

ствие наличия трещины), распределяется у вершин трещины в области, ограниченной некоторым контуром, за пределами которого напряжение можно считать номинальным. Поскольку значение КИН трещины, принадлежащей системе, не зависит от реального распределения напряжений вокруг как вершины, так и близлежащих концентраторов напряжений, то данный контур можно рассматривать как окружность.

Условие равновесия сечения в этом случае имеет вид:

$$\tau_s = \int_0^{2\pi} \int_0^a \tau_\theta dr d\alpha,$$

а значение КИН соответственно равно

$$K_{II} = \frac{\tau}{2\pi} \sqrt{\pi s}.$$

Исходя из того, что трещина занимает только небольшую площадь сечения по сравнению с площадью собственных зон влияния, систему трещин можно рассматривать как множество симметричных концентраторов напряжений, причем в силу этой симметрии влияние концентраторов друг на друга зависит *только* от расстояния между их центрами (по аналогии с двумерным случаем).

Так как обычно системы трещин в горных породах ориентированы параллельно площадкам максимальных касательных напряжений, то интенсивность концентраторов напряжений определяется следующим выражением:

$$K_{II(i)} = \left(\frac{\tau}{2\pi} \sqrt{\pi s_i} - v \sqrt{\pi s_i} \right) \prod_{j=1}^n F(s_i, s_j, c_{i,j}),$$

где v – напряжения на берегах трещины, обусловленные трением между берегами.

1. Морозов Е.М. Метод сечений в теории трещин // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1969. № 12.

2. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, 1968.

Поступила в редакцию 13.03.2002.

Михаил Анатольевич Журавков – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики.

Сергей Валерьевич Павлов – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики. Научный руководитель – М.А. Журавков.

УДК 517.925.51

Н.Г. БУЛГАКОВ

О КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

The work is devoted to a problem of an establishment of limiting general criteria of stability of autonomous differential systems.

Проблемы устойчивости, возникающие в науке и технике, часто сводятся к задаче об устойчивости нулевого решения дифференциальной системы $x' = f(x)$, $f(0) = 0$, где $f \in C(R^n)$ удовлетворяет условию Липшица. Хорошо известна роль классических теорем А.М. Ляпунова, Е.А. Барбашина, Н.Н. Красовского и Ж.П. Ла Салля в решении этой задачи [1–5]. К сожалению, построение знакоопределенной функции Ляпунова ($V > 0$, $V \leq 0$), лежащей в основе этих теорем, иногда вызывает серьезные трудности.

В последние 20 лет в Беларуси начали применяться знакопостоянные функции ($V > 0$, $V < 0$). Первые результаты в этом направлении были получены Б.С. Калитиным и автором данной статьи [6] (асимптотическая и глобально асимптотическая устойчивость). Критерий неасимптотической устойчивости установлен в [7]. Позднее, при разработке теории устойчивости вполне разрешимых многомерных дифференциальных уравнений, эти результаты были усилены и дополнены И.В. Гайшуном, Л.Б. Княжище [8, 9] и Э.И. Грудю [10].

К началу 1990-х гг. проблема установления критериев устойчивости, позволяющих (в случае, когда построение функции $V > 0$, $V < 0$ затруднено) искать функцию $V > 0$, $V < 0$, практически была разрешена [11, 12]. В [13] автор предпринял попытку изложить решение проблемы в целом. Настоящая статья представляет собой сокращенный и переработанный вариант этой работы. Итак, рассмотрим систему. Решение $x(t, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$, определенное на $I = (-\infty, \infty)$, $I^+ = [0, \infty)$, $I^- = (-\infty, 0]$, обозначим соответственно $x^\infty(t, x_0)$, $x^+(t, x_0)$, $x^-(t, x_0)$; если решение рассматривается в фазовом пространстве R^n , то $x^\infty(x_0, t)$, $x^+(x_0, t)$, $x^-(x_0, t)$; ограниченность будем отмечать дополнительным индексом $\tilde{x}^\infty(x_0, t)$, $\tilde{x}^+(x_0, t)$, $\tilde{x}^-(x_0, t)$.

