убедиться, что оценка (6) верна и для f с набором параметров $z_k = a + (b-a)z_k^*$, $1 \le k \le n$. Теорема доказана.

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.; Л., 1949.
2. Пекарский А.А. // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1978. № 5. С. 34.
3. Петрушев П.П. // Pliska Studia Math. Bulgarica. 1977. Vol. 1. P. 144.
4. Русак В.Н. // Рациональные функции как аппарат приближения. 1979.
5. Newman D. // Michigan Math. J. 1964. Vol. 11. P. 11.

Поступила в редакцию 06.12.2001.

Александр Сергеевич Ляликов – аспирант кафедры высшей математики и математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В.Н. Русак.

УДК 517.977

Л.И. ЛАВРИНОВИЧ

КОРРЕКЦИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ГАРАНТИРОВАННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

The method of construction of optimal closable program controls is shown, for small number of vectors of approximation. The algorithm of synthesis of optimal closable feedback in the conditions of uncertainty is described.

1. В классе дискретных управлений рассматривается задача [1]:

$$c'x(t^*) \to \max,\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u + w(t),\ x(t_*) = x_0,$$
$$x(t^*) \in X^* = \{x \in R^n : g_* \le Hx \le g^*\}, \tag{1}$$
$$w(t) \in W = \{w \in R^n : w_* \le w \le w^*\},\ u(t) \in U = \{u \in R : |u| \le 1\},\ t \in T,$$

где $A(t)$, $b(t)$, $t \in T$, – кусочно-непрерывные функции, $H \in R^{m \times n}$, g_*, $g^* \in R^m$.

Предполагается: 1) $w(t) \in W$, $t \in T$, – кусочно-непрерывная функция; 2) $u(t)$, $t \in T$, – дискретная функция с периодом квантования h; 3) в текущие моменты $\tau \in T_h = \{t_*, t_* + h, \ldots, t^* - h\}$ известно состояние $x(\tau)$; 4) в моменты $T^p = \{t^q : t_* < t^q < t^*,\ q = \overline{1, p}\}$ будут известны значения $x(t^q)$, $q = \overline{0, p+1}$.

Требуется построить такое управление, чтобы: 1) система в момент t^* попала на множество X^* независимо от реализовавшегося возмущения; 2) гарантированное значение критерия качества задачи (1) было наибольшим.

В [1] предложен метод построения приближенного решения задачи (1), основанный на внешней аппроксимации множеств замыкания, и показано, что с увеличением количества векторов аппроксимации построенное управление сходится к замыкаемому оптимальному программному управлению.

2. Опишем процедуру коррекции приближенного управления, позволяющую повысить точность решения, полученного при использовании небольшого количества векторов аппроксимации. Выберем небольшой набор единичных n-векторов $\overline{F}(q) = \{f_{1,q},\ f_{2,q},\ \ldots,\ f_{s(q),q}\}$ и, следуя [1], построим экстремальное управление. При этом будут найдены $\alpha^*(t_*)$, $\overline{X}^{0,\bar{\alpha}(t_*)}$, $\overline{X}^{1,\bar{\alpha}(t_*)}$, …, $\overline{X}^{p+1,\bar{\alpha}(t_*)}$, цепочка активных индексов $K(i(t_*))$, соответствующих множествам замыкания, и векторы x_i^q, $q = \overline{0, p+1}$, соответствующие активным индексам $i^* \in K(i(t_*))$. Скорректируем вектор $f_{i(t_*),0}$, т. е. заменим его на новый вектор $f^*_{i(t_*),0} = (f_{i(t_*),0} + \varepsilon(x_0 - x^0_{i(t_*)})) / \left| f_{i(t_*),0} + \varepsilon(x_0 - x^0_{i(t_*)}) \right|$, где ε – шаг коррекции, который можно менять на каждой итерации. Если активных векторов несколько, то осуществим подобную коррекцию для всех активных векторов. Построим множество $\bar{X}^{0,\bar{\alpha}(t_*)}$ по новому набору векторов $F(0)$. При $x_0 \notin \bar{X}^{0,\bar{\alpha}(t_*)}$ повторим операцию. Если $x_0 \in \bar{X}^{0,\bar{\alpha}(t_*)}$, то при $x_0 \in \partial X^{0,\alpha(t_*)}$ (∂X – граница множества X) перейдем к коррекции множества $\bar{X}^{1,\bar{\alpha}(t_*)}$, а при больших значениях ε уменьшим их и повторим итерацию снова.

Пусть $x_0 \in \partial X^{0,\bar{\alpha}(t_*)}$. Под действием построенного ранее экстремального управления и наихудшего возмущения система в момент t^1 перейдет в состояние $x^*(t^1) \in \partial \bar{X}^{1,\bar{\alpha}(t_*)}$. Скорректируем вектор $f_{i(t^1),1}$, $i(t^1) \in K(i(t^1))$: $f^*_{i(t^1),1} =$
$= (f_{i(t^1),1} + \varepsilon(x^*(t^1) - x^1_{i(t^1)})) / \left| f_{i(t^1),1} + \varepsilon(x^*(t^1) - x^1_{i(t^1)}) \right|$ и построим множество $X^{1,\alpha(t_*)}$ по новой системе векторов $F(1)$. Если $x^*(t^1) \notin \bar{X}^{1,\bar{\alpha}(t_*)}$, то возвращаемся к началу процедуры. В противном случае переходим к коррекции множества $\bar{X}^{2,\alpha(t_*)}$.

