Теорема 3. Решение $\varphi(t;\ \alpha,\ v_0)$ будет решением краевой задачи (5), (11) тогда и только тогда, когда $\Psi(v_0,\ w_0)=0$, где $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $w_0 = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha A} x_0 \\ e^{-2\alpha B} y_0 \end{pmatrix}$.

Теорема 4. Решение $\varphi(t:\ \alpha,\ v_0)$ будет решением краевой задачи (5), (14) тогда и только тогда, когда v_0 будет решением линейной однородной алгебраической системы $(\Lambda_1+\Lambda_2 F(\alpha))v_0=0$, где $F(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha A} & 0 \\ 0 & e^{-2\alpha B} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим систему

$$x = P(t)x,\ \ t \in R,\ \ x \in R^n \tag{15}$$

с отражающей матрицей $F(t)$. Известно, что если система

$$y = Q(t)y \tag{16}$$

получена из системы (15) с помощью преобразования $y=S(t)x$, $\det S(t) \neq 0$, то отражающая матрица $\Phi(t)$ системы (16) имеет вид $\Phi(t)=S(-t)F(t)S^{-1}(t)$.

Теорема 5. Из разрешимости краевой задачи (15), (11) следует разрешимость краевой задачи для системы (16) с условием $\Psi(y(\alpha),\ y(-\alpha))=0$, где $y(\alpha)=x(\alpha)$, $y(-\alpha)=x(-\alpha)$.

Действительно, так как $y(-\alpha)=\Phi(\alpha)y(\alpha)=S(-\alpha)F(\alpha)S^{-1}(\alpha)x(\alpha)=F(\alpha)x(\alpha)$, то все сводится к разрешимости системы (12).

1. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.
2. Мироненко В.И. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 1. С. 36.
3. Альсевич Л.А. // Там же. № 3. С. 69.
4. Альсевич Л.А. // Там же. 1982. № 3. С. 50.
5. Альсевич Л.А. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 27. № 1. С. 5.
6. Мироненко В.И. // Там же. 1996. Т. 32. № 6. С. 774.

Поступила в редакцию 05.04.2001.

Лариса Алексеевна Альсевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.

УДК 517.977

Ж.М. КРАВЧЕНКО

ГАРАНТИРОВАННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРАТКОСРОЧНЫХ ПРОГНОЗОВ ВОЗМУЩЕНИЙ

A problem guaranteed optimal control with short-term forecast of perturbations is considered. Method of building of approximate solution by means of big quantity of vectors of auxiliary set Q is described.

1. Пусть $T=[t_*,\ t^*]$, $h=(t^*-t_*)/N$, $t_*<t^*<\infty$. Функция $u=u(t)$, $t\in T$, – дискретное управление, если $u(t)=u(t_*+kh)$, $t\in[t_*+kh,\ t_*+(k+1)h[$, $k=\overline{0,N-1}$.

В классе дискретных управлений рассмотрим задачу

$$c'x(t^*) \to \max,$$

$$x = A(t)x + b(t)u + d(t)w;\ x(t_*) = x_0;\ x(t^*) \in X^* = \{x \in \mathrm{R}^n\!: Hx \le g\}; \tag{1}$$

$$w(t) \in W=\{w \in \mathrm{R}\!: |w| \le w^*\};\ u(t) \in U=\{u \in \mathrm{R}\!: |u| < 1\},\ t \in T.$$

Здесь $x=x(t)\in R^n$, $u=u(t)$, $w=w(t)\in R$; $A(t)\in R^{n\times n}$, $b(t)$, $d(t)\in R^n$, $t\in T$, – кусочно-непрерывные функции; $H\in R^{m\times n}$, $g\in R^m$.

Предполагается аналогично [1], что: 1) в процессе управления могут реализоваться любые кусочно-непрерывные функции $w(t)\in W$, $t\in T$; 2) в каждый момент замыкания t^i из

$$T^p=\{t^i\in T_h=\{t_*,\ t_*+h,\ \dots,\ t^*-h\},\ i=\overline{0,p}\},\ t_*=t^0<t^1<\dots<t^p<t^*, \quad (2)$$

сообщается возмущение $w^*(\cdot)=(w^*(t)\in W,\ t\in T^{(i)}=[t^i,\ t^{i+1}[)$.

