

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

А. Л. ГЛАДКОВ¹⁾, Т. В. КАВИТОВА²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Витебский государственный университет им. П. М. Машерова,
 Московский пр., 33, 210038, г. Витебск, Беларусь

Рассмотрено нелинейное нелокальное параболическое уравнение $u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q$ для $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ с нелинейным нелокальным граничным условием $u(x, t)|_{\partial\Omega \times (0, +\infty)} = \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t)dy$ и начальными данными $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, где r, p, q, l – положительные постоянные; Ω – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^n с гладкой границей $\partial\Omega$. Неотрицательные функции $a(x, t)$ и $b(x, t)$ определены при $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$ и локально непрерывны по Гёльдеру, неотрицательная непрерывная функция $k(x, y, t)$ определена при $x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$, неотрицательная непрерывная функция $u_0(x)$ – при $x \in \bar{\Omega}$ и удовлетворяет условию $u_0(x) = \int_{\Omega} k(x, y, 0)u_0^l(y)dy$ при $x \in \partial\Omega$. Изучены классические решения. Для доказательства существования локального максимального решения рассмотрена регуляризация исходной задачи. Установлены существование локального решения регуляризованной задачи и сходимость ее решений к локальному максимальному решению исходной задачи. Введены понятия верхнего и нижнего решений. Показано, что верхнее решение не меньше нижнего. Для нетривиальных начальных функций при выполнении определенных условий на данные задачи установлена положительность решений. Как следствие положительности решений и принципа сравнения решений доказана теорема единственности решения.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение; нелокальное граничное условие; существование решения; принцип сравнения.

Образец цитирования:

Гладков А. Л., Кавитова Т. В. О начально-краевой задаче для нелокального параболического уравнения с нелокальным граничным условием // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 29–38.

For citation:

Gladkov A. L., Kavıtova T. V. On the initial-boundary value problem for a nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2018. No. 1. P. 29–38 (in Russ.).

Авторы:

Александр Львович Гладков – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математической кибернетики механико-математического факультета.
Татьяна Валерьевна Кавитова – старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа факультета математики и информационных технологий.

Authors:

Alexander L. Gladkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.
 gladkoyal@bsu.by
Tatiana V. Kavıtova, senior lecturer at the department of geometry and mathematical analysis, faculty of mathematics and information technologies.
 kavıtovatv@tut.by

ON THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLOCAL PARABOLIC EQUATION WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITION

A. L. GLADKOV^a, T. V. KAVITOVA^b

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bVitebsk State University named after P. M. Masherov, 33 Maskoŭski Avenue, Vitebsk 210038, Belarus

Corresponding author: T. V. Kavitova (kavitovatv@tut.by)

We consider a nonlinear nonlocal parabolic equation $u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q$ for $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ with nonlinear nonlocal boundary condition $u(x, t)|_{\partial\Omega \times (0, +\infty)} = \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t)dy$ and initial data $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, where r, p, q, l are positive constants; Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^n with smooth boundary $\partial\Omega$. Nonnegative functions $a(x, t)$ and $b(x, t)$ are defined for $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$ and local Hölder continuous, nonnegative continuous function $k(x, y, t)$ is defined for $x \in \partial\Omega$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$, nonnegative continuous function $u_0(x)$ is defined for $x \in \bar{\Omega}$ and satisfies the condition $u_0(x) = \int_{\Omega} k(x, y, 0)u_0^l(y)dy$ for $x \in \partial\Omega$. In this paper we study classical solutions. To prove the existence of a local maximal solution, we consider the regularization of the original problem. We establish the existence of a local solution of the regularized problem and the convergence of solutions of this problem to a local maximal solution of the original problem. We introduce definitions of a supersolution and a subsolution. It is shown that a supersolution is not less than a subsolution. We establish the positiveness of solutions of the problem with nontrivial initial data under certain conditions on the data of the problem. As a consequence of the positiveness of solutions and the comparison principle of solutions, we prove the uniqueness theorem.

Key words: nonlinear parabolic equation; nonlocal boundary condition; existence of solution; comparison principle.

Рассмотрено нелинейное параболическое уравнение

$$u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t)dy - b(x, t)u^q, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

с нелинейным нелокальным граничным условием

$$u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t)dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где r, p, q, l – положительные постоянные; Ω – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) с гладкой границей $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (1)–(3) в работе сделаны следующие предположения:

$$a(x, t), b(x, t) \in C_{\text{loc}}^{\alpha}(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad a(x, t) \geq 0, \quad b(x, t) \geq 0;$$

$$k(x, y, t) \in C(\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, +\infty)), \quad k(x, y, t) \geq 0;$$

$$u_0(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u_0(x) = \int_{\Omega} k(x, y, 0)u_0^l(y)dy, \quad x \in \partial\Omega.$$

Начально-краевые задачи с нелокальностями в уравнении или граничном условии рассматривались в ряде работ [1–11]. В частности, в [1] доказан принцип сравнения для задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv b(x, t) \equiv 0$, $k(x, y, t) = k(x, y)$, $l = 1$, с нелинейным членом $g(x, u)$ в уравнении. Задача (1)–(3) при $a(x, t) \equiv 0$ рассмотрена в [8], где доказаны существование локального решения, принцип сравнения решений и исследованы вопросы единственности и неединственности решений, а также в [6], где получены условия существования глобального решения и обращения решения в бесконечность в течение

конечного времени. В [2] исследуются вопросы существования локального и глобального решений задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv b(x, t) \equiv 0$, $k(x, y, t) = k(x, y)$, $l = 1$, с нелокальным членом $\int_{\Omega} g(u(y, t)) dy$ в уравнении. В работе [3] получены условия существования и отсутствия глобальных положительных решений задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv 1$, $r = 0$, $b(x, t) \equiv b$, $k(x, y, t) = k(x, y)$, $l = 1$. В [5] доказан принцип сравнения решений и определены условия существования и отсутствия глобальных положительных решений задачи (1)–(3) при $a(x, t) \equiv 1$, $r = 0$, $b(x, t) \equiv b$, $k(x, y, t) = k(x, y)$.

В настоящей работе для задачи (1)–(3) установлено существование локального решения и доказан принцип сравнения решений.

Локальное существование

Пусть $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = S_T \cup \bar{\Omega} \times \{0\}$, $T > 0$.

Определение 1. Назовем неотрицательную функцию $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T)$ верхним решением задачи (1)–(3) в Q_T , если

$$u_t \geq \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t) dy - b(x, t)u^q, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (4)$$

$$u(x, t) \geq \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t) dy, \quad (x, t) \in S_T, \quad (5)$$

$$u(x, 0) \geq u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Неотрицательную функцию $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T)$ назовем нижним решением задачи (1)–(3) в Q_T , если неравенства (4)–(6) выполнены с противоположным знаком. Функцию $u(x, t)$ будем называть решением задачи (1)–(3) в Q_T , если $u(x, t)$ одновременно является верхним и нижним решениями задачи (1)–(3) в Q_T .

Определение 2. Назовем решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3) в Q_T максимальным, если для любого другого решения $v(x, t)$ задачи (1)–(3) в Q_T выполнено неравенство $v(x, t) \leq u(x, t)$, $(x, t) \in Q_T$.

Пусть последовательность $\{\varepsilon_m\}$ такова, что $0 < \varepsilon_m < 1$ и $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. При $\varepsilon = \varepsilon_m$, $m = 1, 2, \dots$, введем в рассмотрение функции $u_{0\varepsilon}(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} u_{0\varepsilon}(x) &\in C(\bar{\Omega}), \quad u_{0\varepsilon}(x) \geq \varepsilon, \quad u_{0\varepsilon_i}(x) \geq u_{0\varepsilon_j}(x) \text{ для } \varepsilon_i \geq \varepsilon_j, \\ u_{0\varepsilon}(x) &\rightarrow u_0(x) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ u_{0\varepsilon}(x) &= \int_{\Omega} k(x, y, 0)u_{0\varepsilon}^l(y) dy + \varepsilon, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t) dy - b(x, t)u^q + b(x, t)\varepsilon^q, & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t)u^l(y, t) dy + \varepsilon, & (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (8)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_m$. Понятия решения, верхнего и нижнего решений задачи (8) вводятся аналогично определению 1.

Теорема 1. Для некоторого $T > 0$ задача (8) имеет единственное решение в Q_T .

Доказательство. Построим верхнее решение задачи (8). Пусть $k = \sup_{\partial\Omega \times \Omega \times (0, T_1)} k(x, y, t)$ и $a = \sup_{Q_{T_1}} a(x, t)$ для некоторого $T_1 > 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)$, обладающую следующими свойствами:

$$\varphi(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \inf_{\Omega} \varphi(x) \geq \max\left(\sup_{\Omega} u_{0\varepsilon}(x), 1\right), \inf_{\partial\Omega} \varphi(x) \geq k \max(1, \exp(l-1)) \int_{\Omega} \varphi'(y) dy + 1.$$

Покажем, что функция $w(x, t) = \exp(\beta t)\varphi(x)$ является верхним решением задачи (8) в Q_T при подходящем выборе $\beta > 0$ и $T > 0$.

Действительно, в Q_T получим

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w - a(x, t)w^r \int_{\Omega} w^p(y, t) dy + b(x, t)w^q - b(x, t)\varepsilon^q = \\ = \exp(\beta t) \left(\beta\varphi(x) - \Delta\varphi(x) - a(x, t)\exp[\beta(r+p-1)t] \varphi^r(x) \int_{\Omega} \varphi^p(y) dy \right) + \\ + b(x, t) (\exp(\beta q t)\varphi^q(x) - \varepsilon^q) \geq 0 \end{aligned}$$

при выполнении следующих неравенств:

$$\beta \geq \sup_{\Omega} \Delta\varphi + a \max(1, \exp(r+p-1)) \sup_{\Omega} \varphi^r(x) \int_{\Omega} \varphi^p(y) dy, \quad T \leq \min(1, 1/\beta, T_1).$$

На границе S_T имеем

$$\begin{aligned} w(x, t) - \int_{\Omega} k(x, y, t) w'(y, t) dy - \varepsilon = \exp(\beta t)\varphi(x) - \int_{\Omega} k(x, y, t)\exp(\beta l t)\varphi'(y) dy - \varepsilon \geq \\ \geq \exp(\beta t) \left(\varphi(x) - k \exp[\beta(l-1)t] \int_{\Omega} \varphi'(y) dy \right) - \varepsilon \geq 0. \end{aligned}$$

При $x \in \Omega$ выполнено

$$w(x, 0) - u_{0\varepsilon}(x) = \varphi(x) - u_{0\varepsilon}(x) \geq 0.$$

Для доказательства существования решения задачи (8) введем в рассмотрение множество

$$B = \left\{ h(x, t) \in C(\bar{Q}_T) : \varepsilon \leq h(x, t) \leq w(x, t), h(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x) \right\}$$

и задачу

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + a(x, t)u^r \int_{\Omega} v^p(y, t) dy - b(x, t)u^q + b(x, t)\varepsilon^q, & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t) v'(y, t) dy + \varepsilon, & (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (9)$$

где $v \in B$. Понятия решения, нижнего и верхнего решений задачи (9) вводятся аналогично определению 1.

Покажем, что множество B выпукло. Действительно, пусть $h_1, h_2 \in B$, тогда $\varepsilon \leq \theta h_1 + (1-\theta)h_2 \leq w$ для $\theta \in [0, 1]$. Отметим, что для некоторого T задача (9) имеет решение $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ [12].

Пусть A – отображение, сопоставляющее каждой функции $v \in B$ решение задачи (9), т. е. $A(v) = u$. Убедимся в том, что A – непрерывное отображение множества B в себя. Несложно показать, что $\underline{u}(x, t) = \varepsilon$ и $\bar{u}(x, t) = w(x, t)$ являются нижним и верхним решениями задачи (9) соответственно. По принципу сравнения для задачи (9) A отображает множество B в себя.

Пусть $G(x, y; t - \tau)$ есть функция Грина для уравнения теплопроводности с однородным граничным условием Дирихле. В [13; 14] доказаны следующие свойства функции Грина:

$$\begin{aligned} G(x, y; t - \tau) &\geq 0, \quad x, y \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t, \\ \frac{\partial G(x, y; t - \tau)}{\partial n} &\leq 0, \quad G(x, y; t - \tau) = 0, \quad x \in \Omega, \quad y \in \partial\Omega, \quad 0 \leq \tau < t, \\ \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) dy &\leq 1, \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq \tau < t, \end{aligned} \quad (10)$$

где \vec{n} – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Несложно показать, что

$$\int_{\Omega} G(x, y; t) dy - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} dS_{\xi} d\tau = 1, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (11)$$

Как известно, функция $u(x, t)$ является решением задачи (9) тогда и только тогда, когда $u(x, t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\Omega} G(x, y; t) u_{0\epsilon}(y) dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left(a(y, \tau) u^r(y, \tau) \int_{\Omega} v^p(\eta, \tau) d\eta + b(y, \tau) (\epsilon^q - u^q(y, \tau)) \right) dy d\tau - \\ &- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \left(\int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) v^l(y, \tau) dy + \epsilon \right) dS_{\xi} d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Покажем, что отображение A непрерывно на множестве B . Действительно, пусть u_1 и u_2 – решения задачи (9) в Q_T с $v = v_1$ и $v = v_2$ соответственно, где $v_i \in B$, $i = 1, 2$. Используя (10) и (12), получим

$$\begin{aligned} |u_1 - u_2| &= \left| \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left\{ a(y, \tau) \left[u_1^r(y, \tau) \int_{\Omega} (v_1^p(\eta, \tau) - v_2^p(\eta, \tau)) d\eta + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. (u_1^r(y, \tau) - u_2^r(y, \tau)) \int_{\Omega} v_2^p(\eta, \tau) d\eta \right] - b(y, \tau) (u_1^q(y, \tau) - u_2^q(y, \tau)) \right\} dy d\tau - \right. \\ &- \left. \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) (v_1^l(y, \tau) - v_2^l(y, \tau)) dy dS_{\xi} d\tau \right| \leq \\ &\leq |\Omega| \sup_{Q_T} |v_1^p - v_2^p| \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) a(y, \tau) u_1^r(y, \tau) dy d\tau + \\ &+ \theta \sup_{Q_T} |u_1 - u_2| \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) dy d\tau - \\ &- \sup_{Q_T} |v_1^l - v_2^l| \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\theta = r |\Omega| \sup_{Q_T} a(x, t) \max \left(\epsilon^{r-1}, \sup_{Q_T} w^{r-1}(x, t) \right) \sup_{Q_T} w^p(x, t) + q \sup_{Q_T} b(x, t) \max \left(\epsilon^{q-1}, \sup_{Q_T} w^{q-1}(x, t) \right).$$

Вследствие (10) можно выбрать постоянную T таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\theta \sup_{Q_T} \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) dy d\tau < \frac{1}{2}.$$

Тогда, принимая во внимание неравенство

$$\sup_{Q_T} |u_1 - u_2| \leq 2 \left\{ p |\Omega| \max \left(\varepsilon^{p-1}, \sup_{Q_T} w^{p-1}(x, t) \right) \sup_{Q_T} \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) a(y, \tau) w^r(y, \tau) dy d\tau + \right. \\ \left. + l \max \left(\varepsilon^{l-1}, \sup_{Q_T} w^{l-1}(x, t) \right) \sup_{Q_T} \int_0^t \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \right) \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau \right\} \sup_{Q_T} |v_1 - v_2|$$

и свойства (10), (11), получим непрерывность отображения A на множестве B . Из предыдущих рассуждений также следует, что множество функций AB равномерно ограничено. В силу (12) и свойств функции Грина [14] множество AB равномерно непрерывно. Тогда по теореме Арцела – Асколи множество AB относительно компактно в $C(\bar{Q}_T)$.

Применяя теорему Шаудера, получим существование неподвижной точки u_{ε} отображения A в B такой, что u_{ε} является решением задачи (8). Единственность решения задачи (8) следует из принципа сравнения, который может быть доказан аналогично тому, как это будет сделано в разделе «Принцип сравнения» для задачи (1)–(3). Теорема доказана.

Теорема 2. Для некоторого $T > 0$ задача (1)–(3) имеет максимальное решение в Q_T .

Доказательство. Пусть u_{ε} – решение задачи (8). Тогда u_{ε} удовлетворяет в Q_T уравнению

$$u_{\varepsilon}(x, t) = \int_{\Omega} G(x, y; t) u_{0\varepsilon}(y) dy + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left(a(y, \tau) u_{\varepsilon}^r(y, \tau) \int_{\Omega} u_{\varepsilon}^p(\eta, \tau) d\eta + b(y, \tau) (\varepsilon^q - u_{\varepsilon}^q(y, \tau)) \right) dy d\tau - \\ - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \left(\int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) u_{\varepsilon}^l(y, \tau) dy + \varepsilon \right) dS_{\xi} d\tau. \quad (13)$$

Применяя принцип сравнения для решений задачи (8) при $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, получим $u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2}$. Согласно теореме Дини для некоторого $T > 0$ последовательность $\{u_{\varepsilon}(x, t)\}$ сходится равномерно в \bar{Q}_T при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторой функции $u_m(x, t)$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (13) и используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, приходим к выводу о том, что функция $u_m(x, t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению

$$u_m(x, t) = \int_{\Omega} G(x, y; t) u_0(y) dy + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} G(x, y; t - \tau) \left(a(y, \tau) u_m^r(y, \tau) \int_{\Omega} u_m^p(\eta, \tau) d\eta - b(y, \tau) u_m^q(y, \tau) \right) dy d\tau - \\ - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi; t - \tau)}{\partial n} \int_{\Omega} k(\xi, y, \tau) u_m^l(y, \tau) dy dS_{\xi} d\tau.$$

Следовательно, $u_m(x, t)$ есть решение задачи (1)–(3) в Q_T . Несложно показать, что $u_m(x, t)$ является максимальным решением задачи (1)–(3) в Q_T . Теорема доказана.