Пусть $v: K \rightarrow K$ есть функция Ляпунова, $B_r = \{x \in R^n: \|x\| < r\}$ – замкнутый шар, r – положительная постоянная; $\dot{B}_r = B_r \setminus \{0\}$; $m = \{x \in R^n: V(x) = 0\}$, $m_r = m \cap B_r$, $\dot{m}_r = m \cap \dot{B}_r$; $M = \{x \in R^n: V(x) = 0\}$ и т. д. Если V является знакопостоянной положительной функцией в узком смысле слова (не знакоопределенной), то будем писать $V > 0$, $x \in B_r$.

Замечания [13]. 1. Если $V > 0$, $x \in \dot{B}_r$, то $m_r \subset M_r$. 2. Если $V > 0$, $x \in B_r$, то V не может быть знакоопределенной. 3. Если $V > 0$, $x \in B_r$, то $M_r \setminus m_r \not\subset [x^-(t) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty]$. 4. Если $V > 0$, $x \in B_r$, то $M_r \not\subset x^\infty(t) \Leftrightarrow M_r \setminus m_r \not\subset x^\infty(t)$, $m_r \not\subset x^\infty(t)$.

Нуль системы назовем устойчивым по Ла Саллю, если существуют замкнутые ограниченные множества d и D ($\{0\} \in d \subset D \subset R^n$) такие, что $\forall x \in d \Rightarrow x(t, x_0) \in D, t > 0$. Устойчивость влечет устойчивость по Ла Саллю.

Теорема Ла Салля о притяжении ([4], теорема 5). Если: 1) нуль системы устойчив по Ла Саллю с множествами d и D , 2) $V(x) \leq 0, x \in D$,

3) $M_D \not\subset x^\infty(t)$, где $M_D = \left\{ x \in D: V(x) = 0 \right\}$, то $\forall x_0 \in d \Rightarrow x(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

I. Неасимптотическая устойчивость. Нуль системы назовем устойчивым относительно множества m (m -устойчивым), если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0: \forall x_0 \in m \cap B_\delta \Rightarrow \|x(t, x_0)\| < \varepsilon, t \geq 0$; m -локально притягивающим, если $\exists \eta > 0: \forall x_0 \in m \cap B_\eta \Rightarrow x(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$; m -асимптотически устойчивым, если он m -устойчивый и m -локально притягивающий; m -глобально притягивающим, если $\forall x_0 \in m \Rightarrow x(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$; m -глобально асимптотически устойчивым, если он m -устойчивый и m -глобально притягивающий.

Аналогично определяется устойчивость относительно множества M .

Приступая к решению задачи, установим сначала две леммы о структуре окрестностей m -асимптотически устойчивой и неустойчивой точек покоя.

Лемма А ([11], теорема 1). Если нуль системы m -асимптотически устойчив, то при любом достаточно малом $\sigma > 0$ множество $\dot{m}_\sigma$ не содержит отрицательных полутраекторий ($\exists \sigma > 0: \dot{m}_\sigma \not\supset x^-(t)$).

Доказательство. Пусть η – число из определения m -локального притяжения. Предположим от противного, что $\forall \sigma < \eta \exists x^-(x_0, t) \subset \dot{m}_\sigma$. Тогда $A(x_0) \neq \emptyset$. Пусть $x^- \in A(x_0)$. Если $x^* = 0$ – единственная точка $A(x_0)$, то $x(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty$, что несовместимо с m -устойчивостью. Если $x^- \neq 0$, то $x^* \in m \cap B_\sigma \Rightarrow x^* \in m \cap B_\eta \Rightarrow x(t, x^*) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. Множество α -предельных точек $A(x_0)$ состоит из целых траекторий и является замкнутым. Следовательно, точка $x=0$ будет α -предельной для $x^-(t, x_0)$, что опять несовместимо с m -устойчивостью.

Лемма о неустойчивом нуле ([8], лемма 1; ср. [7], лемма 1). Если нуль системы неустойчив и $\exists V: V > 0, V < 0, x \in B_r$, то при любом достаточно малом $\sigma > 0$ множество $\dot{m}_\sigma$ содержит отрицательную полутраекторию.