Требуется построить управление, которое с гарантией переводит систему (1) на терминальное множество и обеспечивает максимум гарантированному значению критерия качества.

Положим $t^{p+1}=t^*$, $X^{p+1}=X^*$. Построим по (2) множества

$$X^p,\ X^{p-1},\ \dots,\ X^1,\ X^0. \quad (3)$$

Множество X^i построим по множеству X^{i+1}: $z\in X^i$ в том и только в том случае, когда для каждого возможного возмущения $w_i(\cdot)$ найдется такое доступное управление $u_i(\cdot)=(u(t\,|\,t^i,\ z,\ w_i(\cdot))\in U,\ t\in T^{(i)})$, что траектория системы (1), соответствующая начальному условию $x(t^i)=z$, возмущению $w_i(\cdot)$, управлению $u_i(\cdot)$, попадает в момент t^{i+1} на X^{i+1}.

Задача (1) имеет допустимые программные управления $u(\cdot)=(u_i(t\,|\,w_i(\cdot))$, $t\in T^{(i)}$, $i=\overline{0,p}$) тогда и только тогда, когда $x_0\in X^0\neq\varnothing$.

Чтобы определить оптимальное априорное решение задачи (1), используя моменты (2), по аналогии с (3) введем множества $X^{i,\,\alpha}$, $i=\overline{p,\ 0}$, начиная с

$$X^{p+1,\,\alpha}=X^*\bigcap\{x\in R^n\colon c'x\geq\alpha\}.$$

Максимальное значение α^0, при котором $x_0\in\partial X^{0,\,\alpha^0}$ (∂X – граница множества X), назовем оптимальным априорным гарантированным значением критерия качества задачи (1). Ему соответствует оптимальное априорное управление $u^0(\cdot)=(u_i^0(\cdot),\ t\in T^{(i)},\ i=\overline{0,\ p})$, которое доставляет критерию качества задачи (1) значение α^0 при реализации наихудшего возмущения $w^0(t)$, $t\in T$.

2. В терминах множеств

$$X_w(z)=\{x\in R^n\colon\ x=F(t^{i+1})F^{-1}(t^i)z+$$

$$+\int_{t^i}^{t^{i+1}}F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)d(\tau)w(\tau)d\tau,\ w_i(t)\in W,\ t\in T^{(i)}\},$$

$$X_u=\{x\in R^n\colon x=y-\int_{t^i}^{t^{i+1}}F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau,\ u(t)\in U,\ t\in T^{(i)},\ y\in X^{i+1}\},$$

условие $z\in X^{i,\,\alpha}$ принимает вид

$$X_w(z)\subset X_u. \quad (4)$$

Известно, что включение (4) справедливо тогда и только тогда, когда выполняется условие: $\max\limits_{x\in X_w(z)}q'x\leq\max\limits_{x\in X_u}q'x$, $\forall q\in Q=\{q\in R^n\colon\|q\|=1\}$.

Запишем это условие в следующей форме:

$$q'F(t^{i+1})F^{-1}(t^i)z+\max_{w_i(\cdot)}q'\int_{t^i}^{t^{i+1}}F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)d(\tau)w(\tau)d\tau\leq$$

$$< \max_{y \in X^{i+1,\alpha}} q'y - \min_{u_i(\cdot)} q' \int_{t^i}^{t^{i+1}} F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau .$$

Обозначим:

$$h_i'(q) = q\,F(t^{i+1})F^{-1}(t^i)\,;\ \gamma^{i,\,\alpha}(q) = \max_{y \in X^{i+1,\alpha}} q'y - \beta_i\,, \qquad (5)$$

где

$$\beta_i = \min_{u_i(\cdot)} q' \int_{t^i}^{t^{i+1}} F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau + \max_{w_i(\cdot)} q' \int_{t^i}^{t^{i+1}} F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)d(\tau)w(\tau)d\tau =$$

$$= -\int_{t^i}^{t^{i+1}} \left| q'F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)b(\tau) \right| d\tau + w^* \int_{t^i}^{t^{i+1}} \left| q'F(t^{i+1})F^{-1}(\tau)d(\tau) \right| d\tau .$$

Тогда

$$X^{i,\,\alpha} = \{ z \in \mathrm{R} : h_i'(q)z \le \gamma^{i,\,\alpha}(q),\ \forall q \in Q \},\ i = \overline{p, 0} . \qquad (6)$$

3. Для конструктивного решения исходной задачи рассмотрим естественные аппроксимации множеств (6). Введем конечную систему векторов $Q_l = \{ q_j \in \mathrm{R}^n : \|q_j\| = 1,\ j = \overline{1, l} \}$ и построим аппроксимацию множества $X^{p,\,\alpha} : \bar{X}^{p,\,\alpha} = \{ h_p'(q)z \le \bar{\gamma}^{p,\,\alpha}(q),\ q \in Q_l \}$, где $h_p'(q)$, $\bar{\gamma}^{p,\,\alpha}(q) = \gamma^{p,\,\alpha}(q)$ рассчитываются по формулам (5).

По множеству $\bar{X}^{p,\alpha}$ построим $X^{p-1,\,\alpha} : \bar{X}^{p-1,\,\alpha} = \{ h_{p-1}'(q)z \le \bar{\gamma}^{p-1,\,\alpha}(q)$, $q \in Q_l \}$, где $\bar{\gamma}^{p-1,\,\alpha}(q) = \max_{y \in \bar{X}^{p,\,\alpha}} q'y - \beta_{p-1}$. Продолжая процесс, построим множества $\bar{X}^{i,\,\alpha} = \{ h_i'(q)z \le \bar{\gamma}^{i,\,\alpha}(q),\ q \in Q_l \}$, $i = \overline{p-2, 0}$.

По $\bar{X}^{i,\,\alpha}$, $i = \overline{p, 0}$, методом дихотомии вычислим $\bar{\alpha}^0$ как максимальное α, при котором выполняется:

$$x_0 \in \partial \bar{X}^{0,\,\bar{\alpha}^0} . \qquad (7)$$

Вектор $q_{j^0} \in Q_l$, для которого $h_0'(q_{j^0})x_0 = \gamma^{0,\,\bar{\alpha}^0}(q_{j^0})$, назовем активным.

Зная $\gamma^{0,\,\bar{\alpha}^0}(q_{j^0})$, построим x_1^*, $\bar{u}_0^{\,0}(\cdot)$, $\bar{w}_0^{\,0}(\cdot)$, удовлетворяющие соответственно условиям:

$$q_{j^0}' x_1^* = \max q_{j^0}' y,\ h_1'(q)y \le \bar{\gamma}^{1,\,\bar{\alpha}^0}(q),\ q \in Q_l ;$$

$$q_{j^0}' \int_{t^0}^{t^1} F(t^1)F^{-1}(\tau)b(\tau)\bar{u}_0^{\,0}(\tau)d\tau = \max_{u_0(\cdot)} q_{j^0}' \int_{t^0}^{t^1} F(t^1)F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau ;$$

$$q_{j^0}' \int_{t^0}^{t^1} F(t^1)F^{-1}(\tau)d(\tau)\bar{w}_0^{\,0}(\tau)d\tau = \max_{w_0(\cdot)} q_{j^0}' \int_{t^0}^{t^1} F(t^1)F^{-1}(\tau)d(\tau)w(\tau)d\tau .$$

Точку $\bar{x}_{j^0}^0$, вычисленную по формуле:

$$\bar{x}_{j^0}^0 = F(t^0)F^{-1}(t^1)\, x_1^* - \int_{t^0}^{t^1} F(t^0)F^{-1}(\tau)b(\tau)\bar{u}_0^{\,0}(\tau)d\tau - \int_{t^0}^{t^1} F(t^0)F^{-1}(\tau)d(\tau)\bar{w}_0^{\,0}(\tau)d\tau ,$$

назовем активной точкой множества $\bar{X}^{0,\,\bar{\alpha}^0}$ по вектору q_{j^0}. Активная точка обладает следующим свойством: $\bar{x}_{j^0}^0 \in \partial X^{0,\bar{\alpha}^0} \wedge \bar{x}_{j^0}^0 \in \partial \bar{X}^{0,\,\bar{\alpha}^0}$, т. е. $\bar{x}_{j^0}^0$ принадлежит как множеству $X^{0,\,\bar{\alpha}^0}$, так и его аппроксимации – множеству

$\bar{X}^{0,\,\alpha^0}$, точнее, принадлежит j^0-й грани $X^{0,\,\alpha^0}$. Заметим, что начальная точка x_0, удовлетворяющая условию (7), необязательно принадлежит $X^{0,\,\alpha^0}$. Поэтому точность и правдоподобность вычислений функций $\bar{u}_0{}^0(\cdot)$ и $\bar{w}_0{}^0(\cdot)$ зависит от расстояния между начальнои и активной точками: ε$=\left|x_0-\bar{x}_{j^0}^0\right|$.

По состоянию x_1^* найдем векторы $q_{j_k^1}$, $x_{2,\,k}^*$ и функции $\bar{u}_{1,\,k}{}^0(\cdot)$, $\bar{w}_{1,\,k}{}^0(\cdot)$, $k=\overline{1,\ n}$, из условий:

$$h_1'(q_{j_k^1})x_1^*=\bar{\gamma}^{1,\,\bar{\alpha}^0}(q_{j_k^1});$$

$$q_{j_k^1}'x_{2,\ k}^*=\max q_{j_k^1}'\,y,\ h_2'(q)y\le\bar{\gamma}^{2,\,\alpha^0}(q),\ q\in Q_l;$$

$$q_{j_k^1}'\int_{t^1}^{t^2}F(t^2)F^{-1}(\tau)b(\tau)\bar{u}_{1,\ k}^0(\tau)d\tau=\min_{u_1(\cdot)}q_{j_k^1}'\int_{t^1}^{t^2}F(t^2)F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau;$$

$$q_{j_k^1}'\int_{t^1}^{t^2}F(t^2)F^{-1}(\tau)d(\tau)\bar{w}_{1,\ k}{}^0(\tau)d\tau=\max_{w_1(\cdot)}q_{j_k^1}'\int_{t^1}^{t^2}F(t^2)F^{-1}(\tau)d(\tau)w(\tau)d\tau.$$

Построим активные точки $\bar{x}_{j_k^1}^1$, $k=\overline{1,\ n}$, множества $\bar{X}^{1,\,\alpha^0}$ по векторам $q_{j_k^1}$ следующим образом:

$$\bar{x}_{j_k^1}^1=F(t^1)F^{-1}(t^2)\ x_{2,\ k}^*-\int_{t^1}^{t^2}F(t^1)F^{-1}(\tau)b(\tau)\bar{u}_{1,\,k}^0(\tau)d\tau-$$

$$-\int_{t^1}^{t^2}F(t^1)F^{-1}(\tau)d(\tau)\bar{w}_{1,\,k}^0(\tau)d\tau,\ \ k=\overline{1,\ n}.$$

Найдем индекс k^*: $\left|x_1^*-\bar{x}_{j_{k^*}^1}^1\right|=\min\limits_{k=\overline{1,\ n}}\left|x_1^*-\bar{x}_{j_{k^*}^1}^1\right|$. Тогда $q_{j^1}=q_{j_{k^*}^1}$, $x_2^*=x_{2,\,k^*}^*$, $\bar{u}_1{}^0(\cdot)=\bar{u}_{1,\,k^*}^0(\cdot)$, $\bar{w}_1{}^0(\cdot)=\bar{w}_{1,\,k^*}^0(\cdot)$.

Далее действуем по аналогии.

Построенные таким образом функции $\bar{u}^0(\cdot)=(\bar{u}_i{}^0(\cdot),\ i=\overline{0,\ p})$, $\bar{w}^0(\cdot)=$ $=(\bar{w}_i{}^0(\cdot),\ i=\overline{0,\ p})$ назовем априорно экстремальным управлением и априорно наихудшим возмущением, векторы x_0, x_1^*, …, x_{l+1}^* – экстремальными точками. Функцию $\bar{u}^0(\cdot)$ принимаем за приближенное решение задачи (1). Это решение будет тем ближе к оптимальному априорному управлению $u^0(\cdot)$, чем больше l.

Другой метод решения задачи (1) путем коррекции приближенного решения, построенного для небольшого значения l, будет изложен в следующей работе.

4. В качестве примера рассмотрим задачу управления осциллятором, на который действует ограниченное возмущение. Требуется в момент времени t^*=2,2π с гарантией перевести осциллятор из начального состояния $x_1(0)$=–4, $x_2(0)$=2,5 в положение x_1(2,2π)=0, обеспечив минимальную по модулю скорость.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$|x_2(2,2\pi)|\to\min,\ \dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=-x_1+u+w, \tag{8}$$

$$x_1(0)=-4,\ x_2(0)=2{,}5,\ \ x_1(2{,}2\pi)=0,$$
$$w(t)\in W=\{w\in \mathrm{R}\colon |w|\le 0{,}5\};\ u(t)\in U=\{u\in \mathrm{R}\colon |u|\le 1\},\ t\in T=[0;\ 2{,}2\pi].$$

При решении задачи использовалась ее эквивалентная форма:

$$\alpha\to\min,\ \dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=-x_1+u+w,$$
$$x_1(0)=-4,\ x_2(0)=2{,}5,$$
$$x_1(2{,}2\pi)=0,\ -\alpha\le x_2(2{,}2\pi)\le\alpha,\ w(t)\in W;\ u(t)\in U,\ t\in T.$$

В классе дискретных функций был выбран период квантования $h=2{,}2\pi/120$.

Векторы из Q строились по формулам:

$$q_1=(0,\ 1),\ q_j=(q_{1j-1}\cos\,(2\pi/l)+q_{2j-1}\sin\,(2\pi/l),$$
$$-q_{1j-1}\sin\,(2\pi/l)+q_{2j-1}\times\cos\,(2\pi/l)),\quad j=\overline{2,\ l}.$$

В таблице приведены результаты вычислений оптимального априорного гарантированного значения критерия качества $\overline{\alpha}^0$ для различных p и l.

p	l			
	16	32	64	128
1	3,23315345	3,27689223	3,29749369	3,30215274
2	3,19954998	3,25023558	3,29515204	3,30193205
3	3,02241951	3,25398196	3,29271857	3,30266266
4	2,94100705	3,28709181	3,29165285	3,30173364
5	3,15461558	3,25158448	3,28670580	3,30123858

На рис. 1 изображены множества замыкания, экстремальные точки и экстремальная траектория, полученная под действием управления $\overline{u}^0(\cdot)$ и возмущения $\overline{w}^0(\cdot)$. На рис. 2 показаны терминальные состояния $x(t^*)$-системы для различных l (точка A соответствует l=8, B–l=16, C–l=64, D–l=128).

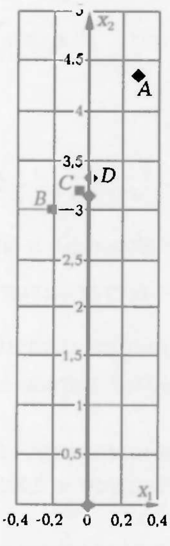

Рис. 1. Результаты решения задачи (8) для l=128, p=1

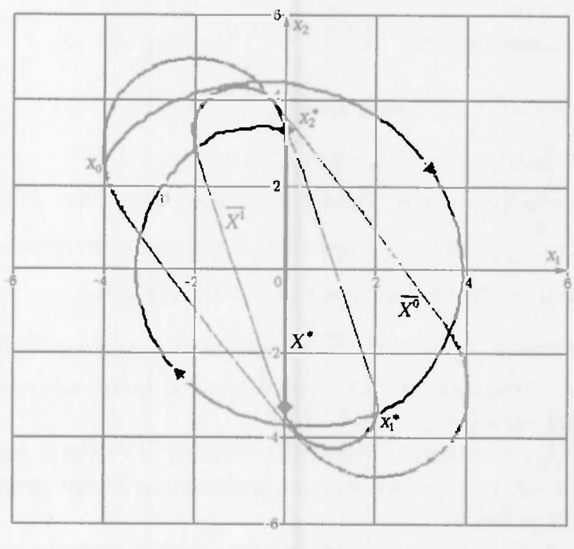

Рис. 2. Сравнение результатов задачи (8) при различных значениях l

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А. // Автоматика и телемеханика. 1996. № 7. С. 121; № 8. С. 90.

Поступила в редакцию 20.02.2001.

Жанна Михайловна Кравченко – аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Р. Габасов.