

3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
4. Ла Салль Ж.П. // Гидродинамическая неустойчивость. М., 1970.
5. Ла Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., 1964.
6. Булгаков Н.Г., Калитин Б.С. // Вести АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978. № 3. С. 32.
7. Булгаков Н.Г. // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24. № 9. С. 788.
8. Гайшун И.В., Княжище Л.Б. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 8. С. 1453.
9. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн., 1983.
10. Грудо Э.И. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 5. С. 782.
11. Булгаков Н.Г. // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 4. С. 301.
12. Булгаков Н.Г. // Деп. в ВИНТИ 19.01.1995. № 166-13-95. С. 6.
13. Булгаков Н.Г. // Деп. в ВИНТИ 30.07.1996. № 2570-B96. С. 24.
14. Булгаков Н.Г. Знакопостоянные функции в теории устойчивости. Мн., 1984. С. 78.
15. Княжище Л.Б. // Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982. № 3. С. 17.
16. Булгаков Н.Г. // Проблемы оптимального управления. Мн., 1981. С. 63.
17. Булгаков Н.Г. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 2. С. 87.
18. Kalitine B. // R.A.I.R.O. Automatique / Systems Analysis and Control. 1982. Vol. 16. № 3. P. 275.

Поступила в редакцию 04.09.2001.

Николай Григорьевич Булгаков – кандидат физико-математических наук.

УДК 538

Б.С. КАЛИТИН

РАВНОМЕРНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

In this paper, we initiate studies of property of uniformly integral continuity of solutions for non autonomous differential equations.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t), x \in G \subset R^n, t \geq 0, \quad (1)$$

где $f: G \times R^+ \rightarrow R^n$ – непрерывная функция, G – открытое связное подмножество евклидова пространства R^n . Предположим, что для любой пары $(x_0, t_0) \in G \times R^+$ существует единственное решение $\varphi(x_0, t_0, t)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0, t_0, t_0) = x_0$. Свойство единственности гарантируется, например, условием Липшица. Пусть $\|x\|$ означает какую-нибудь норму пространства R^n . Напомним, что функция $f(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица (или, точнее, равномерному условию Липшица) по x , если для любого компактного подмножества K из G существует число $L - L(K) > 0$ такое, что

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in K \text{ и } \forall t \geq 0. \quad (2)$$

При этом предположении решения обладают так называемым свойством интегральной непрерывности. А именно [1], пусть $]\alpha, \beta[$ – интервал определения решения $\varphi(x_0, t_0, t)$, содержащий t_0 . Тогда для любого замкнутого интервала $[a, b]$ из $]\alpha, \beta[$, для любых $T > 0$ ($[t_0, t_0 + T] \subset [a, b]$) и $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если $\|x_0 - y_0\| < \delta$, то решение $\varphi(y_0, t_0, t)$ определено на $[a, b]$, причем $\|\varphi(x_0, t_0, t) - \varphi(y_0, t_0, t)\| < \varepsilon$ для всех $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

В качественной теории устойчивости движения наряду со свойством интегральной непрерывности [2] используется также и свойство равномерной интегральной непрерывности, которое играет важную роль при исследовании поведения траекторий абстрактных полудинамических систем (см., например, [3]). Однако даже для конечномерного случая систем неавтономных дифференциальных уравнений в настоящее время отсутствуют исследования свойства равномерной интегральной непрерывности и не выяснена взаимосвязь этого понятия с другими свойствами, используемыми в теории дифференциальных уравнений. Цель настоящей статьи – попытаться восполнить возникший при этом пробел и дать достаточные условия, гарантирующие свойство равномерной интегральной непрерывности решений.

Сформулируем следующее условие:

А) для любого компактного подмножества K из G и некоторого числа $a > 0$ существует конечное число

$$C = C(K, a) = \sup_{t_0 > 0} \sup_{|t - t_0| < a, x \in K} \|f(x, t)\|.$$

Приведем теорему, доказательство которой можно осуществить почти дословным повторением доказательства известной теоремы Пикара – Линделефа (см., например, [4]).