Принцип сравнения

Теорема 3. Пусть $\underline{u}(x, t)$ и $\bar{u}(x, t)$ – нижнее и верхнее решения задачи (1)–(3) в Q_T соответственно. Кроме того, если $\min(r, p, l) < 1$, то предположим, что $\underline{u}(x, t) > 0$ или $\bar{u}(x, t) > 0$ при $(x, t) \in Q_T \cup \Gamma_T$. Тогда $\bar{u}(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$ при $(x, t) \in Q_T \cup \Gamma_T$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\min(r, p, l) \geq 1$. Пусть $u_{0\varepsilon}(x)$ удовлетворяет условиям (7), но только $u_{0\varepsilon}(x) \rightarrow \underline{u}(x, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Построим максимальное решение $\underline{u}_m(x, t)$ задачи (1)–(3) с начальным условием $u_0(x) = \underline{u}(x, 0)$ следующим образом:

$$\underline{u}_m(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t),$$

где $u_\varepsilon(x, t)$ – решение задачи (8).

Покажем, что имеют место следующие соотношения:

$$\underline{u}(x, t) \leq \underline{u}_m(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T \cup \Gamma_T. \quad (14)$$

Докажем второе неравенство в (14), первое доказывается аналогично.

Пусть для $t \in (0, T)$ неотрицательная функция $\varphi(x, \tau) \in C^{2,1}(\bar{Q}_t)$ и удовлетворяет однородному граничному условию Дирихле. Умножим первое уравнение (8) на φ и проинтегрируем по области Q_t :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} u_{\varepsilon\tau}(x, \tau) \varphi(x, \tau) dx d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} \left(\Delta u_\varepsilon(x, \tau) + a(x, \tau) u_\varepsilon^r(x, \tau) \int_{\Omega} u_\varepsilon^p(y, \tau) dy + b(x, \tau) (\varepsilon^q - u_\varepsilon^q(x, \tau)) \right) \varphi(x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина и формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x, t) \varphi(x, t) dx & \leq \int_{\Omega} u_\varepsilon(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \varepsilon^q \int_0^t \int_{\Omega} b(x, \tau) \varphi(x, \tau) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} u_\varepsilon(x, \tau) (\varphi_\tau(x, \tau) + \Delta \varphi(x, \tau)) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \left(a(x, \tau) u_\varepsilon^r(x, \tau) \int_{\Omega} u_\varepsilon^p(y, \tau) dy - b(x, \tau) u_\varepsilon^q(x, \tau) \right) \varphi(x, \tau) dx d\tau - \\ & - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial n} \left(\int_{\Omega} k(x, y, \tau) u_\varepsilon^l(y, \tau) dy + \varepsilon \right) dS_x d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

С другой стороны, верхнее решение $\bar{u}(x, t)$ удовлетворяет неравенству (15) с противоположным знаком и $\varepsilon = 0$. Пусть $w(x, t) = u_\varepsilon(x, t) - \bar{u}(x, t)$. Используя теорему Лагранжа, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w(x, t) \varphi(x, t) dx & \leq \int_{\Omega} w(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \varepsilon^q \int_0^t \int_{\Omega} b(x, \tau) \varphi(x, \tau) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} w(x, \tau) (\varphi_\tau(x, \tau) + \Delta \varphi(x, \tau) - qb(x, \tau) \theta_1^{q-1}(x, \tau) \varphi(x, \tau)) dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) \bar{u}^r(x, \tau) \varphi(x, \tau) \int_{\Omega} p \theta_2^{p-1}(y, \tau) w(y, \tau) dy dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} a(x, \tau) r \theta_3^{r-1}(x, \tau) w(x, \tau) \varphi(x, \tau) \int_{\Omega} u_\varepsilon^p(y, \tau) dy dx d\tau - \\ & - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial n} \left(\int_{\Omega} k(x, y, \tau) l \theta_4^{l-1}(y, \tau) w(y, \tau) dy + \varepsilon \right) dS_x d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\theta_i(x, \tau)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) – положительные непрерывные, а следовательно, и ограниченные в \bar{Q}_t функции, причем

$$\sup_{Q_t} (\theta_2^{p-1}(x, \tau) + \theta_3^{r-1}(x, \tau) + \theta_4^{l-1}(x, \tau)) \leq \theta,$$

где положительная постоянная θ не зависит от ε .

Отметим, что справедливы неравенства:

$$0 \leq a(x, t) \leq M, \quad 0 \leq b(x, t) \leq M, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T,$$

$$0 \leq k(x, y, t) \leq M, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, T],$$

где M – некоторая положительная постоянная.

