



**EUROPEJSKA UCZELNIA
W WARSZAWIE**

STUDIA I MATERIAŁY

Zeszyt 14 (lipiec-grudzień)

ISSN 2451-4519

OFICyna WYDAWNICZA EUROPEJSKIEJ UCZELNI

EUROPEJSKA UCZELNIA

W WARSZAWIE

STUDIA I MATERIAŁY

Zeszyt 14 (lipiec-grudzień)
ISSN 2451-4519

Warszawa 2017

Rada naukowa

Prof. dr hab. inż. Vladimir Golovko, EU
Prof. dr hab. inż. Alexandr Kalgin, EU,
Moskiewska Akademia Państwowa Gospodarki
Komunalnej i Budownictwa
Prof. Iwan Kozuch, Brzeski Uniwersytet
Państwowy im. Aleksandra Puszkina
Prof. dr hab. inż. Yury Pauliuchuk, UPH, EU
Prof. dr hab. inż. Józef Pawelec, EU
Prof. dr hab. Valery Taranchuk, Białoruski
Uniwersytet Państwowy
Dr hab. Czesław Bracha, EU
Dr hab. Aliaksandr Chychuryn, KUL, EU
Dr hab. Marek Greniewski, prof. EU
Dr hab. Mirosław Kurkowski, UKSW
Dr hab. Stanisław Łobejko, SGH
Dr Jerzy G. Isajew, EU
Dr Krzysztof Kosmowski, WIŁ, EU
Dr Krzysztof Słota, EU

Redaktor naczelny

Dr Jerzy G. Isajew
e-mail: oficyna@eu.edu.pl

Redaktor statystyczny

Mgr Rafał Frąk

Redaktor tematyczny

Dr Marcin Pryciak

Redaktorzy językowi

Dr Waldemar Pytel – język angielski
Mgr Anna Wawrzyniak – język rosyjski

Sekretarz redakcji

Dr inż. Krzysztof Słota
e-mail: oficyna@eu.edu.pl

© Copyright by Europejska Uczelnia w Warszawie
Warszawa 2017

Wszelkie prawa zastrzeżone. Każda reprodukcja oraz adaptacja całości lub części niniejszej publikacji, niezależnie od zastosowanej techniki reprodukcji (drukarskiej, fotograficznej, komputerowej i in.), wymaga pisemnej zgody Autorów i Wydawcy.

Redakcja zastrzega sobie prawo dokonywania w publikowanych tekstach skrótów i zmian. Wszystkie artykuły są recenzowane.

Wersja referencyjna czasopisma: papierowa. Numer dostępny w wersji elektronicznej na stronie:
<http://oficynawydawnicza.ewsie.edu.pl/>

Zatwierdzono do druku: 20 grudnia 2017 r.

Recenzenci

Prof. Iwan Kozuch, (Brzeski Uniwersytet
Państwowy)
Prof. dr hab. inż. Andrzej Lewiński (UTH
w Radomiu)
Prof. Sultanakhmed Ramazanov (Kijowski
Narodowy Uniwersytet Ekonomiczny)
Prof. Marek Suchański (WIŁ)
Dr hab. inż. Marcin Chrzan (UTH w Radomiu)
Dr Władysław Grygolec (EU)
Dr Robert Oktaba (UKSW)
Dr Lidia Stępień (Akademia im. Jana Długosza
w Częstochowie)

Redakcja techniczna i korekta

Mgr inż. Marta Piotrowska

Wydawca

Oficyna Wydawnicza EU
ul. Modlińska 51
03-199 Warszawa

Redakcja

ul. Modlińska 51
03-199 Warszawa
tel. 22 240 88 72
e-mail: oficyna@eu.edu.pl

Punktacja MNiSW – 4 punkty

Realizacja

na zlecenie Wydawcy B. B.-H. EXPERTUS SP. Z O.O.