Теорема 1. Пусть функция $f: G \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна, удовлетворяет условию Липшица (2) по x . Тогда для любых чисел $a > 0$, $b > 0$ таких, что для $K = \{x \in G: \|x - x_0\| \leq b\}$, $|t - t_0| \leq a$, выполнено условие А), задача Коши

$$\dot{x} = f(x, t), x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

имеет единственное решение, причем $\forall t_0 > 0$ всякое такое решение определено на отрезке $[t_0, t_0 + \alpha]$ постоянной длины $\alpha = \min\{a, b/C\}$ ($\alpha = a$, если $C = 0$) и не покидает K .

Отметим, что, в отличие от теоремы Пикара – Линделефа, в данной теореме гарантируется существование семейства единственных решений задачи Коши (4) при каждом $t_0 > 0$ на интервале одной и той же длины $\alpha > 0$.

Лемма 1. Пусть система (1) удовлетворяет условию А). Предположим, что решение $\varphi(x_0, t_0, t)$ задачи (3) гарантировано теоремой 1 на интервале $[t_0, t_0 + \alpha]$. Тогда существуют числа $\sigma > 0$ и h , $0 < h < \alpha$, для которых при всех Δx_0 и Δt_0 таких, что $\|\Delta x_0\| < \sigma$ и $0 < \Delta t_0 < \sigma$, решение $\varphi(x_0 + \Delta x_0, t_0 + \Delta t_0, t)$ системы (1) определено, по крайней мере, на отрезке $[t_0, t_0 + h]$ для всех $t_0 \geq 0$ и содержится в замкнутом ограниченном множестве из G .

Доказательство. По теореме 1 решение $\varphi(x_0 + \Delta x_0, t_0 + \Delta t_0, t)$ содержится в шаре $B(x_0 + \Delta x_0, b)$ при всех $t \in [-\Delta t_0, \alpha - \Delta t_0]$. Положим $h = \alpha - \Delta t_0$, $0 < \sigma < \alpha$, $\|\Delta x_0\| < \sigma$, $0 < \Delta t_0 \leq \sigma$. Тогда оба решения $\varphi(x_0, t_0, t)$ и $\varphi(x_0 + \Delta x_0, t_0 + \Delta t_0, t)$ будут определены на одном и том же интервале $[t_0, t_0 + h]$ одновременно для всех значений $t_0 \geq 0$ и будут принадлежать компактному множеству

$$K_1 = \overline{\bigcup_{\|\Delta x_0\| < \sigma} B(x_0 + \Delta x_0, b)},$$

где черта сверху означает операцию замыкания

множества. Ясно, что число $\sigma > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы $K_1 \in G$. Отсюда и следует требуемое утверждение.

Определение 1. Будем говорить, что решение $\varphi(x_0, t_0, t)$ системы (1), определенное на $[\alpha, \beta]$ при всех $t_0 > 0$, равномерно интегрально непрерывно, если $\varphi(x^*, t^*, t) \rightarrow \varphi(x_0, t_0, t)$ для $t \in [a, b] \subset [\alpha, \beta]$ при $(x^*, t^*) \rightarrow (x_0, t_0)$ равномерно по $t_0 \in [0, +\infty[$, т. е. $(\forall \varepsilon > 0)(\forall [a, b] \subset [\alpha, \beta])(\exists \delta > 0)$, что если $\|x^* - x_0\| < \delta$, $|t^* - t_0| < \delta$ и $(x^*, t^*) \in G \times \mathbb{R}^+$, то $\|\varphi(x^*, t^*, t) - \varphi(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon \forall t \in [a, b]$ и $\forall t_0 > 0$.

Опираясь на лемму, можно показать, что справедлива

Теорема 2. Если функция $f: G \times K \rightarrow K$ непрерывна, удовлетворяет условию Липшица (2) по x и условию A), то все решения уравнения (1) обладают свойством равномерной интегральной непрерывности.

Доказательство. Пусть $\varphi(x_0, t_0, t)$ – решение системы (1), заданное на интервале $[t_0, t_0 + \alpha]$, где число α определено согласно теореме 1. Докажем свойство равномерной интегральной непрерывности способом от противного. Пусть для некоторых чисел $T \in]0, \alpha]$ и $\varepsilon > 0$ не существует числа $\delta > 0$, удовлетворяющего определению 1. Тогда согласно теореме 1 и лемме 1 можно указать число $\sigma > 0$ такое, что всякое решение $\varphi(y_0, t^*, t)$ для $\|x_0 - y_0\| < \sigma$, $|t - t_0| < \sigma$ определено, по крайней мере, для $t \in [t_0, t_0 + T]$ при всех $t_0 \geq 0$ одновременно и содержится в некотором компакте K_1 из G . Согласно рассуждениям от противного для сходящейся к нулю последовательности положительных чисел (δ_n) , $\delta_n \leq \sigma$, можно указать последовательность начальных точек (y_{0n}) , $\|y_{0n} - x_0\| < \delta_n$, и две последовательности моментов времени (t_{0n}) , $t_{0n} \geq 0$, и (t_n) , $t_{0n} \leq t_n < t_{0n} + T$, $\forall n \geq 1$, такие, что выполняются неравенства

