

МЕРА УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ С СОВОКУПНО-ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Stability of the set of jointly-extreme solutions of a multicriterion problem on a system of subsets of a finite set with linear partial criteria is investigated.

Пусть на системе непустых подмножеств (траекторий) $T \subset 2^E \setminus \{\emptyset\}$, $|T| > 1$, булеана множества $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m > 2$, задана векторная целевая функция $f(t, A) = (f_1(t, A), f_2(t, A), \dots, f_n(t, A))$, $n > 1$, с линейными частными критериями (вида MINSUM)

$$f_i(t, A) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij} \rightarrow \min, \quad i \in N_n.$$

Здесь $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in R^{nm}$, $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$.

В теории принятия решений наряду с широко известным принципом оптимальности по Парето рассматриваются и другие функции выбора (см., например, [1–4]). В настоящей заметке под векторной (n -критериальной) линейной траекторной задачей $Z^n(A)$ будем понимать задачу поиска совокупно-экстремального множества (множества совокупно-экстремальных траекторий), которое определим традиционным образом [2–4]:

$$C^n(A) = \{t \in T : \exists i \in N_n \quad \forall t^0 \in T \quad (f_i(t, A) \leq f_i(t^0, A))\}.$$

Учитывая конечность множества траекторий T , легко убедиться в справедливости следующих соотношений, верных при любой матрице $A \in R^{nm}$:

$$C^n(A) = S^n(A) \setminus (P^n(A) \setminus L^n(A)) = L^n(A) \cup (S^n(A) \setminus P^n(A)),$$

$$L^n(A) \subset C^n(A) \subset S^n(A),$$

$$\emptyset \neq C^n(A) \subseteq S^n(A),$$

$$C^n(A) \cap P^n(A) = L^n(A),$$

где $P^n(A)$ – множество Парето, $S^n(A)$ – множество Слейтера, $L^n(A)$ – лексикографическое множество, которые определяются следующим образом (см., например, [5–7]):

$$P^n(A) = \{t \in T : \nexists t^0 \in T (f(t, A) \geq f(t^0, A), \quad f(t, A) \neq f(t^0, A))\},$$

$$S^n(A) = \{t \in T : \exists t^0 \in T \forall i \in N_n (f_i(t, A) > f_i(t^0, A))\},$$

$$L^n(A) = \bigcup_{s \in S_n} L(A, s), \quad L(A, s) = \{t \in T : \forall t^0 \in T (f(t, A) \leq_s f(t^0, A))\}.$$

Здесь S_n – множество всех $n!$ перестановок чисел $1, 2, \dots, n$; $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_n$, а бинарное отношение лексикографического порядка $\leq_s$ векторов $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ из R^n задается по формуле

$$y <_s y^0 \Leftrightarrow (y = y^0) \vee (\exists j \in N_n \quad \forall i \in \bar{n}_{j-1} \quad (y_{s_i}, y_{s_i}^0, \quad y_{s_j} < y_{s_j}^0)),$$

где $N = \emptyset$.

Как обычно [6–8], под устойчивостью векторной задачи $Z^n(A)$ будем понимать дискретный аналог свойства полунепрерывности сверху (по Хаусдорфу) многозначного отображения, характеризующего зависимость множества $C^n(A)$ от матрицы A . Поэтому радиусом устойчивости задачи $Z^n(A)$ по аналогии с [7–9] назовем величину

$$\rho^n(A) = \begin{cases} \sup Q, & \text{если } Q \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } Q = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$Q = \{\varepsilon > 0 : B \in \mathcal{B}(\varepsilon) (C^n(A) \supset C^n(A+B))\},$$

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in R^{nm} : \|B\|_\infty < \varepsilon\},$$

$$\|B\|_\infty = \max\{|b_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}, \quad B = [b_{ij}]_{n \times m} \in R^{nm}.$$

Другими словами, радиус устойчивости задачи $Z^n(A)$ – это предельный уровень независимых возмущений элементов матрицы A , которые не приводят к появлению новых совокупно-экстремальных траекторий. Ясно, что при выполнении равенства $C^n(A) = T$ радиус устойчивости $\rho^n(A) = \infty$. Поэтому здесь будем рассматривать лишь так называемые нетривиальные задачи, т. е. задачи, для которых $\overline{C^n(A)} = T \setminus C^n(A) \neq \emptyset$. Задачу $Z^n(A+B)$, полученную из исходной задачи $Z^n(A)$ при сложении матриц A и B , будем называть возмущенной, а матрицу B – возмущающей. Положим

$$\tau_i(t, t^0, A) = f_i(t, A) - f_i(t^0, A),$$

$$\Delta(t, t^0) = |(t \cup t^0) \setminus (t \cap t^0)|,$$

$$\varphi^n(A) = \min_{i \in N_n} \min_{t \in C^n(A)} \max_{t^0 \in T \setminus \{t\}} \frac{\tau_i(t, t^0, A)}{\Delta(t, t^0)}.$$

Очевидно, что для любой нетривиальной задачи $\varphi^n(A) > 0$.

Теорема 1. Для радиуса устойчивости $\rho^n(A)$ векторной линейной траекторной нетривиальной задачи $Z^n(A)$, $n > 1$, справедлива формула

$$\rho^n(A) = \varphi^n(A). \quad (1)$$

Доказательство. Обозначим для краткости $\varphi := \varphi^n(A)$. Сначала докажем неравенство $\rho^n(A) \geq \varphi$. При $\varphi = 0$ это неравенство очевидно. Пусть $\varphi > 0$. Тогда в силу определения числа φ для любой траектории $t \in \overline{C^n(A)}$ (существование такой траектории гарантируется нетривиальностью задачи $Z^n(A)$) и любого индекса $i \in N_n$ найдется такая траектория $t^0 \in T \setminus \{t\}$, что

$$0 < \varphi < \frac{\tau_i(t, t^0, A)}{\Delta(t, t^0)}.$$

Поэтому для всякой возмущающей матрицы $B = [b_{ij}]_{n \times m} \in \mathcal{B}(\varphi)$ в силу неравенства $\|B\|_\infty < \varphi$ при любом индексе $i \in N_n$ имеем

$$\begin{aligned} \tau_i(t, t^0, A+B) &\geq \tau_i(t, t^0, A) - \sum_{i \in N_n((t \cup t^0) \setminus (t \cap t^0))} |b_{ij}| \geq \tau_i(t, t^0, A) - \|B\|_\infty \Delta(t, t^0) > \\ &> \tau_i(t, t^0, A) - \varphi \Delta(t, t^0) > 0. \end{aligned}$$

Отсюда $t \in \overline{C^n(A+B)}$. Таким образом, при любой возмущающей матрице $B \in \mathcal{B}(\varphi)$ справедливо включение

$$C^n(A+B) \subseteq C^n(A).$$

Следовательно, верна оценка $\rho^n(A) \geq \varphi$.

Далее покажем, что $\rho^n(A) \leq \varphi$. Согласно определению числа $\varphi > 0$ найдутся индекс $k \in N_n$ и траектория $t \in \overline{C^n(A)}$ такие, что для всякой траектории $t^0 \in T \setminus \{t\}$ выполняется неравенство

$$\tau_k(t, t^0, A) \leq \varphi \Delta(t, t^0). \quad (2)$$

Далее, полагая $\varepsilon > \varphi$, рассмотрим возмущающую матрицу $B^* = [b_{ij}^*]_{n \times m}$ с элементами

$$b_{ij}^* = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } i = k, j \in N(t), \\ \alpha, & \text{если } i = k, j \notin N(t), \\ 0, & \text{если } i \neq k, j \in N_m, \end{cases}$$

где $\varphi < \alpha < \varepsilon$. Очевидно, что $B^* \in \mathcal{B}(\varepsilon)$. Учитывая (2) и структуру матрицы B^* , получаем соотношения

$$\tau_k(t, t^0, A + B^*) = \tau_k(t, t^0, A) - \alpha \Delta(t, t^0) < \tau_k(t, t^0, A) - \varphi \Delta(t, t^0) < 0,$$

верные для любой траектории $t^0 \neq t$. Поэтому t является совокупно-экстремальной траекторией возмущенной задачи $Z^n(A + B^*)$. Таким образом, для любого числа $\varepsilon > \varphi$ существует такая матрица $B^* \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, что $C^n(A + B^*) \not\subseteq C^n(A)$. Следовательно, при любом числе $\varepsilon > \varphi$ справедливо неравенство $\rho^n(A) < \varepsilon$, т. е. $\rho^n(A) < \varphi$.

Теорема доказана.

Так как из определения множества $\overline{C^n(A)}$ вытекает формула

$$\forall t \in \overline{C^n(A)} \forall i \in N_n \exists t^0 \in T (\tau_i(t, t^0, A) > 0),$$

то для всякой нетривиальной задачи $Z^n(A)$ число $\rho^n(A) > 0$. Поэтому из теоремы легко получаем

Следствие. Всякая задача $Z^n(A)$, $n > 1$, устойчива ($\rho^n(A) > 0$).

Замечание. Если $n=1$, то формула (1) превращается в известную формулу радиуса устойчивости скалярной (однокритериальной) траекторной задачи с линейным критерием [10].

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Алгоритм».

1. Молодцов Д. А. Устойчивость принципов оптимальности. М., 1987.
2. Шоломов Л. А. Логические методы исследования дискретных моделей выбора. М., 1989.
3. Юдин Д. Б. Вычислительные методы теории принятия решений. М., 1989.
4. Айзерман М. А., Алексеров Ф. Т. Выбор вариантов: основы теории. М., 1990.
5. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
6. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев, 1995.
7. Емеличев В. А., Бердышева Р. А. // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1999. № 4. С. 119.
8. Емеличев В. А., Подкопаев Д. П. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 11. С. 1801.
9. Емеличев В. А., Никулин Ю. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 1. С. 47.
10. Леонтьев В. К. // Проблемы кибернетики. 1979. Вып. 35. С. 169.

Поступила в редакцию 18.05.2002.

Сергей Евгеньевич Бухтояров – студент 5-го курса механико-математического факультета.

Владимир Алексеевич Емеличев – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики.