

из которых предельным переходом убеждаемся в том, что $v \in E^{\infty}$. так как уже $v \in E^{m-1}$. Используя этот факт, неравенства (7), (10) и (11) и лемму Гронуолла, можно вывести неравенства

$$c_9 \|u\|_m^2 \leq \sum_{k=1}^m \left\| \overline{L_k^{(1,m)} u} \right\|_{1,m}^2 \quad \forall u \in E^m, \quad c_9 > 0,$$

которые означают, что решение $u \in E^m$. Попутно индукцией по m находим, что

$$u = \overline{L_m}^{-1} \mathcal{S} = \overline{M_1}^{-1} \cdots \overline{M_m}^{-1} \mathcal{S} \in E^m \quad \forall \mathcal{S} \in F^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Замечание. Тем же способом утверждение теоремы 1 (возможно, с большими $c_0(m)$) и методом продолжения по параметру утверждение теоремы 2 распространяются на уравнения с младшими частями

$$\mathcal{L}_m(t)u + \sum_{k=0}^{2m-1} B_k(t) \frac{d^k u}{dt^k} = f, \quad t \in]0, T[, \quad m = 1, 2, \dots,$$

если $B_k(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(W^{2m-1-k}(t), H))$, $0 < k \leq 2m-1$.

1. Радыно Я.В., Юрчук Н.И. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 2. С. 331.
2. Ломовцев Ф.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 1. С. 34.
3. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 873.

Поступила в редакцию 05.02.2001.

Федор Егорович Ломовцев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений математической физики.

УДК 517.926.4

Л.А. АЛЬСЕВИЧ

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНЫМИ ОТРАЖАЮЩИМИ МАТРИЦАМИ

A class of linear differential systems with reflecting matrices of block-diagonal structure is formed and investigated by the Mironenko's method of the reflecting function. Two points boundary-value problems are investigated for the above class of systems. The necessary and sufficient conditions are given for the existence of solutions of mentioned problems.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \in R, \quad x \in R^{2n}, \quad (1)$$

где $P(t)$ – непрерывная матрица.

Известно [1, с. 30], что отражающая функция системы (1) является линейной, т. е. имеет вид $F(t)x$, где $F(t)$ – отражающая матрица данной системы. Известно также [2, 3], что существуют линейные дифференциальные системы вида (1) с распадающимися отображениями за период. В частности, этот случай имеет место, когда отражающая матрица системы является блочно-диагональной.

Лемма. Для существования у системы (1) отражающей матрицы $F(t)$ вида

$$F(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) & 0 \\ 0 & C_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $C_1(t)$, $C_2(t)$, 0 – $n \times n$ -матрицы, причем $C_1(t)$, $C_2(t)$ – непрерывно-дифференцируемые матрицы, $C_1(0)=C_2(0)=E$ – единичная матрица, необходимо и достаточно, чтобы для матрицы

$$P(t) = \begin{pmatrix} T(t) & R(t) \\ S(t) & Q(t) \end{pmatrix}$$

выполнялись условия

$$\begin{aligned} C_1'(t) + C_1(t)T(t) + T(-t)C_1(t) &\equiv 0, \quad C_1(t)R(t) + R(-t)C_2(t) \equiv 0, \\ C_2(t)S(t) + S(-t)C_1(t) &\equiv 0, \quad C_2'(t) + C_2(t)Q(t) + Q(-t)C_2(t) \equiv 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $T(t)$, $R(t)$, $S(t)$, $Q(t)$ – непрерывные $n \times n$ -матрицы.

Доказательство леммы следует из основного соотношения [1, с. 30] (см. также [4])

$$F'(t) + F(t)P(t) + P(-t)F(t) = 0, \quad F(0) = E$$

(E – единичная $2n \times 2n$ -матрица), которое является необходимым и достаточным для того, чтобы матрица $F(t)$ была отражающей матрицей системы (1).

Рассмотрим теперь линейную дифференциальную систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + M(t))x + R(t)y, \\ \dot{y} = S(t)x + (B + N(t))y, \quad t \in R, \quad x, y \in R^n, \end{cases} \quad (4)$$

где A и B – постоянные, $M(t)$, $R(t)$, $S(t)$, $N(t)$ – непрерывные $n \times n$ -матрицы.