$$\|\varphi(y_{0n}, t_{0n}, t_n) - \varphi(x_0, t_{0n}, t_n)\| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq 1. \quad (4)$$

По построению $y_{0n} \rightarrow x_0$, при $n \rightarrow +\infty$, а в силу компактности интервала $[t_{0n}, t_{0n} + T]$, не теряя общности рассуждений, можно считать, что $(t_n - t_{0n}) \rightarrow t \in [0, T]$.

Используя интегральное представление решений, можем записать равенства:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, t_{0n}, t_n) &= x_0 + \int_{t_{0n}}^{t_n} f(\varphi(x_0, t_{0n}, s), s) ds, \quad \varphi(y_{0n}, t_{0n}, t_n) = \\ &= y_{0n} + \int_{t_{0n}}^{t_n} f(\varphi(y_{0n}, t_{0n}, s), s) ds. \end{aligned}$$

В результате вычитания их и перехода к известным неравенствам для норм получим:

$$\begin{aligned} \|\varphi(y_{0n}, t_{0n}, t_n) - \varphi(x_0, t_{0n}, t_n)\| &\leq \|y_{0n} - x_0\| + \\ &+ \int_{t_{0n}}^{t_n} \|f(\varphi(y_{0n}, t_{0n}, s), s) - f(\varphi(x_0, t_{0n}, s), s)\| ds. \end{aligned}$$

Отсюда на основании условия Липшица для компакта K_1 следует, что

$$\|\varphi(y_{0n}, t_{0n}, t_n) - \varphi(x_0, t_{0n}, t_n)\| \leq \|y_{0n} - x_0\| + L \int_{t_{0n}}^{t_n} \|\varphi(y_{0n}, t_{0n}, s) - \varphi(x_0, t_{0n}, s)\| ds.$$

И поэтому по лемме Гронуолла получаем неравенство

$$\|\varphi(y_{0n}, t_{0n}, t_n) - \varphi(x_0, t_{0n}, t_n)\| \leq \|y_{0n} - x_0\| \exp(L(t_n - t_{0n})).$$

Правая часть последнего неравенства, а значит, и его левая часть, могут принимать сколь угодно малые значения при достаточно больших n . Однако это невозможно в силу (4). Полученное противоречие и доказывает теорему 2.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = (-1)^n 2tx$, $t > 1$. Нетрудно проверить, что, несмотря на то, что оно не удовлетворяет ни условию Липшица, ни условию A), решения этого уравнения при n нечетном обладают свойством равномерной интегральной непрерывности; при n четном, напротив, свойство равномерной интегральной непрерывности отсутствует. Отметим также, что при n нечетном нулевое решение рассматри-

ваемого уравнения равномерно асимптотически устойчиво в смысле [4], а при n четном оно неустойчиво.

Другие достаточные условия равномерной интегральной непрерывности могут быть получены на основании следующего определения.

Определение 2. Решение $\varphi(x_0, t_0, t)$ системы (1) будем называть равномерно ограниченным по $t_0 \geq 0$, если $\forall T > 0 \exists C = C(T) > 0$, что $\|\varphi(x_0, t_0, t)\| \leq C\|x_0\|$ для $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ и всех $t_0 > 0$.

Теорема 3. Пусть правая часть системы (1) удовлетворяет неравенству

$$\|f(x, t)\| \leq g(t)\|x\|, x \in G, t \geq 0, \quad (5)$$

где $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – непрерывная неотрицательная функция. Тогда, если для любого $T > 0$ существует такая постоянная $C > 0$, что выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) ds \leq C < +\infty, \forall t_0 \geq 0, \quad (6)$$

то решения системы (1) обладают свойством равномерной ограниченности по $t_0 \geq 0$.