Доказательство. Нуль неустойчив. Следовательно, $\exists \epsilon < r, \exists \{y_n\}, y_n \in B_\epsilon, y_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ такое, что $\forall \sigma \leq \epsilon, \exists \{t_n\}, t_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty: \|x(t_n, y_n)\| < \sigma, 0 < t < t_n; \|x_n\| = \|x(t_n, y_n)\| = \sigma$, при этом $x_n \rightarrow x', n \rightarrow \infty, \|x'\| = \sigma$. Так как для любого $\gamma < 0$ при достаточно большом $n > 0$ выполняется неравенство $0 \leq t_n + \gamma < t_n$, то согласно сказанному и условию теоремы имеем

$$V(y_n) \geq V[x(t_n + \gamma, y_n)] = V[x(\gamma, x(t_n, y_n))] > 0;$$

$$\|x(t_n + \gamma, y_n)\| = \|x(\gamma, x(t_n, y_n))\| < \sigma.$$

Перейдя к пределу, получаем $V[x(t; x')] = 0, t \in I^-; x^-(x'; t) \subset B_\sigma$.

Объединяя теперь теорему Ляпунова об устойчивости с леммой о неустойчивом нуле и леммой А, приходим к следующему утверждению.

Теорема А ([8], теорема 1; ср. [7], теорема А). Если $\exists V(x): V \geq 0, \dot{V} \leq 0, x \in B_r$ и нуль системы m -асимптотически устойчив, то он устойчив по Ляпунову.

Поскольку в теореме А фигурирует требование m -асимптотической устойчивости, то естественно иметь критерии такой устойчивости.

Приведенные ниже теоремы полностью решают этот вопрос.

Теорема 1.1 ([14], теорема 5, с. 49; ср. [18], теорема 2.1). Пусть $\exists V: V > 0, V < 0, x \in B_r$. Нуль системы m -асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда $\exists \sigma > 0: \dot{m}_\sigma \not\supset x^-(t)$.

Доказательство. Случай $V > 0, \dot{V} \leq 0$ тривиален (теорема Ляпунова). Случай $V \geq 0, \dot{V} < 0$ невозможен (замечание 2). Если $V > 0, \dot{V} \leq 0$, то нуль системы устойчив (лемма о неустойчивом нуле) и, следовательно, m -устойчив $\Rightarrow \forall \epsilon < \sigma, \exists \delta > 0: \forall x_0 \in m \cap B_\delta \Rightarrow x^-(x_0, t) \subset m_\epsilon$. Покажем, что нуль системы является m -локально притягивающим ($\eta = \delta$). Предположим

от противного, что $\exists x_0 \in m \cap B_\delta: x^+(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. Пусть $x^* \in \Omega(x_0)$. Если $x^* = 0$ – единственная точка $\Omega(x_0)$, то $x^+(t; x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, что противоречит предположению.

Если $x^* \neq 0$, то очевидно $V(x^*) = 0$. Но тогда согласно [14] (лемма 1, с. 40) $x^\infty(x^*, t) \subset \dot{m}_\epsilon \subset \dot{m}_\sigma$. А это противоречит условию теоремы.

Теорема 1.2 ([8], теорема 3). Условие, фигурирующее в теореме 1.1, эквивалентно двум условиям: 1) $\exists \epsilon > 0: \dot{m}_\epsilon \not\supset x^\infty(t)$; 2) $\dot{m} \not\supset [x^-(t) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty]$.

Доказательство. Предположим от противного, что $\forall \sigma < \epsilon: \exists x^-(x_0, t) \subset \dot{m}_\sigma$. Пусть $x^* \in A(x_0)$. Если $x^* = 0$ – единственная точка $A(x_0)$, то $x^-(t; x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty$, что противоречит условию 2). Если $x^* \neq 0$, то $V(x^*) = 0$ и согласно [14] (лемма 1, с. 40) $x^\infty(x^*, t) \subset \dot{m}_\epsilon$. А это противоречит условию 1). Из доказательства сразу же вытекает

Теорема 1.3 ([11], следствие 4). Условие, фигурирующее в теореме 1.1, эквивалентно условиям: 1) $\exists \sigma > 0: \dot{m}_\sigma \not\supset x^\infty(t)$; 2) нуль системы m -устойчив.

