

Класс конечно представимых почти свободных асферических про- p -групп описывает следующая

Теорема. *Конечно представимая асферическая про- p -группа G содержит открытую свободную подгруппу в том и только в том случае, когда G изоморфна свободному про- p -произведению конечного числа конечных циклических p -групп и некоторой свободной про- p -группы конечного ранга.*

Доказательство данной теоремы сводится к применению некоторых технических результатов, связанных функтором сопряжения D_G , определенным ниже. Этот функтор последовательно применяется к известной последовательности модуля соотношений группы G .

Обозначим $\text{Mod}_L(G)$ и $\text{Mod}_R(G)$ категорию соответственно левых и правых проконечных конечно порожденных $F_p[[G]]$ -модулей.

Определение. Функтором сопряжения называется контравариантный функтор $D_G: \text{Mod}_L(G) \rightarrow \text{Mod}_R(G)$ такой, что модулю M ставится в соответствие сопряженный к нему (в смысле определения 1 § 4 главы II книги [2]) правый модуль $D_G(M) = \text{Hom}_G(M, F_p[[G]])$, снабженный компактно открытой топологией.

Доказательство теоремы основано на использовании следующих свойств функтора сопряжения.

Лемма 1. *Функтор сопряжения точен справа и аддитивен. Это вытекает из известных свойств функтора Hom .*

Лемма 2. *Пусть $H \leq G$, $|H| < \infty$. Тогда $D_G F_p[[G/H]] = F_p[[H/G]]$, причем образующему 1_H модуля $F_p[[H/G]]$ соответствует морфизм $\eta \in D_G(F_p[[G/H]])$, $\eta(1_H) = \sum_{h \in H} h$.*

Лемма 3. *Ограничение функтора $D_G^2: \text{Mod}_L(G) \rightarrow \text{Mod}_L(G)$ на полную подкатегорию конечно порожденных пермутационных G -модулей с конечными стабилизаторами изоморфно тождественному функтору данной подкатегории.*

Функтор сопряжения перестановочен с функтором Res ограничения действия на открытую подгруппу.

Лемма 4. *Пусть $H \leq G$, $[G:H] < \infty$. Тогда имеет место изоморфизм функторов $\text{Res}_H^G D_G$ и $D_H \text{Res}_H^G$ из категории $\text{Mod}_L(G)$ в категорию $\text{Mod}_R(H)$.*

1. Gildenhuys D., Lim C.-K. // Math. Z. 1972. Bd. 125. № 1. S. 233.

2. Бурбаки Н. Алгебра. Линейная и полилинейная алгебра. М., 1962.

Поступила в редакцию 18.10.2001.

Алексей Алексеевич Шишкевич — аспирант кафедры высшей алгебры. Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор О.В. Мельников.

УДК 519.2

Ю.В. МЕЛЕНЕЦ, Е.Н. ОРЛОВА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА БИНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

The problem of estimating parameters of Gaussian processes is considered.

Рассмотрим стационарный случайный процесс $\{U_t; t = 1, \dots, N\}$, который порождает бинарную случайную последовательность $\{X_t; t = 1, \dots, N\}$ таким образом:

$$P\{X_t = 1 | U_t\} = F_t(U_t), \quad (1)$$

$$P\{X_t = 0 | U_t\} = 1 - F_t(U_t), \quad (2)$$

где $F_t: K \rightarrow [0, 1]$ и $F_t(U_t)$ – монотонно неубывающие функции.

Пусть случайные величины $\{U_t; t = \overline{1, N}\}$ независимы и распределены при каждом t по гауссовскому закону с параметрами μ и σ^2 , а $F_t(\cdot)$ – функция распределения нормального закона с параметрами a_t и b , которые известны.

Задача состоит в том, чтобы выяснить условия, при которых методом максимального правдоподобия можно оценить параметры μ и σ и построить эти оценки.

Введем в рассмотрение множества $C(0) =]-\infty, 0[$ и $C(1) = [0, +\infty[$. Для построения функции правдоподобия воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1 [1]. Пусть бинарная последовательность $\{X_t; t = \overline{1, N}\}$ порождена случайным процессом $\{U_t; t = \overline{1, N}\}$ при помощи соотношений (1) и (2), $\{Y_t; t = \overline{1, N}\}$ – последовательность попарно независимых случайных величин с функциями распределения $F_t(\cdot)$, и для любых $t = \overline{1, N}$ и $\tau = \overline{1, N}$ случайные величины Y_t и X_τ независимы. Тогда для любого набора чисел $\{x_t; x_t \in \{0, 1\}; t = \overline{1, N}\}$ справедливо:

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_N = x_N\} = P\{V_1 \in C(x_1), V_2 \in C(x_2), \dots, V_N \in C(x_N)\},$$

где $V_t = U_t - Y_t$.

Очевидно, что $\{V_t; t = \overline{1, N}\}$ – последовательность независимых случайных величин, распределенных при каждом t по нормальному закону с параметрами $\mu - a_t$, $\sqrt{b^2 + \sigma^2}$. Случайные величины $\{X_t; t = \overline{1, N}\}$ также независимы и имеют распределение

$$P\{X_t = x_t\} = p_t^{x_t} (1 - p_t)^{1-x_t},$$

где $p_t = P\{V_t \in C(1)\} = P\{V_t \geq 0\} = 1 - \Phi\left(\frac{a_t - \mu}{\sqrt{b^2 + \sigma^2}}\right)$, а $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Тогда логарифм функции правдоподобия $l(\mu, \sigma)$ оцениваемых параметров μ и σ имеет вид

$$l(\mu, \sigma) = \sum_{t=1}^N (x_t \ln(1 - \Phi(z_t)) + (1 - x_t) \ln \Phi(z_t)), \quad (3)$$

где $z_t = \frac{a_t - \mu}{\sqrt{b^2 + \sigma^2}}$.

Исследуя функционал (3) на максимум, приходим к равенствам:

$$\frac{dl(\mu, \sigma)}{d\mu} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \sigma^2}} \sum_{t=1}^N \left(\frac{x_t}{1 - \Phi(z_t)} - \frac{1 - x_t}{\Phi(z_t)} \right) \phi(z_t),$$

$$\begin{aligned}
\frac{dl(\mu, \sigma)}{d\sigma} &= \frac{\sigma}{b^2 + \sigma^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{1 - \Phi(z_i)} - \frac{1 - x_i}{\Phi(z_i)} \right) z_i \cdot \varphi(z_i), \\
\frac{d^2l(\mu, \sigma)}{d\mu^2} &= -\frac{1}{b^2 + \sigma^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{1 - \Phi(z_i)} - \frac{1 - x_i}{\Phi(z_i)} \right) z_i \cdot \varphi(z_i) - \\
&\quad - \frac{1}{b^2 + \sigma^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{1 - \Phi(z_i)} + \frac{1 - x_i}{\Phi(z_i)} \right) \varphi(z_i), \\
\frac{d^2l(\mu, \sigma)}{d\mu d\sigma} &= -\frac{\sigma}{\sqrt{(b^2 + \sigma^2)^3}} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{(1 - \Phi(z_i))^2} + \frac{1 - x_i}{\Phi^2(z_i)} \right) z_i \cdot \varphi^2(z_i) + \\
&\quad + \frac{\sigma}{\sqrt{(b^2 + \sigma^2)^3}} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{1 - \Phi(z_i)} - \frac{1 - x_i}{\Phi(z_i)} \right) (z_i^2 - 1) \varphi(z_i), \\
\frac{d^2l(\mu, \sigma)}{d\sigma^2} &= -\frac{\sigma^2}{(b^2 + \sigma^2)^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{(1 - \Phi(z_i))^2} + \frac{1 - x_i}{\Phi^2(z_i)} \right) z_i^2 \cdot \varphi^2(z_i) + \\
&\quad + \frac{1}{(b^2 + \sigma^2)^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{1 - \Phi(z_i)} - \frac{1 - x_i}{\Phi^2(z_i)} \right) (\sigma^2 z_i + b^2 - 2\sigma^2) z_i \cdot \varphi^2(z_i),
\end{aligned}$$

где $\varphi(z) = \Phi'(z)$ – функция плотности распределения вероятности стандартного нормального закона.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 2. Если для любого значения t ($t = \overline{1, N}$) $a_t = a = \text{const}$, то каждая точка (a, σ) линии

$$\frac{\mu - a}{\sqrt{b^2 + \sigma^2}} = \Phi^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)$$

является стационарной точкой.

Доказательство. При $a_t \equiv a = \text{const}$ система уравнений

$$\begin{cases} \frac{dl(\mu, \sigma)}{d\mu} = 0, \\ \frac{dl(\mu, \sigma)}{d\sigma} = 0 \end{cases}$$

вырождается в одно уравнение

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{1 - \Phi(z_i)} - \frac{1 - x_i}{\Phi(z_i)} \right) = 0,$$

которое приводится к виду

$$\Phi \left(\frac{\mu - a}{\sqrt{b^2 + \sigma^2}} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если параметры $\{a_t; t = \overline{1, N}\}$ являются постоянными величинами, то не существует единственной оценки максимального правдоподобия $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ параметров (μ, σ) .

Лемма 3. Для любых значений параметров μ и σ справедливы неравенства

$$\frac{d^2 l(\mu, \sigma)}{d\mu^2} < 0, \quad \frac{d^2 l(\mu, \sigma)}{d\sigma^2} < 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 l(\mu, \sigma)}{d\mu^2} \frac{d^2 l(\mu, \sigma)}{d\sigma^2} - \left(\frac{dl(\mu, \sigma)}{d\mu d\sigma} \right)^2 < 0. \quad (5)$$

Доказательство неравенств (4), (5) проводится непосредственными выкладками. Для доказательства неравенства (5) используется неравенство Коши – Буняковского для рядов.

Будем предполагать, не ограничивая общности, что значения параметров $\{a_t; t = \overline{1, N}\}$ упорядочены по неубыванию, т. е.

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{N-1} \leq a_N,$$

причем не существует такого значения $a = \text{const}$, что $\sum_{t=1}^N (a_t - a)^2 = 0$.

Теорема. Функция $l(\mu, \sigma)$, определенная соотношением (3), имеет единственный максимум тогда и только тогда, когда

$$\sum_{t=1}^N a_t \sum_{t=1}^N x_t > N \sum_{t=1}^N a_t x_t.$$

Доказательство необходимости проводится с использованием следующего неравенства [2]:

$$\sum_{t=1}^M s_t \sum_{t=1}^M r_t > M \sum_{t=1}^M s_t r_t, \quad (6)$$

которое выполняется при всех $s_1 < s_2 \leq \dots \leq s_M$ и $r_1 < r_2 \leq \dots \leq r_M$. Неравенство (6) является противоположным, если в одной из последовательностей $\{s_t; t = \overline{1, M}\}$ или $\{r_t; t = \overline{1, M}\}$ неравенства противоположны. Доказательство достаточности проводится методом от противного.

1. Keenan D. // Journal of the ISA. 1982. № 77. P. 816.

2. Харди Г. Неравенства. М., 1956.

Поступила в редакцию 20.02.2002.

Юрий Викторович Меленец – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики.

Елена Николаевна Орлова – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования и анализа данных.