Определим последовательность $\gamma_k(x, \tau)$, $k = 1, 2, \dots$, следующим образом: $\gamma_k(x, \tau) \in C^\infty(\bar{Q}_t)$, $\gamma_k \geq 0$ и $\gamma_k \rightarrow qb(x, \tau)\theta_1^{q-1}(x, \tau)$ при $k \rightarrow \infty$ в $L^1(Q_t)$. Рассмотрим в Q_t задачу

$$\begin{cases} \varphi_\tau + \Delta\varphi - \gamma_k\varphi = 0, & (x, \tau) \in Q_t, \\ \varphi(x, \tau) = 0, & (x, \tau) \in S_t, \\ \varphi(x, t) = \psi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (17)$$

где $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ и $0 \leq \psi(x) \leq 1$. Обозначим решение задачи (17) через $\varphi_k(x, \tau)$. Отметим, что $\varphi_k(x, \tau) \in C^{2,1}(\bar{Q}_t)$ и в силу принципа максимума $0 \leq \varphi_k(x, \tau) \leq 1$ в \bar{Q}_t . Поскольку $\gamma_k \geq 0$, то легко показать, что $-N \leq \frac{\partial\varphi_k(x, \tau)}{\partial n} \leq 0$ на S_t , где N – некоторая положительная постоянная, не зависящая от k и ε . Положим $\varphi = \varphi_k$ в (16) и перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$:

$$\int_{\Omega} w(x, t)\psi(x)dx \leq \int_{\Omega} w_+(x, 0)dx + \varepsilon^q MT|\Omega| + \varepsilon NT|\partial\Omega| + m(t) \int_0^t \int_{\Omega} w_+(x, \tau)dx d\tau, \quad (18)$$

где $w_+ = \max(w, 0)$, $|\partial\Omega|$ и $|\Omega|$ – меры Лебега $\partial\Omega$ в \mathbb{R}^{n-1} и Ω в \mathbb{R}^n соответственно;

$$m(t) = M|\Omega|\theta \left(p \sup_{\bar{Q}_t} \bar{u}^r(x, \tau) + r \sup_{\bar{Q}_t} u_\varepsilon^p(x, \tau) \right) + lMN\theta|\partial\Omega|.$$

Отметим, что $m(t) \leq m(T_0)$ при $t \in (0, T_0]$ для любого $T_0 \in (0, T)$ и $w(x, 0) \leq 0$ для $x \in \Omega$.

Выберем последовательность $\psi_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \psi_k(x) \leq 1$, сходящуюся в $L^1(\Omega)$ к функции

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } w(x, t) > 0, \\ 0, & \text{если } w(x, t) \leq 0. \end{cases}$$

Подставляя $\psi_k(x)$ вместо $\psi(x)$ в (18) и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{\Omega} w_+(x, t)dx \leq \varepsilon^q MT|\Omega| + \varepsilon NT|\partial\Omega| + m(T_0) \int_0^t \int_{\Omega} w_+(x, \tau)dx d\tau, \quad t \in (0, T_0].$$

Применяя лемму Гронуолла, имеем

$$\int_{\Omega} w_+(x, t)dx \leq (\varepsilon^q MT|\Omega| + \varepsilon NT|\partial\Omega|) \exp[m(T_0)t], \quad t \in (0, T_0].$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $w(x, t) \leq 0$ в \bar{Q}_{T_0} . В силу произвольности T_0 имеем $w(x, t) \leq 0$ в $Q_T \cup \Gamma_T$. Для случая $\min(r, p, l) < 1$ можно рассмотреть разность $w = \underline{u} - \bar{u}$ и, проводя аналогичные рассуждения с использованием положительности \underline{u} или \bar{u} , доказать утверждение теоремы. Теорема доказана.

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$k(x, \cdot, t) \neq 0 \text{ для любых } x \in \partial\Omega \text{ и } t \in (0, T), \quad (19)$$

$$a(x, t) > 0 \text{ при } x \in \bar{\Omega} \text{ и } t \in [0, T). \quad (20)$$

Лемма 1. Пусть $u_0(x)$ – нетривиальная функция в Ω , выполнено (19) и одно из следующих условий: $q \geq 1$, или $b(x, t) \equiv 0$ в Q_T , или $l < 1$, $r + p < q < 1$ и справедливо (20). Предположим, что $u(x, t)$ – решение задачи (1)–(3) в Q_T . Тогда $u(x, t) > 0$ в $Q_T \cup S_T$.

Доказательство. Пусть $q \geq 1$ или $b(x, t) \equiv 0$ в Q_T . Обозначим

$$M = \max \left(\sup_{Q_{T_0}} u(x, t), \sup_{Q_{T_0}} b(x, t) \right),$$

где $T_0 \in (0, T)$; M – некоторая положительная постоянная. Положим $v = u \exp(\lambda t)$, где $\lambda \geq M^q$. Отметим, что в Q_{T_0} выполнено

$$v_t - \Delta v = \exp(\lambda t)(\lambda u + u_t - \Delta u) \geq u \exp(\lambda t)(\lambda - b(x, t)u^{q-1}) \geq 0.$$

Поскольку $v(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, и $u_0(x)$ – нетривиальная неотрицательная функция в Ω , то согласно сильному принципу максимума $v(x, t) > 0$ в Q_{T_0} . Следовательно, $u(x, t) > 0$ в Q_{T_0} . Из (2) и (19) получим $u(x, t) > 0$ на S_{T_0} . В силу произвольности T_0 имеем $u(x, t) > 0$ в $Q_T \cup S_T$.