II. *Асимптотическая устойчивость.* Установим сначала структурную особенность окрестности M -асимптотически устойчивой точки покоя.

Лемма Б ([11], теорема 1). Если нуль системы M -асимптотически устойчив, то $\exists \sigma > 0: \dot{M}_\sigma \not\supset x^-(t)$.

Доказательство не отличается от доказательства леммы А.

Теперь мы в состоянии получить второй основной результат.

Теорема Б ([11], теорема 1). Пусть $\exists V: V > 0, V < 0, x \in B_r$. Нуль системы асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда он M -асимптотически устойчив.

Доказательство. Устойчивость обеспечивает теорема А; притяжение – лемма Б и теорема Ла Салля о притяжении.

Теоремы, приводимые ниже, устанавливают признаки M -асимптотической устойчивости.

Теорема 2.1 ([11], с. 302). Пусть $\exists V: V \geq 0, V \leq 0, x \in B_r$. Нуль системы M -асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда $\exists \sigma > 0: \dot{M}_\sigma \not\supset x^-(t)$.

Доказательство. Устойчивость обеспечивает теорема 1.1 и теорема А; притяжение – теорема Ла Салля о притяжении.

Теорема 2.2 ([10], теорема 9). Условие, фигурирующее в теореме 2.1, эквивалентно условиям: 1) $\exists \epsilon > 0: \dot{M}_\epsilon \not\supset x^\infty(t)$; 2) $\dot{m} \not\supset [x^-(t) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty]$.

Доказательство. Предположим от противного, что $\forall \sigma < \epsilon: \exists x^-(x_0, t) \subset \dot{M}_\sigma$. Пусть $x^* \in A(x_0)$. Если $x^* = 0$ – единственная точка $A(x_0)$, то $x(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty$ и, следовательно, $\dot{M}_\sigma \setminus \dot{m}_\sigma \not\supset x^-(x_0, t)$ (замечание 3). Но тогда $x^-(x_0, t) \subset \dot{m}_\sigma \subset \dot{m}_\epsilon$, что противоречит условию 2).

Если $x^* \neq 0$, то согласно [14] (п. 2.2, лемма 1) $x^\infty(x^*, t) \subset M_\sigma \subset M_\epsilon$. А это противоречит условию 1).

Добавим к условиям теоремы 1.2 условие $M_\epsilon \setminus m_\epsilon \not\supset x^\infty(t)$. Мы получим необходимое и достаточное условие M -асимптотической устойчивости (замечание 4, теорема 2.2). Поступая аналогично с теоремами 1.1, 1.3 и теоремой А, получим еще три критерия M -асимптотической устойчивости.

Теорема 2.3 ([6], теорема 1). Условие, фигурирующее в теореме 2.1, эквивалентно двум условиям: 1) $\exists \sigma > 0: M_\sigma \setminus m_\sigma \not\supset x^\infty(t)$; 2) $m_\sigma \not\supset x^-(t)$.

Теорема 2.4 ([11], с. 302). Условие, фигурирующее в теореме 2.1, эквивалентно двум условиям: 1) $\exists \sigma > 0: M_\sigma \not\supset x^\infty(t)$; 2) нуль системы m -устойчив.

Теорема 2.5 ([7], теорема В). Условие, фигурирующее в теореме 2.1, эквивалентно двум условиям: 1) $\exists \sigma > 0: m_\sigma \setminus m_\sigma \not\supset x^\infty(t)$; 2) нуль системы m -асимптотически устойчив.

III. *Глобальная асимптотическая устойчивость*. Установим сначала два вспомогательных предложения.

Лемма С ([12], лемма 1). Если нуль системы M -глобально асимптотически устойчив, то $M \not\supset x^-(t)$.