Nakład: 400 egzemplarzy

Spis treści

Aleksandra Kalgina

Wpływ technologii informacyjnych na efektywność procesu edukacyjnego: problemy i rozwiązania.....1

Magdalena Jurczyk-Bunkowska, Jędrzej Wiczorkowski

Wyzwania wobec przedsiębiorstw wdrażających rozwiązania big data 13

Alexander Chichurin

Równanie różniczkowe Chazy'ego trzeciego rzędu z dokładnymi rozwiązaniami wyrażonymi przez funkcję eliptyczne29

Krzysztof Kosmowski

Wykorzystanie algorytmu HBRT na potrzeby wykrywania transmisji w sieciach bezprzewodowych47

Józef Pawelec

Internet Kognitywny. Detekcja Śladowych Emisji w Szumie Gaussowskim57

Ludmila Pilipchuk, Andrey Pilipchuk

Modelowanie procesów estymacji przepływów w sieciach 63

Valery Taranchuk

Zintegrowany kompleks komputerowy estymacji i adaptacji cyfrowych modeli geologicznych 73

Joanna Łukaszyk

Konsekwencje udostępnienia oprogramowania bez regulacji prawno-autorskich.....87

Contents

Aleksandra Kalgina

Influence of information technologies on efficiency of educational process: problems and solutions..... 1

Magdalena Jurczyk-Bunkowska, Jędrzej Wieczorkowski

Challenges for enterprises implementing big data solutions..... 13

Alexander Chichurin

Differential Equation Chazy of the Third Order with Exact Solutions Expressed via the Elliptic Functions 29

Krzysztof Kosmowski

The use of the HBRT algorithm for the detection of transmission in wireless networks 47

Józef Pawelec

Cognitive Internet. Trace Emission Detection in Gaussian Noise 57

Ludmila Pilipchuk, Andrey Pilipchuk

Modeling the flow estimation processes in networks 63

Valery Taranchuk

The integrated computer complex of an estimation and adapting of digital geological models 73

Joanna Łukaszyk

Consequences of making software available without legal regulation summary 87

Оглавление

Александра Кальгина

Влияние информационных технологий на эффективность учебного процесса: проблемы и пути решения 1

Магдалена Юрчик-Бунковска, Енджей Вечорковски

Внедрение новых решений для анализа больших данных (big data) — как вызов для предприятий 13

Александр Чичурин

Дифференциальное уравнение Шазы третьего порядка с точными решениями, выраженными через эллиптические функции..... 29

Кшиштоф Космовски

Использование алгоритма HBRT для нужд обнаружения передачи сигнала в беспроводных сетях 47

Юзеф Павелец

Когнитивный Интернет, обнаружение трассировки в гауссовском шуме..... 57

Людмила Пилипчук, Андрей Пилипчук

Моделирование процессов оценки потоков в сетях 63

Валерий Таранчук

Дифференциальное уравнение Шазы третьего порядка с точными решениями, выраженными через эллиптические функции 73

Джоанна Лукашик

Последствия совместного использования программного обеспечения без правового регулирования авторского права резюме 87

Моделирование процессов оценки потоков в сетях

Людмила Пилипчук, Андрей Пилипчук

Белорусский государственный университет
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Резюме. В статье обсуждаются разработанные эффективные алгоритмы определения рангов матриц независимых подсистем в задаче оценки потока на ненаблюдаемой части сети. Используются специальные методы и технологии разреженного численного анализа. Получены условия единственности решения разреженной системы линейных алгебраических уравнений для совокупности наблюдаемых узлов. Построены численные и символьные решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений для реальных сетей с использованием алгоритмов и технологий декомпозиции.

Ключевые слова: сеть, математическое моделирование, технологии декомпозиции, разреженная система, ранг, система компьютерной алгебры Mathematica

Tytuł: Modelowanie procesów estymacji przepływów w sieciach

Streszczenie. W artykule omówiono opracowane efektywne algorytmy wyznaczania rzędów macierzy niezależnych podsystemów w problemie estymacji przepływu potoku dla układu częściowo nieobserwowalnej sieci. Wykorzystane zostały specjalne metody i technologie rozrzedzonej analizy numerycznej. Uzyskano warunki dla jednoznaczności rozwiązania rozrzedzonego systemu układu równań liniowych dla zbioru obserwowanych węzłów. Zostały stworzone rozwiązania numeryczne i symboliczne rozrzedzonego układu liniowych równań algebraicznych dla sieci rzeczywistych z wykorzystaniem algorytmów i technologii dekompozycji.