Пусть $l < 1$, $r + p < q < 1$ и выполнено условие (20). Положим

$$a_\tau = \inf_{Q_\tau} a(x, t), \quad b_\tau = \sup_{Q_\tau} b(x, t)$$

для некоторого $\tau \in (0, T)$. Через Ω' обозначим множество всех точек $\bar{\Omega}$, для которых выполнено неравенство

$$u_0(x) < \left\{ \frac{a_\tau}{2b_\tau} \int_{\Omega} u_0^p(y) dy \right\}^{\frac{1}{q-r}}.$$

Тогда для некоторого $\sigma \in (0, \tau)$ справедливо неравенство

$$a(x, t)u^r \int_{\Omega} u^p(y, t) dy - b(x, t)u^q \geq 0 \quad \text{для } x \in \bar{\Omega}' \text{ и } t \in [0, \sigma]. \quad (21)$$

Пусть Ω'' – область в Ω' такая, что $u_0(x) \not\equiv 0$ в Ω'' . Из (1) и (21) следует

$$u_t - \Delta u \geq 0 \quad \text{для } x \in \Omega'' \text{ и } t \in (0, \sigma).$$

Вследствие сильного принципа максимума $u(x, t) > 0$ для $x \in \Omega''$ и $t \in (0, \sigma]$. Отметим, что последнее неравенство выполняется для $x \in \Omega' \setminus \partial\Omega$ и $t \in (0, \sigma]$.

Для точек $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega'}$ справедливо

$$u_0(x) \geq \left\{ \frac{a_\tau}{2b_\tau} \int_{\Omega} u_0^p(y) dy \right\}^{\frac{1}{q-r}}.$$

Тогда существует постоянная $\delta \in (0, T)$ такая, что $u(x, t) > 0$ для $x \in \overline{\Omega \setminus \Omega'}$ и $t \in [0, \delta]$. Следовательно, $u(x, t) > 0$ для $x \in \Omega$ и $t \in (0, t_1]$, где $t_1 \leq \min(\sigma, \delta)$. В силу (19) получим $u(x, t) > 0$ для $x \in \bar{\Omega}$ и $t \in (0, t_1]$. Пусть $\bar{t} \in (0, t_1)$. Легко видеть, что при достаточно малом ε нижним решением задачи (1)–(3) с начальными данными при $t = \bar{t}$ выступает функция $\underline{u}(x, t) \equiv \varepsilon$. Лемма доказана.

Простым следствием теоремы 3 и леммы 1 является следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнено одно из условий:

- 1) $\min(r, p, l) \geq 1$;
 - 2) $\min(r, p, l) < 1$, справедливо (19), $u_0(x) > 0$ в $\bar{\Omega}$ и или $q \geq 1$, или $b(x, t) \equiv 0$ в Q_T , или $l < 1$, $r + p < q < 1$, верно (20);
 - 3) существует положительное в $Q_T \cup \Gamma_T$ решение задачи (1)–(3).
- Тогда решение задачи (1)–(3) единственно в Q_T .