Доказательство не отличается от доказательства леммы В.

Лемма С позволяет дополнить известную теорему Ла Салля о глобальном притяжении ([4], теорема 4) следующим образом.

Теорема Ла Салля о глобальном притяжении. Если $\exists V: V \leq 0, x \in R^n$, все решения системы ограничены при $t > 0$ и выполняется одно из условий: 1) $M \not\supset x^\infty(t)$, 2) нуль системы M -глобально асимптотически устойчив, то он является глобально притягивающим.

Теперь нетрудно получить третий основной результат.

Теорема С ([6], теорема 2, [12], теорема 1). Пусть $\exists V: V \geq 0, x \in B_r, V \leq 0, x \in R^n$. Нуль системы глобально асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда все решения системы ограничены при $t \geq 0$ и выполняется одно из условий: 1) $M \not\supset x^\infty(t)$, 2) нуль системы M -глобально асимптотически устойчив.

Доказательство. Устойчивость обеспечивают теорема В и теорема 2.1; глобальное притяжение – теорема Ла Салля о глобальном притяжении (полная формулировка).

IV. *Оценка области асимптотической устойчивости*. Для оценки области притяжения можно использовать следующие две теоремы.

Теорема Д ([13], теорема В). Если: 1) нуль системы устойчив по Ла Саллю с множествами d и D , 2) $\exists V: V \geq 0, V \leq 0, x \in D$, 3) $M_D \not\supset x^\infty(t)$, то нуль системы асимптотически устойчив. При этом $\forall x_0 \in d \Rightarrow x(t; x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу 1), 2) $\forall x_0 \in m \cap d \Rightarrow x^+(t; x_0) \subset m_D$. Но согласно 3) $m_D \not\supset x^\infty(t)$. Следовательно, $m_D \not\supset x^-(t)$. Устойчивость обеспечивают теорема 1.1 и теорема А: притяжение – теорема Ла Салля о притяжении.

Теорема Д является обобщением теоремы Ла Салля ([4], теорема 5).

Теорема Е ([14], с. 51, теорема 4, ср. [6], теорема 1'). Если: 1) $\exists V$ такая, что множество $G = \{x \in R^n: V(x) < r\}$ ограничено, 2) $V \geq 0, \dot{V} < 0, x \in G$, 3) $M_G \not\supset x^\infty(t)$, то нуль системы асимптотически устойчив. При этом $\forall x_0 \in G \Rightarrow x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу 1), 2):

$$\forall x_0 \in G \Rightarrow V[x(t, x_0)] \leq V(x_0) \leq r, t \geq 0 \Rightarrow x(t; x_0) \in G, t \geq 0.$$

Все условия теоремы Д выполнены.

Теорема Е обобщает теорему Ла Салля – Лефшеца ([5], теорема VI). Проиллюстрируем использование теорем на простом примере. Пусть для системы $x' = -x + \varphi(y), y' = -x - y, \varphi(0) = 0$ выполняется условие $\varphi(y)/y > 0, y \neq 0$. Тогда для функции $2V = x^2 + \int_0^y \varphi(y) dy$ имеем $V > 0, \dot{V} < 0$. Рассмотрим

менее жесткое условие $\varphi(y) = 0, y \in [0, 1]; \varphi(y)/y > 0, y \notin [0, 1]$. Останется ли нуль асимптотически устойчивым? Возьмем ту же функцию. Теперь $V \geq 0, \dot{V} = -x^2 - y\varphi(y) \leq 0, M = \{(x, y): x = 0, y \in [0, 1]\}$. Это обстоятельство, однако, не слишком осложняет решение вопроса. Действительно, на множестве M система принимает вид $y' = -y$. Нуль системы M -асимптотически устойчив и, следовательно, останется асимптотически устойчивым (теорема Б). Так как система $y' = -y$ является линейной, то нуль системы будет M -глобально асимптотически устойчивым. Если при этом $\int_0^y \varphi(y) dy \rightarrow \infty, |y| \rightarrow \infty$, то все решения системы ограничены при $t > 0$ и, следовательно, нуль системы глобально асимптотически устойчив (теорема С).