Słowa kluczowe: sieć, modelowanie matematyczne, technologie dekompozycji, rozrzedzony system, rzędy, system algebry komputerowej Mathematica

Title: Modeling the flow estimation processes in networks

Abstract. In the article discusses the developed effective algorithms for determining the ranks of matrices of independent subsystems in the problem of estimating a flow on an unobserved part of the network. Special methods and technologies of sparse numerical analysis are used. Conditions for the uniqueness of the solution of a sparse system of linear algebraic equations for the set of observable nodes are obtained. Numerical and

symbolic solutions of sparse systems of linear algebraic equations for real networks using algorithms and decomposition technologies are constructed.

Keywords: network, mathematical modeling, decomposition technology, sparse system, rank, Mathematica computer algebra system

Введение

Математическое моделирование процессов оценки потоков в сетях содержит в себе потенциальную информацию, исследуя которую можно оценить потоки на ее ненаблюдаемых частях с использованием специальных методов разреженного численного анализа и аппарата теории графов. Наблюдение за потоками в больших графах (сетях) ведется лишь за малой его частью. Комбинаторные аспекты математического моделирования процессов оценки трафика для симметричного ориентированного графа рассмотрены в [1]. Методы декомпозиции потока [2], основанные на использовании структуры системы ограничений задачи, позволяют заменить решение одной задачи решением серии меньших задач и использовать современные технологии построения численных решений разреженных систем линейных алгебраических уравнений. Задача оптимального расположения датчиков в мультиграфах исследована в [3, 4]. Задача расположения минимального числа датчиков в узлах обобщенного графа приведена в [5]. В результате применения теории декомпозиции [6, 7] исследуемые системы могут быть представлены в виде независимых подсистем с различными типами разреженности. Для определения условий единственности решения специальной линейных алгебраических уравнений в настоящей работе разработаны эффективные алгоритмы определения рангов матриц независимых подсистем в задаче оценки трафика обобщенного мультиграфа с использованием специальных методов разреженного численного анализа. Условия единственности решения специальной системы линейных алгебраических уравнений означают, что совокупность узлов, включенных в множество наблюдаемых узлов является допустимой (может быть не оптимальной) для размещения сенсоров с целью оценки потоков на ее ненаблюдаемой части.

Оценка потоков на ненаблюдаемых частях сети

Рассмотрим задачу оптимального расположения сенсоров в узлах сети и преобразуем ее в задачу теории графов. Введем в рассмотрение конечный связный ориентированный граф $G=(I,U)$, где I – множество узлов, U – множество дуг. Множество дуг U определено на $I \times I$ ($|I| < \infty, |U| < \infty$). Предположим, что граф G является симметричным: если в графе G существует дуга $(i,j) \in U$, то существует и дуга $(j,i) \in U$. Это не означает, что граф является неориентированным. Потоки между двумя узлами, в общем случае, могут не совпадать. Введем подмножество I^* множества I и назовем узлы $i \in I^*$ узлами с переменной интенсивностью X_i . Введем функцию потока на дугах графа: $x: U \rightarrow R$.

Рассмотрим недоопределенную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j \in I_i^*(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i(U)} x_{ji} = \begin{cases} x_i, & i \in I^* \\ 0, & i \in I \setminus I^* \end{cases} \quad (1)$$

где $I_i^+(U) = \{j \in I : (i, j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j \in I : (j, i) \in U\}$, $I^* \neq \emptyset$. В зависимости от знака интенсивности x_i узел $i \in I^*$ будем называть истоком (интенсивность положительна) или стоком (интенсивность отрицательна). Система (1) совместна, поскольку является однородной системой алгебраических уравнений. Просуммируем уравнения системы (1). В результате получим, что для системы (1) выполняется условие $\sum x_i = 0$. Если множество $I^* \neq \emptyset$, то ранг матрицы системы (1) для связного графа $\bar{G}^{I^*}$ равен $|I|$ [2]. Чтобы в сети G собрать информацию о дуговых потоках $x_{ij}, (i, j) \in U$ и переменных интенсивностях x_i узлов $i \in I^*$ разместим в узлах сети сенсоры. Узлы сети G , в которых размещены сенсоры, назовем обозреваемыми узлами и обозначим множество обозреваемых узлов M , $M \subseteq I$.