Библиографические ссылки

1. Deng K. Comparison principle for some nonlocal problems // *Quart. Appl. Math.* 1992. Vol. 50, issue 3. P. 517–522. DOI: 10.1090/qam/1178431.
2. Lin Z., Liu Y. Uniform blowup profiles for diffusion equations with nonlocal source and nonlocal boundary // *Acta Math. Sci.* 2004. Vol. 24, issue 3. P. 443–450. DOI: 10.1016/S0252-9602(17)30168-6.
3. Wang Y., Mu C., Xiang Z. Properties of positive solution for nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal boundary // *Bound. Value Probl.* 2007. Vol. 2007. P. 1–12. Article ID: 064579. DOI: 10.1155/2007/64579.
4. Cui Z., Yang Z. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. Vol. 342, issue 1. P. 559–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.055.
5. Mu C., Liu D., Zhou S. Properties of positive solutions for a nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal nonlinear boundary condition // *J. Korean Math. Soc.* 2010. Vol. 47, № 6. P. 1317–1328. DOI: 10.4134/JKMS.2010.47.6.1317.
6. Gladkov A., Guedda M. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // *Nonlinear Anal.* 2011. Vol. 74, № 13. P. 4573–4580. DOI: 10.1016/j.na.2011.04.027.
7. Zhong G., Tian L. Blow up problems for a degenerate parabolic equation with nonlocal source and nonlocal nonlinear boundary condition // *Bound. Value Probl.* 2012. Vol. 2012. P. 1–14. DOI: 10.1186/1687-2770-2012-45.
8. Gladkov A., Guedda M. Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // *Appl. Anal.* 2012. Vol. 91, issue 12. P. 2267–2276. DOI: 10.1080/00036811.2011.601297.
9. Fang Z. B., Zhang J., Yi S.-C. Roles of weight functions to a nonlocal porous medium equation with inner absorption and nonlocal boundary condition // *Abstr. Appl. Anal.* 2012. Vol. 2012. P. 1–16. DOI: 10.1155/2012/326527.
10. Fang Z. B., Zhang J. Influence of weight functions to a nonlocal p -Laplacian evolution equation with inner absorption and nonlocal boundary condition // *J. Inequal. Appl.* 2013. Vol. 2013. P. 1–10.
11. Fang Z. B., Zhang J. Global and blow-up solutions for the nonlocal p -Laplacian evolution equation with weighted nonlinear nonlocal boundary condition // *J. Integral Equ. Appl.* 2014. Vol. 26, № 2. P. 171–196. DOI: 10.1216/JIE-2014-26-2-171.
12. Pao C. V. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. New York : Plenum Press, 1992.
13. Kahane C. S. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations // *Czechoslovak Math. J.* 1983. Vol. 33, issue 2, № 108. P. 262–285.
14. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М. : Наука, 1967.

References

1. Deng K. Comparison principle for some nonlocal problems. *Quart. Appl. Math.* 1992. Vol. 50, issue 3. P. 517–522. DOI: 10.1090/qam/1178431.
2. Lin Z., Liu Y. Uniform blowup profiles for diffusion equations with nonlocal source and nonlocal boundary. *Acta Math. Sci.* 2004. Vol. 24, issue 3. P. 443–450. DOI: 10.1016/S0252-9602(17)30168-6.
3. Wang Y., Mu C., Xiang Z. Properties of positive solution for nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal boundary. *Bound. Value Probl.* 2007. Vol. 2007. P. 1–12. Article ID: 064579. DOI: 10.1155/2007/64579.
4. Cui Z., Yang Z. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition. *J. Math. Anal. Appl.* 2008. Vol. 342, issue 1. P. 559–570. DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.055.
5. Mu C., Liu D., Zhou S. Properties of positive solutions for a nonlocal reaction-diffusion equation with nonlocal nonlinear boundary condition. *J. Korean Math. Soc.* 2010. Vol. 47, No. 6. P. 1317–1328. DOI: 10.4134/JKMS.2010.47.6.1317.
6. Gladkov A., Guedda M. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Nonlinear Anal.* 2011. Vol. 74, No. 13. P. 4573–4580. DOI: 10.1016/j.na.2011.04.027.
7. Zhong G., Tian L. Blow up problems for a degenerate parabolic equation with nonlocal source and nonlocal nonlinear boundary condition. *Bound. Value Probl.* 2012. Vol. 2012. P. 1–14. DOI: 10.1186/1687-2770-2012-45.
8. Gladkov A., Guedda M. Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Appl. Anal.* 2012. Vol. 91, issue 12. P. 2267–2276. DOI: 10.1080/00036811.2011.601297.
9. Fang Z. B., Zhang J., Yi S.-C. Roles of weight functions to a nonlocal porous medium equation with inner absorption and nonlocal boundary condition. *Abstr. Appl. Anal.* 2012. Vol. 2012. P. 1–16. DOI: 10.1155/2012/326527.
10. Fang Z. B., Zhang J. Influence of weight functions to a nonlocal p -Laplacian evolution equation with inner absorption and nonlocal boundary condition. *J. Inequal. Appl.* 2013. Vol. 2013. P. 1–10.
11. Fang Z. B., Zhang J. Global and blow-up solutions for the nonlocal p -Laplacian evolution equation with weighted nonlinear nonlocal boundary condition. *J. Integral Equ. Appl.* 2014. Vol. 26, No. 2. P. 171–196. DOI: 10.1216/JIE-2014-26-2-171.
12. Pao C. V. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. New York : Plenum Press, 1992.
13. Kahane C. S. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations. *Czechoslovak Math. J.* 1983. Vol. 33, issue 2, No. 108. P. 262–285.
14. Ladyzhenskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural'ceva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. Moscow : Nauka, 1967 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 27.10.2017.
Received by editorial board 27.10.2017.