использовался критерий Колмогорова – Смирнова. Нулевые гипотезы определены следующим образом: $H_0(\text{normal})$, $H_0(\text{stable})$, $H_0(\text{CTS})$, $H_0(\text{MTS})$ – остатки соответствуют нормальному, устойчивому, классическому умеренно устойчивому, модифицированному умеренно устойчивому распределениям соответственно. В табл. 6 приведены статистики Колмогорова – Смирнова (KS) и их *p*-значения. Согласно полученным результатам нулевая гипотеза $H_0(\text{normal})$ отклоняется, так как *p*-значение меньше уровня значимости, равного 5 %. Остальные нулевые гипотезы не отклоняются.

Таблица 6

Статистики Колмогорова – Смирнова
и их *p*-значения

Table 6

Kolmogorov – Smirnov statistics and *p*-values

Распределение остатков	KS	*p*-Значение
Normal	0,1201	0,0000
Stable	0,0286	0,0561
CTS	0,0194	0,1445
MTS	0,0210	0,1501

Для сравнения моделей и выбора наилучшей использовались следующие информационные критерии:

1) критерий Акаике (Akaike information criterion, AIC):

$$\mathrm{AIC} = -2\frac{LLF}{T} + 2\left(\frac{k}{T}\right),$$

2) байесовский критерий (Bayesian information criterion, BIC):

$$\text{BIC} = -2\frac{LLF}{T} + \frac{k\ln T}{T},$$

3) критерий Хеннана – Куинна (Hannan – Quinn information criterion, HQIC):

$$\text{HQIC} = -2\frac{LLF}{T} + \frac{2k\ln(\ln T)}{T},$$

где LLF – значение функции правдоподобия; T – длина временного ряда; k – количество параметров модели. Результаты представлены в табл. 7.

Таблица 7

Результаты информационных критериев

Table 7

Information criteria results

Критерий	GARCH(1, 1)-normal	GARCH(1, 1)-stable	GARCH(1, 1)-CTS	GARCH(1, 1)-MTS
AIC	–3,595 95	–3,978 65	–4,087 05	–4,130 93
BIC	–3,589 16	–3,970 16	–4,075 16	–4,149 34
HQIC	–3,593 53	–3,975 62	–4,082 82	–4,150 32

Согласно результатам, приведенным в табл. 7, лучшей следует признать модель GARCH(1, 1)-MTS, потому что она имеет наименьшие значения информационных критериев.

Заключение

На основании проведенных исследований можно сделать вывод о том, что умеренно устойчивые распределения могут быть использованы для моделирования финансовых временных рядов. Более того, модели GARCH(1, 1) с умеренно устойчивыми распределениями могут показывать лучшие результаты по сравнению с традиционно применяемыми моделями.

Библиографические ссылки

1. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity // J. Econom. 1986. Vol. 31, № 3. P. 307–327.
2. *Paolella M. S.* Stable-GARCH models for financial returns: Fast estimation and tests for stability // Econometrics. 2016. Vol. 4, № 2. P. 1–28.
3. *Francq C., Meintanis S. G.* Fourier-type estimation of the power GARCH model with stable-paretian innovations // Metrika. 2016. Vol. 79. P. 389–424.
4. *Терех В. С., Труш Н. Н.* Исследование моделей GARCH(1, 1) с устойчивыми возмущениями // XII Белорусская математическая конференция (Минск, 5–10 сент. 2016 г.) : тез. докл. Минск, 2016. С. 14.
5. *Koponen I.* Analytic approach to the problem of convergence of truncated Levy flights towards the Gaussian stochastic process // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, issue 1. P. 1197–1199. DOI: 10.1103/PhysRevE.52.1197.
6. *Kim Y. S., Rachev S. T., Chung D. M.* The modified tempered stable distribution, GARCH-models and option pricing // Technical report, Chair of Econometrics, Statistics and Mathematical Finance School of Economics and Business Engineering University of Karlsruhe. Karlsruhe, 2006.
7. *Терех В. С.* Построение и исследование свойств M-оценки параметров модели GARCH(1, 1) // Сборник работ 72-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (Минск, 11–22 мая 2015 г.) : в 3 ч. Минск, 2015. Ч. 1. С. 112–115.

References

1. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *J. Econom.* 1986. Vol. 31, No. 3. P. 307–327.
2. Paolella M. S. Stable-GARCH models for financial returns: Fast estimation and tests for stability. *Econometrics.* 2016. Vol. 4, No. 2. P. 1–28.
3. Francq C., Meintanis S. G. Fourier-type estimation of the power GARCH model with stable-paretian innovations. *Metrika.* 2016. Vol. 79. P. 389–424.

4. Tserakh U. S., Troush N. N. Issledovanie modeley GARCH(1, 1) s ustoychivymi vozmushcheniyami [GARCH(1, 1) models with stable perturbations]. *The XII Belarusian Mathematical Conference* (Minsk, 5–10 Sept., 2016) : thesis. Minsk, 2016. P. 14 (in Russ.).
5. Koponen I. Analytic approach to the problem of convergence of truncated Levy flights towards the Gaussian stochastic process. *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, issue 1. P. 1197–1199. DOI: 10.1103/PhysRevE.52.1197.
6. Kim Y. S., Rachev S. T., Chung D. M. The modified tempered stable distribution, GARCH-models and option pricing. *Technical report, Chair of Econometrics, Statistics and Mathematical Finance School of Economics and Business Engineering University of Karlsruhe.* Karlsruhe, 2006.
7. Tserakh U. S. Postroenie i issledovanie svoistv M-ocenki parametrov modeli GARCH(1, 1) [M-estimate of GARCH(1, 1) model parameters computation and exploration]. *The 72nd Scientific BSU Conference of students and postgraduate students* (Minsk, 11–22 May, 2015) : in 3 parts. Minsk, 2015. Part 1. P. 112–115 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 10.10.2017.
Received by editorial board 10.10.2017.