- для каждого обозреваемого узла $i \in M$ известны значения дуговых потоков для всех входящих и исходящих дуг и переменные интенсивности x_i узлов $i \in M \cap I^*$:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= f_{ij}, j \in I_i^+(U), x_{ji} = f_{ji}, j \in I_i^-(U), i \in M; \\ x_i &= f_i, i \in M \cap I^*, \end{aligned} \quad (2)$$

где f_{ij}, f_{ji}, f_i – константы.

- каждой дуге $(i, j) \in U$, которая исходит из узла $i \in I$, поставим в соответствие действительное число $p_{ij} \in [0, 1]$, которое является долей общего потока $\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j}$, исходящего из узла i и проходящего по дуге (i, j) . Итак,

$$x_{ij} = p_{ij} \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}, \quad \sum_{j \in I_i^+(U)} p_{ij} = 1. \quad (3)$$

Следовательно, доля p_{ij} дугового потока x_{ij} дуги $(i, j) \in U$ равна:

$$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}}.$$

Зафиксируем узел $i \in I$ графа G . Если из узла i исходит более одной дуги, то рассмотрим любую дугу, исходящую из узла i с известным дуговым потоком $x_{ik} = f_{ik}$, например (i, k) . Для всех остальных дуг, исходящих из узла i , кроме дуги (i, k) , выразим дуговые потоки для каждой из них через известный дуговой поток x_{ik} дуги (i, k) , используя известные доли p_{ij} дуговых потоков x_{ij} следующим образом:

$$x_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{ik}} f_{ik}, \quad j \in I_i^+(U) \setminus \{k\} \quad (4)$$

Сформируем равенства (4) для каждого узла $i \in I$, для которого выполняется соотношение $|I_i^+(U)| \geq 2$. Подставим в систему (1) известные значения дуговых потоков для всех входящих и исходящих дуг и известные переменные интенсивности x_i узлов $i \in M \cap I^*$ (2), (4). Удалим из графа $G = (I, U)$ те дуги, для которых известны дуговые потоки (2), (4). Также удалим из графа G те узлы, которые входят в состав множеств M обозреваемых узлов. В результате имеем новый граф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$, который может быть несвязным, причем некоторые из компонент связности графа $\bar{G}$ могут не содержать узлов

с переменной интенсивностью. В результате, система (1) для нового графа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ примет вид:

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U})} x_{ji} = \begin{cases} x_i + b_i, & i \in \bar{I}^* \\ b_i, & i \in \bar{I} \setminus \bar{I}^* \end{cases} \quad (5)$$

где b_i – константы, $i \in \bar{I}$.

На основе нового графа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ составим систему дополнительных уравнений следующим образом. Если из узла $i \in \bar{I}$ графа $\bar{G}$ исходит более одной дуги, то выберем произвольную дугу, например (i, k) , исходящую из узла i с *неизвестным* дуговым потоком x_{ik} . Для всех остальных дуг, исходящих из узла i , кроме дуги (i, k) , выразим дуговые потоки для каждой из них через неизвестный дуговой поток x_{ik} дуги (i, k) , используя известные доли p_{ij} дуговых потоков x_{ij} следующим образом:

$$x_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{ik}} x_{ik} \quad (6)$$

для любой дуги (i, j) , $j \in I_i^+(\bar{U}) \setminus \{k\}$. Продолжим процесс формирования дополнительных уравнений вида (6) и пронумеруем их произвольным образом. Пусть p – номер уравнения во введенной нумерации, q – число сформированных дополнительных уравнений вида (6). Итак, имеем следующую систему дополнительных уравнений:

$$\sum_{(i,j) \in \bar{U}} \lambda_{ij}^p x_{ij} = 0, \quad p = \overline{1, q} \quad (7)$$

и элементы матрицы системы (7) определяются следующим образом:

$$\lambda_{ij}^p = 1, \quad \lambda_{iv_i}^p = -\frac{p_{ij}}{p_{iv_i}}, \quad \lambda_{mn}^p = 0, \quad (m, n) \in \bar{U} \setminus \{(i, j), (i, v_i)\}, \quad p = \overline{1, q}.$$

Проблема определения состава множества M обозреваемых узлов состоит в нахождении такого приемлемого (оптимального) расположения сенсоров в узлах сети, при котором система (5), (7) имеет единственное решение (наблюдаемая система).