Следуя [2], можно показать, что скорректированные экстремальные управления сходятся к оптимальному гарантированному программному управлению задачи [1] в классе дискретных функций. Для построения оптимального гарантированного управления в классе кусочно-постоянных функций можно использовать процедуру доводки [3].

3. Метод коррекции проиллюстрируем на примере задачи [1]

$$|x_2(5)| \to \min, \ \dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = -x_1 + u + w, \ x_1(0) = 5, \ x_2(0) = 5,$$
$$|x_1(5)| \le 2, \ |u(t)| \le 1, \ |w(t)| \le 0{,}5, \ t \in [0,5], \tag{2}$$

с моментом замыкания t^1=2,5 и периодом квантования 0,05. На рис. 1 представлены начальные аппроксимации множеств замыкания $\bar{X}^1(1)$, $\bar{X}^0(1)$, построенные по восьми векторам, и траектория (I) системы, соответствующая этим множествам, а также скорректированные оптимальные аппроксимации множеств замыкания $\bar{X}^1(2)$, $\bar{X}^0(2)$ и оптимальная траектория (II) системы, соответствующая этим множествам.

4. Опишем процедуру реализации оптимальной замыкаемой обратной связи для задачи (1). Предположим, что на промежутке $[t_*, \tau]$, $\tau \in T_h$, $\tau \in [t^{q-1}, t^q - h]$, были вычислены значения оптимальной обратной связи $u^*(t_*)$, $u^*(t_* + h)$, …, $u^*(\tau)$, и под действием построенного управления и реализовавшегося возмущения система перешла в состояние $x^*(\tau + h)$. Обозначим $X^{\tau,\alpha(\tau)}$ – множество всех состояний, из которых за время $[\tau, t^q]$ можно попасть на множество $X^{q,\alpha(\tau)}$. Его аппроксимацию начнем строить по набору векторов, полученному при аппроксимации множества $\bar{X}^{\tau-h,\bar{\alpha}(\tau)}$. Предположим, что в момент τ+h известны $\alpha^*(\tau)$, $\bar{X}^{\tau,\bar{\alpha}(\tau)}$, $\bar{X}^{l,\bar{\alpha}(\tau)}$, $l = \overline{q, p}$, цепочка активных индексов $K(i(\tau))$, соответствующих множествам замыкания, и векторы $x^l_{i^*}$, $l=\overline{q,p}$, соответствующие активным индексам $i^*\in K(i(\tau))$. Вычисление текущего значения оптимальной замыкаемой обратной связи $u(\tau+h)$ будем производить согласно описанной выше процедуре, используя для аппроксимации множеств замыкания только ε-активные ограничения (вектор $f_{i,l}$ назовем ε-активным, если ($|f'_{i,l}x(\tau)-\beta^{l,\alpha(\tau)}|\le\varepsilon$). Более точную аппроксимацию множеств замыкания можно вычислять параллельно на других процессорах в процессе функционирования системы.

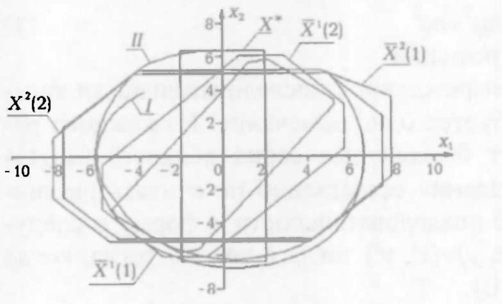

Рис. 1

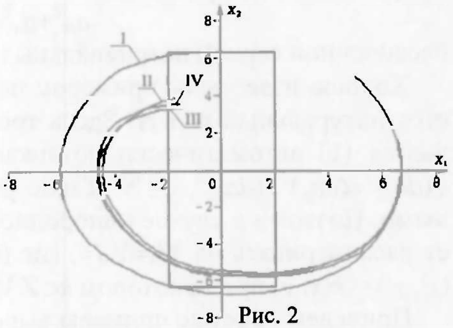

Рис. 2

5. Реализацию оптимальной замыкаемой обратной связи проиллюстрируем на примере (2). На рис. 2 представлены траектория системы при действии оптимального гарантированного программного управления и наихудшего возмущения (I), а также траектории системы при действии замыкаемых обратных связей для случаев $w_1(t)\equiv0$ (II), $w_2(t)\equiv0{,}5$ (III), $w_3=-0{,}5$ (IV).

1. Лавринович Л.И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 2.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М., 1969.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Конструктивные методы оптимизации. Задачи управления: В 2 ч. Мн., 1984. Ч. 2.

Поступила в редакцию 27.02.2001.

Леонид Иванович Лавринович – ассистент кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики.

УДК 511.5

С.Л. ШТИН

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

We can associate with any real seguence its cartesien powers and study their geometry. In this article we consider the only such geometric property – the distance from zero for elements of cartesien sguare of a seguence. The intention to classify seguences in dependence on this distance leads to some difficult diophantine problems. We restrict our consideration to some simple cases.

Рассмотрим произвольную вещественную последовательность $A=\{a_n\}$, множество значений которой бесконечно. Вместо A можно рассматривать $A\times A=\{(a_i,a_j)\,|\,_{i,\,j}\in\mathbf{N}\}$, поскольку любое из этих множеств вполне определяет другое. Под геометрическими свойствами последовательности A будем понимать геометрические свойства множества $A\times A$ из $\mathbf{R}^2$.

Зададим функцию φ: $A\times A\to\mathbf{R}$, $\varphi(a_i,a_j)=a_i^2+a_j^2$. Можно пытаться классифицировать последовательности в зависимости от инъективности φ. Ввиду