Если интеграл $\int_0^y \varphi(y) dy$ ограничен при $|y| \rightarrow \infty$, то можно воспользоваться теоремой Е (ср. [18]). Действительно, при достаточно малых $C > 0$ линии уровней $V(x, y) = C$ огибают множество $m = \{(x, y): x = 0, y \in [0, 1]\}$ и являются замкнутыми. Пусть $r > 0$ – верхняя граница всех чисел $C > 0$, для которых линии уровней являются замкнутыми. Множество $G = \{(x, y): V(x, y) < r\}$ ограничено. На множестве $M_G = \{(x, y) \in G: V = 0\} = M$ система принимает вид $y' = -y$. Все условия теоремы Е выполнены. Нуль системы асимптотически устойчив, и множество D лежит в области притяжения.

В заключение выражаю благодарность заведующему кафедрой теоретической механики УрГУ профессору В.П. Прокопьеву и профессору этой же кафедры Ю.Ф. Долгому за внимание к работе.

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Л., 1950.

2. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. // ДАН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453.

3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
4. Ла Салль Ж.П. // Гидродинамическая неустойчивость. М., 1970.
5. Ла Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., 1964.
6. Булгаков Н.Г., Калитин Б.С. // Вести АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978. № 3. С. 32.
7. Булгаков Н.Г. // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24. № 9. С. 788.
8. Гайшун И.В., Княжище Л.Б. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 8. С. 1453.
9. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн., 1983.
10. Грудо Э.И. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 5. С. 782.
11. Булгаков Н.Г. // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 4. С. 301.
12. Булгаков Н.Г. // Деп. в ВИНТИ 19.01.1995. № 166-13-95. С. 6.
13. Булгаков Н.Г. // Деп. в ВИНТИ 30.07.1996. № 2570-B96. С. 24.
14. Булгаков Н.Г. Знакопостоянные функции в теории устойчивости. Мн., 1984. С. 78.
15. Княжище Л.Б. // Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982. № 3. С. 17.
16. Булгаков Н.Г. // Проблемы оптимального управления. Мн., 1981. С. 63.
17. Булгаков Н.Г. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 2. С. 87.
18. Kalitine B. // R.A.I.R.O. Automatique / Systems Analysis and Control. 1982. Vol. 16. № 3. P. 275.

Поступила в редакцию 04.09.2001.

Николай Григорьевич Булгаков – кандидат физико-математических наук.

УДК 538

Б.С. КАЛИТИН

РАВНОМЕРНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

In this paper, we initiate studies of property of uniformly integral continuity of solutions for non autonomous differential equations.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t), x \in G \subset R^n, t \geq 0, \quad (1)$$

где $f: G \times R^+ \rightarrow R^n$ – непрерывная функция, G – открытое связное подмножество евклидова пространства R^n . Предположим, что для любой пары $(x_0, t_0) \in G \times R^+$ существует единственное решение $\varphi(x_0, t_0, t)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0, t_0, t_0) = x_0$. Свойство единственности гарантируется, например, условием Липшица. Пусть $\|x\|$ означает какую-нибудь норму пространства R^n . Напомним, что функция $f(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица (или, точнее, равномерному условию Липшица) по x , если для любого компактного подмножества K из G существует число $L = L(K) > 0$ такое, что

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in K \text{ и } \forall t \geq 0. \quad (2)$$

При этом предположении решения обладают так называемым свойством интегральной непрерывности. А именно [1], пусть $]\alpha, \beta[$ – интервал определения решения $\varphi(x_0, t_0, t)$, содержащий t_0 . Тогда для любого замкнутого интервала $[a, b]$ из $]\alpha, \beta[$, для любых $T > 0$ ($[t_0, t_0 + T] \subset [a, b]$) и $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если $\|x_0 - y_0\| < \delta$, то решение $\varphi(y_0, t_0, t)$ определено на $[a, b]$, причем $\|\varphi(x_0, t_0, t) - \varphi(y_0, t_0, t)\| < \varepsilon$ для всех $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.