- Если для множества M обозреваемых узлов графа G система (5), (7) имеет единственное решение, то это означает, что получена оценка потока на ненаблюдаемой части графа (сети) G . Для множества M обозреваемых узлов графа G дуговые потоки и переменные интенсивности определены единственным образом. Следовательно, дуговые потоки и переменные интенсивности узлов известны для ненаблюдаемой части сети (система полностью наблюдаема),
- Если для множества M обозреваемых узлов графа G система (5), (7) является недоопределенной системой линейных алгебраических уравнений, то она имеет бесконечное множество решений. Это означает, что заданное множество M обозреваемых узлов неприемлемо для оценки потока x на ненаблюдаемой части сети G .

Задача оптимального расположения сенсоров была формально описана в [8], где представлены две эвристики, дающие нижнюю и верхнюю границы значения решения. В [1] выполнен комбинаторный анализ проблемы, а также исследована ее вычислительная сложность с учетом различных частных случаев. Кроме этого в [1] представлены некоторые классы графов, для которых исследуемая проблема полиномиально разрешима. В [9] представлены новые эвристические алгоритмы и аппроксимации для задачи оптимального расположения сенсоров. Методы декомпозиции потока [2], основанные на использовании структуры системы ограничений задачи, позволяют заменить решение одной задачи решением серии меньших задач и использовать современные технологии построения численных решений разреженных систем линейных алгебраических уравнений.

Пример численного решения

Рассмотрим пример оптимального расположения сенсоров для связного конечного ориентированного симметричного графа G , представленного на рисунке 1, где $I^* = \{1, 3, 7\}$.

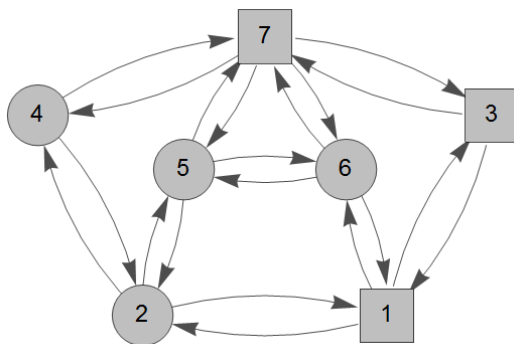


Рисунок 1. Конечный связный ориентированный симметричный граф

Источник: составлено автором

Рассмотрим задачу оценки потока на ненаблюдаемой части сети для конечного ориентированного связного симметричного графа, представленного на рисунке 1. Недоопределенная система линейных алгебраических уравнений вида (1), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 x_{12} + x_{13} + x_{16} - x_{21} - x_{31} - x_{61} &= x_1 \\
 x_{21} + x_{24} + x_{25} - x_{12} - x_{42} - x_{52} &= 0 \\
 x_{31} + x_{37} - x_{13} - x_{73} &= x_3 \\
 x_{42} + x_{47} - x_{24} - x_{74} &= 0 \\
 x_{52} + x_{56} + x_{57} - x_{25} - x_{65} - x_{75} &= 0 \\
 x_{61} + x_{65} + x_{67} - x_{16} - x_{56} - x_{76} &= 0 \\
 x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} - x_{37} - x_{47} - x_{57} - x_{67} &= x_7
 \end{aligned} \tag{8}$$

Значения долей $p_{ij}, (i, j) \in U$ дуговых потоков представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значения долей $p_{ij}, (i, j) \in U$ дуговых потоков

(i, j)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 6)	(2, 1)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 1)	(3, 7)	(4, 2)	(4, 7)
p_{ij}	1/4	1/2	1/4	1/3	1/3	1/3	1/5	4/5	1/2	1/2
(i, j)	(5, 2)	(5, 6)	(5, 7)	(6, 1)	(6, 5)	(6, 7)	(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)	(7, 6)
p_{ij}	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/4	1/4	1/4	1/4

Источник: составлено автором

Для сбора информации о дуговых потоках $x_{ij}, (i, j) \in U$ и переменных интенсивностях x_i узлов $i \in I^*$ в сети G (рисунок 1) разместим в обозреваемый узел 1 специальное программируемое устройство (сенсор), $M = \{1\}$. Получим следующую информацию: численные значения дуговых потоков для всех входящих и исходящих дуг для узлов множества $M = \{1\}$ и значения переменных интенсивностей узлов множества $M \cap I^* = \{1\}$.