Действительно, оценивая интегральное равенство $\varphi(x_0, t_0, t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\varphi(x_0, t_0, s), s) ds$, получим $\|\varphi(x_0, t_0, t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|f(\varphi(x_0, t_0, s), s)\| ds$ или с учетом (5) будем иметь неравенство $\|\varphi(x_0, t_0, t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t g(s)\|\varphi(x_0, t_0, s)\| ds$. Отсюда, воспользовавшись леммой Гронуолла и (6),

получим: $\|\varphi(x_0, t_0, t)\| \leq \|x_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) ds\right) \leq C\|x_0\| \forall t_0 \geq 0$, что и требовалось

доказать.

Заметим, что в примере 1 при n нечетном решения являются равномерно ограниченными при $t_0 > 0$, а при n четном они этим свойством не обладают.

Теперь нетрудно видеть, что справедлива

Теорема 3. Если все решения системы (1) равномерно ограничены по $t_0 > 0$ для начальных состояний x_0 из некоторого компакта K , то они обладают свойством равномерной интегральной непрерывности в K .

Пример 2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = (-1)^n \frac{x}{t} + xy, \\ \dot{y} = -\frac{y}{t}, \quad t \geq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Его общее решение имеет вид:

$$x(x_0, y_0, t_0, t) = x_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{(-1)^n + y_0 t_0}, \quad y(x_0, y_0, t_0, t) = \frac{y_0 t_0}{t}, \quad t \geq t_0 \geq 1.$$

Все решения системы (7) равномерно ограничены для любого натурального числа n . Действительно, нетрудно проверить, что если n четное, то

$$|x(x_0, y_0, t_0, t)| \leq |x_0| \text{ при } 1 + y_0 t_0 \leq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

и

$$|x(x_0, y_0, t_0, t)| \leq |x_0| \exp(Ty_0) \text{ при } 1+y_0t_0 > 0, \quad t_0 \leq t \leq t_0+T \text{ для всех } t_0 \geq 1.$$

Это означает, что решения системы (7) равномерно ограничены по $t_0 \geq 1$ для всех начальных состояний x_0, y_0 из компактного множества в R^2 , и поэтому система (7) обладает свойством равномерной интегральной непрерывности решений.

Аналогично рассматривается случай нечетного значения n .

Отметим, что при нечетном n нулевое решение (7) устойчиво по Ляпунову, но не равномерно устойчиво по $t_0 \geq 1$. При n четном нулевое решение (7) неустойчиво, однако по координате y сохраняется свойство равномерной асимптотической устойчивости для любого натурального n .

Другие достаточные условия равномерной интегральной непрерывности, которые позволят воспользоваться обобщением леммы Гронуолла (см., например, лемму Бихари [5]), могут быть получены путем наложения менее жестких ограничений, чем неравенство (6).

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949.

2. Сибирский К.С. Введение в топологическую динамику. Кишинев, 1970.

3. Seibert P., Florio J.S. // Annali di Matematica pura ed applicata (IV). 1995. Vol. CLXIX. P. 291.

4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.

5. Bihari J.A. // Acta math. Acad. Scient. Hung. 1956. VII. 1. P. 81.

Поступила в редакцию 18.09.2001.

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.

УДК 519.62

В.В. БОБКОВ, И.А. КУЧМИЕНКО, Б.В. ФАЛЕЙЧИК

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА ПИКАРА

The computational algorithms that numerically solve the initial value problem for a system of nonlinear ordinary differential equations are proposed. They allow to increase accuracy of the initial approximation not mainly by decreasing a discretization step, but also by using successive iterations of a Picard-like process.

Так как основное внимание в данной работе будет уделено проблеме повышения точности приближения решений дифференциальных уравнений на шаге дискретизации, то рассматриваемую задачу Коши для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, удобнее будет записать в локальной постановке:

$$\frac{d}{dx} u(x) = f(x, u(x)), \quad t \leq x \leq t + \tau, \quad (1)$$

$$u(t) = y. \quad (2)$$

Для традиционных фиксированного порядка точности методов численного решения исходной задачи практически единственным рычагом управления величиной локальной ошибки является шаг сетки τ . Однако при использовании современных вычислительных машин, имеющих ограниченную разрядную сетку, уменьшение величины τ с целью повысить точность приближения решения задачи (1), (2) может (вопреки ожиданиям) привести