Теорема 1. Для существования у системы (4) отражающей матрицы вида (2), где $C_1(t) = e^{-At}$, $C_2(t) = e^{-Bt}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$M(t) = e^{At}L(t)e^{-At}, \quad R(t) = e^{At}G(t)e^{-Bt}, \quad S(t) = e^{Bt}H(t)e^{-At}, \quad N(t) = e^{Bt}\Phi(t)e^{-Bt},$$

где $L(t)$, $G(t)$, $H(t)$, $N(t)$ – непрерывные нечетные $n \times n$ -матрицы, а $M(0)=R(0)=S(0)=N(0)=0$, так что $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = P(0)$.

Доказательство теоремы 1 состоит в проверке выполнимости соотношений (3) при условии, что

$$\begin{aligned} C_1(t) &= e^{-At}, \quad C_2(t) = e^{-Bt}, \quad T(t) = A + e^{At}L(t)e^{-At}, \\ R(t) &= e^{At}G(t)e^{-Bt}, \quad S(t) = e^{Bt}H(t)e^{-At}, \quad Q(t) = B + e^{Bt}\Phi(t)e^{-Bt}. \end{aligned}$$

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + e^{At}L(t)e^{-At})x + e^{At}G(t)e^{-Bt}y, \\ \dot{y} = e^{Bt}H(t)e^{-At}x + (B + e^{Bt}\Phi(t)e^{-Bt})y, \quad t \in R, \quad x, y \in R^n. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть 2ω -периодическая система

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad P(t + 2\omega) = P(t)$$

имеет вид (5), где матрицы $L(t)$, $G(t)$, $H(t)$, $\Phi(t)$ непрерывны, нечетны. Тогда система (5) устойчива (асимптотически устойчива) в том и только в том случае, если стационарные системы

$$\dot{x} = Ax, \quad (6)$$

$$\dot{y} = By \quad (7)$$

одновременно устойчивы (асимптотически устойчивы).

Отображение за период $[-\omega, \omega]$ для этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{2\omega A} & 0 \\ 0 & e^{2\omega B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Доказательство теоремы 2 основано на том, что система (5) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ \dot{y} = By \end{cases} \quad (9)$$

в смысле совпадения отражающих матриц [1, с. 21], а отражающая матрица системы (9) имеет вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{-2At} & 0 \\ 0 & e^{-2Bt} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что характер устойчивости систем (6), (7) совпадает с характером устойчивости системы (9). А тогда на основании [5] характеры устойчивости системы (5) и систем (6), (7) совпадают. Отображение за период $[-\omega, \omega]$ для 2ω -периодической системы (1) с отражающей матрицей $F(t)$ [1, с. 12] определяется по формуле $T(x) = F(-\omega)x$. Отсюда и следует соотношение (8).

Следствие. Пусть 2ω -периодическая система

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad P(t + 2\omega) = P(t)$$

имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + e^{At}L(t)e^{-At})x + e^{At}G(t)e^{-At}y, \\ \dot{y} = e^{At}H(t)e^{-At}x + (A + e^{At}\Phi(t)e^{-At})y, \end{cases} \quad x, y \in R^n, \quad (10)$$

где $L(t)$, $G(t)$, $H(t)$, $\Phi(t)$ – непрерывные нечетные матрицы. Тогда система (10) устойчива (асимптотически устойчива) в том и только в том случае, если устойчива (асимптотически устойчива) стационарная система

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n.$$

Пусть система (1) имеет отражающую матрицу $F(t)$. Рассмотрим задачу отыскания решений $x(t)$ системы (1), удовлетворяющих условию

$$\Psi(x(\alpha), x(-\alpha)) = 0. \quad (11)$$

Известно [6], что знание отражающей матрицы системы (1) позволяет решать краевую задачу (1), (11). Действительно, используя свойство отражающей матрицы $x(-t) = F(t)x(t)$, условие (11) можно записать в виде

$$\Psi(x(\alpha), F(\alpha)x(\alpha)) = 0, \quad (12)$$

следовательно, решение задачи (1), (11) свелось к решению системы (12). При этом решение $\phi(t; \alpha, x_0)$ будет решением краевой задачи (1), (11) тогда и только тогда, когда

$$\Psi(x_0, F(\alpha)x_0) = 0, \quad (13)$$

где $\phi(t; t_0, x_0)$ – общее решение системы (1) в форме Коши.

Если в качестве краевого условия (11) рассмотреть линейное краевое условие

$$\Lambda_1 x(\alpha) + \Lambda_2 x(-\alpha) = 0, \quad (14)$$

где Λ_1, Λ_2 – заданные $2n \times 2n$ -матрицы, то соотношение (13) примет вид

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2 F(\alpha))x(\alpha) = 0,$$

а решение $\phi(t; \alpha, x_0)$ будет решением краевой задачи (1), (14) тогда и только тогда, когда x_0 будет решением линейной однородной алгебраической системы

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2 F(\alpha))z = 0.$$

Из этих рассуждений следуют

Теорема 3. Решение $\varphi(t; \alpha, v_0)$ будет решением краевой задачи (5), (11)

тогда и только тогда, когда $\Psi(v_0, w_0)=0$, где $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $w_0 = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha A} x_0 \\ e^{-2\alpha B} y_0 \end{pmatrix}$.

Теорема 4. Решение $\varphi(t; \alpha, v_0)$ будет решением краевой задачи (5), (14) тогда и только тогда, когда v_0 будет решением линейной однородной алгебраической системы $(\Lambda_1 + \Lambda_2 F(\alpha))v_0=0$, где $F(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha A} & 0 \\ 0 & e^{-2\alpha B} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \in R, \quad x \in R^n \quad (15)$$

с отражающей матрицей $F(t)$. Известно, что если система

$$\dot{y} = Q(t)y \quad (16)$$

получена из системы (15) с помощью преобразования $y=S(t)x$, $\det S(t) \neq 0$, то отражающая матрица $\Phi(t)$ системы (16) имеет вид $\Phi(t)=S(-t)F(t)S^{-1}(t)$.

Теорема 5. Из разрешимости краевой задачи (15), (11) следует разрешимость краевой задачи для системы (16) с условием $\Psi(y(\alpha), y(-\alpha))=0$, где $y(\alpha)=x(\alpha)$, $y(-\alpha)=x(-\alpha)$.

Действительно, так как $y(-\alpha)=\Phi(\alpha)y(\alpha)=S(-\alpha)F(\alpha)S^{-1}(\alpha)x(\alpha)=F(\alpha)x(\alpha)$, то все сводится к разрешимости системы (12).

1. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.

2. Мироненко В.И. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. № 1. С. 36.

3. Альсевич Л.А. // Там же. № 3. С. 69.

4. Альсевич Л.А. // Там же. 1982. № 3. С. 50.

5. Альсевич Л.А. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 27. № 1. С. 5.

6. Мироненко В.И. // Там же. 1996. Т. 32. № 6. С. 774.

Поступила в редакцию 05.04.2001.

Лариса Алексеевна Альсевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.

УДК 517.977

Ж.М. КРАВЧЕНКО

ГАРАНТИРОВАННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРАТКОСРОЧНЫХ ПРОГНОЗОВ ВОЗМУЩЕНИЙ

A problem guaranteed optimal control with short-term forecast of perturbations is considered. Method of building of approximate solution by means of big quantity of vectors of auxiliary set Q is described.

1. Пусть $T=[t_*, t^*]$, $h=(t^*-t_*)/N$, $t_* < t^* < \infty$. Функция $u=u(t)$, $t \in T$, – дискретное управление, если $u(t)=u(t_*+kh)$, $t \in [t_*+kh, t_*(k+1)h]$, $k = \overline{0, N-1}$.

В классе дискретных управлений рассмотрим задачу

$$c^* x(t^*) \rightarrow \max,$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + d(t)w; \quad x(t_*) = x_0; \quad x(t^*) \in X^* = \{x \in R^n: Hx \leq g\}; \quad (1)$$

$$w(t) \in W = \{w \in R: |w| \leq w^*\}; \quad u(t) \in U = \{u \in R: |u| \leq 1\}, \quad t \in T.$$