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} = f_{1,2} = 1, \quad x_{2,1} = f_{2,1} = 1, \\
 x_{1,3} = f_{1,3} = 2, \quad x_{3,1} = f_{3,1} = 1, \\
 x_{1,6} = f_{1,6} = 1, \quad x_{6,1} = f_{6,1} = 1, \\
 x_1 = f_1 = 1.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Подставим значения (9) в систему уравнений (8). Удалим из графа G множество дуг, дуговые потоки на которых известны в соответствии с (9). Также, удалим из графа G узлы, входящие в состав множества M . Получим граф G' , который представлен на рисунке 2.

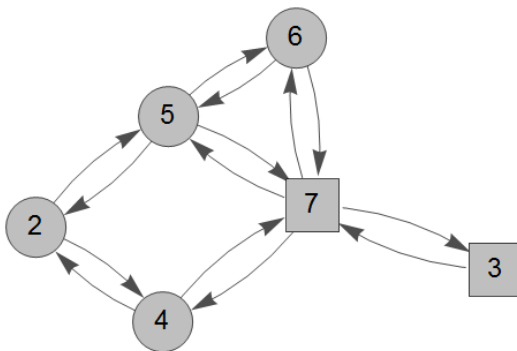


Рисунок 2. Граф G'

Источник: составлено автором

Оставшиеся дуговые потоки для дуг, исходящих из узлов множества $I(CC(M)) \setminus M = \{2, 3, 6\}$ могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned}
x_{24} &= \frac{p_{24}}{p_{21}} f_{21} = 1, \quad x_{25} = \frac{p_{25}}{p_{21}} f_{21} = 1, \\
x_{37} &= \frac{p_{37}}{p_{31}} f_{31} = 4, \\
x_{65} &= \frac{p_{65}}{p_{61}} f_{61} = 1, \quad x_{67} = \frac{p_{67}}{p_{61}} f_{61} = 1,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $CC(M)$ – разрез (комбинированный разрез) относительно множества M [2].

Удалим из графа G' дуги, для которых дуговые потоки известны в соответствии с (10).

В результате получим граф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ (рисунок 0).

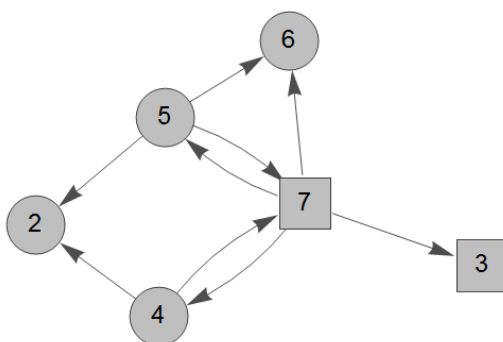


Рисунок 3. Граф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$

Источник: составлено автором

Для графа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$, изображенного на рисунке 3, представим систему вида (5), (7):

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
-x_{42} - x_{52} &= -2 \\
-x_{73} &= x_3 - 3 \\
x_{42} + x_{47} - x_{74} &= 1 \\
x_{52} + x_{56} + x_{57} - x_{75} &= 2 \\
-x_{56} - x_{76} &= -2 \\
x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} - x_{47} - x_{57} &= x_7 + 5
\end{aligned} \tag{11}$$

На основе нового графа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ (рисунок 3) составим систему дополнительных уравнений вида (6) следующим образом. Из узлов $i \in \{4, 5, 7\} \subset \bar{I}$ графа $\bar{G}$ исходит более одной дуги. Выберем произвольную дугу, например $(4, 2)$, исходящую из узла $i = 4$ с неизвестным дуговым потоком $x_{4,2}$. Для всех остальных дуг, кроме дуги $(4, 2)$, исходящих из узла $i = 4$, выразим дуговые потоки посредством неизвестного дугового потока $x_{4,2}$, используя известные доли потоков (таблица 1). Продолжим аналогичным образом процесс формирования системы дополнительных уравнений вида (6) для узлов

5 и 7 множества $\{5, 7\} \subset \bar{I}$ графа $\bar{G}$, представленного на рисунке 3. Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} x_{47} - \frac{p_{47}}{p_{42}} x_{42} &= x_{47} - x_{42} = 0, \\ x_{56} - \frac{p_{56}}{p_{52}} x_{52} &= x_{56} - x_{52} = 0, \\ x_{57} - \frac{p_{57}}{p_{52}} x_{52} &= x_{57} - x_{52} = 0, \\ x_{74} - \frac{p_{74}}{p_{73}} x_{73} &= x_{74} - x_{73} = 0, \\ x_{75} - \frac{p_{75}}{p_{73}} x_{73} &= x_{75} - x_{73} = 0, \\ x_{76} - \frac{p_{76}}{p_{73}} x_{73} &= x_{76} - x_{73} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Для множества $M = \{1\}$ обозреваемых узлов графа $\bar{G}$ (рисунок 3) система (11), (12) имеет единственное решение. В результате решения системы (11), (12) определены дуговые потоки и переменные интенсивности узлов для ненаблюдаемой части графа G .

Технологии декомпозиции системы

Определение единственности решения системы (5), (7) и непосредственно построение искомого единственного решения основано на применении технологии декомпозиции [2], результатов разреженного матричного анализа, теории графов и теории потоков в сетях. Для этого выполняется построение общего решения разреженной недоопределенной системы (5) для компонент связности графа $\bar{G}$, при этом, для каждой компоненты осуществляется построение решения независимой подсистемы с учетом типа разреженности и ее теоретико-графовых свойств. Определяется ранг специальной матрицы детерминантов [2], проверяется условие обратимости матрицы. В случае, если матрица обратима, строится единственное решение системы (5), (7). Построение разреженной системы (5) выполняется на основе применения технологии корневых деревьев. В статье выполняется построение численного (символьного) решения системы (5), (7) в случае его единственности.

- Построение *численного решения* осуществляется для фиксированного набора численных входных данных, определяющих доли дуговых потоков, потоки на наблюдаемых дугах и переменные интенсивности узлов $i \in M \cap I^*$.
- Построение *символьного решения* осуществляется для графа с фиксированной структурой для любого набора численных входных данных, определяющих потоки на наблюдаемых дугах и переменные интенсивности узлов $i \in M \cap I^*$. Таким образом, имеется возможность вычисления неизвестных дуговых потоков и переменных интенсивностей узлов на ненаблюдаемой части сети путем подстановки численных данных в аналитические выражения.

Основная вычислительная нагрузка относится к нахождению символьных определителей и обращению символьных матриц в *Wolfram Mathematica* при построении аналитического решения системы линейных алгебраических уравнений в случае его единственности. Примеры построения аналитических решений разреженных систем линейных алгебраических уравнений с использованием алгоритмов и технологий декомпозиции приведены в [2].

Реальные сети: численные и символьные решения

Для определения потоков на ненаблюдаемых дугах и определения переменных интенсивностей узлов построены численные и символьные решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений для реальных сетей с использованием алгоритмов и технологий декомпозиции. Вычисления проведены на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i3-3217U.

- Численное решение для входных данных реальной сети $G = (I, U)$ с характеристиками $|I| = 1024$, $|U| = 2115$, $|I^*| = 92$ получено за 1,353 секунды,
- Численное решение для входных данных реальной сети $G = (I, U)$ с характеристиками $|I| = 1586$, $|U| = 3230$, $|I^*| = 103$ получено за 5,976 секунд.

Для первоначального выбора комбинации расположения сенсоров в узлах графа вычисления выполняются в символьном виде. Время выполнения символьных вычислений, в отличие от численных, существенно увеличивается с ростом числа символов в выражениях, участвующих в операциях. Основная вычислительная нагрузка относится к нахождению символьных определителей и обращению символьных матриц.

Для улучшения временных характеристик применяется технологии декомпозиции [2], которые позволяют существенно расширить размерности решаемых задач.

- Символьное решение для входных данных реальной сети $G = (I, U)$ с характеристиками $|I| = 1024$, $|U| = 2115$, $|I^*| = 92$ получено за 29,5 секунд. 1 минуту 19 секунд,
- Для входных данных реальной сети $G = (I, U)$ с характеристиками $|I| = 1586$, $|U| = 3230$, $|I^*| = 103$ выполнены символьные вычисления. Для определения числа сенсоров с целью оценки дуговых потоков на ненаблюдаемой части сети требуемое время для символьных вычислений равно 50,5 секунд. Время построения допустимого символьного решения равно 3 минуты 20 секунд.

Результаты численных и символьных вычислений оценки потоков на ненаблюдаемых частях реальных сетей показали практическую применимость алгоритмов.

Выводы

Разработаны эффективные алгоритмы и технологии декомпозиции в задачах математического моделирования процессов оценки потоков для симметричного ориентированного графа. Получены условия единственности решения специальной системы линейных алгебраических уравнений в задаче оценки потока на ненаблюдаемой

части сети с использованием специальных методов разреженного численного анализа, аппарата теории графов и результатов теории потоков. Построены численные и символьные решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений для различных видов трафика. Результаты численных и символьных вычислений оценки потоков на ненаблюдаемых частях реальных сетей показали практическую применимость алгоритмов. Данный подход может использоваться для вычислений в параллельной среде.

Литература

- [1] Bianco L., Confessore G., Gentili M. *Combinatorial Aspects of the Sensor Location Problem* // Annals of Operation Research.– Vol. 144, № 1, 2006, pp. 201–234.
- [2] Pilipchuk L.A. *Sparse Linear Systems and Their Applications*. – Minsk: BSU, 2013. – 235 p.
- [3] Pilipchuk, L.A. Sensor Location Problem for a Multigraph / L.A. Pilipchuk, T.S. Vishnevetskaya, Y.H. Pesheva // *Mathematica Balkanica. New Series*. Vol. 27. – Fasc. 1–2. – 2013. – P. 65–75.
- [4] Pilipchuk, L.A. Optimal location of sensors on a multigraph with zero split ratios of some arc flows. / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk, Y.V. Ramanouski // *American Institute of Physics (AIP). AIP Conf. Proc.*, Vol. 1631. – 2014. – P. 350–353.
- [5] Пилипчук, А.С. Расположение минимального числа обзриваемых узлов в обобщенном графе для оценки трафика его ненаблюдаемой части / А.С. Пилипчук.– Вестник БГУ. Сер. 1. 2015. № 1. С. 108 – 111.
- [6] Pilipchuk, L.A. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk // *American Institute of Physics. AIP Conf. Proc.* Vol. 1690, 060006 (2015); doi: 10.1063/1.4936744. – 9 p.
- [7] Pilipchuk, L.A. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph / L.A. Pilipchuk, O.V. German, A.S. Pilipchuk // *Vestnik BSU. Ser. 1. No. 2*, 2015. p. 91–96.
- [8] Bianco L., Confessore G., Reverberi P. *A network based model for traffic sensor location with implication in O/D matrix estimates* // *Transportation Science*.– Vol. 35, № 1, 2001, pp. 50–60.
- [9] Confessore G., Dell’Olmo P., Gentili M. *Combinatorial Aspects of the Sensor Location Problem* // *Computers and Operations Research*.– Vol. 32, № 9, 2005, pp. 2383–2405.

Noty o autorach

Chichurin Alexander, dr hab., Katolicki Uniwersytet Lubelski w Lublinie, Europejska Uczelnia w Warszawie

Jurczyk-Bunkowska Magdalena, dr inż., Politechnika Opolska w Opolu

Kalgina Aleksandra, dr, Moskiewski Państwowy Instytut Stosunków Międzynarodowych, Rosja

Kosmowski Krzysztof, dr inż., Wojskowy Instytut Łączności, Europejska Uczelnia w Warszawie

Lukaszyk Joanna, dr, Europejska Uczelnia w Warszawie

Pawelec Józef, prof. dr hab. inż., Europejska Uczelnia w Warszawie, Wojskowy Instytut Łączności w Zegrzu Południowym

Pilipchuk Andrey, mgr, Białoruski Uniwersytet Państwowy, Białoruś

Pilipchuk Ludmila, dr, Białoruski Uniwersytet Państwowy, Białoruś

Taranchuk Valery, dr hab., Białoruski Uniwersytet Państwowy, Białoruś

Wieczorkowski Jędrzej, dr, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie