УДК 517.51: 517.53

А.П. СТАРОВОЙТОВ

СУЩЕСТВОВАНИЕ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

For a fixed sequence $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ of non-negative real numbers strictly decreasing to zero a absolutely continuous 2π-periodic function f is constructed such that $R_n^T(f) = a_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, where the $R_n^T(f)$ are the best approximations of *f* in the uniform norm by rational trigonometric functions of degree at most *n*.

Обозначим через $C_{2\pi}$ ($C_{2\pi}^*$) банахово пространство действительных (комплекснозначных) 2π-периодических непрерывных функций, а $C^*(E)$ – банахово пространство непрерывных на компакте $E\subset \mathbf{R}$ комплекснозначных функций. Пусть $R_n^T(f)$ ($R_n^{*,T}(f)$) – наилучшие приближения функции $f\in C_{2\pi}$ ($C_{2\pi}^*$) тригонометрическими рациональными функциями с действительными (комплексными) коэффициентами степени не выше $n=0, 1, 2, \ldots$. Аналогично $R_n^*(f, E)$ – наилучшие приближения алгебраическими рациональными функциями с комплексными коэффициентами.

Е.П. Долженко [1] установил, что, если для $f\in C^*(E)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n^*(f, E)<+\infty \Rightarrow f$ – абсолютно непрерывна на E.

Им же показано, что наилучшие рациональные приближения $R_n^*(f, E)$ абсолютно непрерывной функции *f* могут стремиться к нулю сколь угодно медленно (см. [2]), т. е. обратное утверждение не имеет места. Позже А.А. Пекарский обнаружил [3], что теорема Е.П. Долженко справедлива и в $C_{2\pi}^*$: если $f\in C_{2\pi}^*$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n^{*,T}(f, E)<+\infty \Rightarrow f$ – абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$.

В данной работе получено существенное продвижение в решении следующей проблемы (подробнее см. [4, 5]): какой должна быть последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ действительных чисел, чтобы существовала такая абсолютно непрерывная функция $f\in C_{2\pi}$, для которой

$$R_n^T(f) = a_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ? \tag{1}$$

Хорошо известно (см., например, [6]), что для любой $f\in C_{2\pi}$ $R_0^T(f) \geq R_1^T(f) \geq R_2^T(f) \geq \ldots \geq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^T(f) = 0$. Следовательно, для справедливости (1) необходимо, чтобы последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастала и сходилась к нулю.

Теорема. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям:

$$1)\ a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > 0,\quad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty .$$

Тогда существует такая нечетная абсолютно непрерывная функция $g\in C_{2\pi}$, что

$$R_n^T(g) = a_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Без ограничения общности можно считать, что $a_0=1$. Положим при $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\Delta a_n = a_{n-1} - a_n, \quad \varepsilon_n = \min\{\Delta a_1, \ \Delta a_2, \ \ldots, \ \Delta a_n\},$$

$$\beta_n = \frac{\varepsilon_1}{5}, \ \frac{\varepsilon_2}{5}, \ \ldots, \ \frac{\varepsilon_n}{5}, \quad c_k = \frac{1-\beta_k^2}{1+\beta_k^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Введем в рассмотрение синус-дроби Чебышева – Маркова [7]

$$\nu_n(x) = \sin\varphi_{2n}(x) = \sqrt{1-x^2}\,\frac{P_{n-1}(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1-c_k x)},$$

где $P_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$ с действительными коэффициентами.

В банаховом пространстве c_0 последовательностей $t=(t_0, t_1, t_2, \ldots)$, сходящихся к нулю, с нормой $\|t\|=\sup\{|t_n|:n=0, 1, 2, \ldots\}$ определим выпуклое компактное множество

$$K = \{t : 0 \le t_k \le \varepsilon_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots \}.$$

Если $t\in K$, то, полагая $\Delta t_k=t_{k-1}-t_k$, рассмотрим функцию

$$f_t(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}(\Delta a_k + \Delta t_k)\ \sin\theta\,\frac{P_{k-1}(\cos\theta)}{\prod_{j=1}^{k}(1-c_j\cos\theta)}. \tag{2}$$

Ряд (2) равномерно сходится, поэтому функция $f_t\in C_{2\pi}$ и является нечетной.

При выполнении условий теоремы в [5] установлено, что отображение $\Pi : c_0 \to c_0$, $\Pi(t) = \{a_n + t_n - R_n^T(f_t)\}_{n=0}^{\infty}$ непрерывно отображает K в себя. Поэтому по теореме Шаудера существует $t^* = (t_0^*, \ t_1^*, \ t_2^*, \ \ldots)\in K$, для которой $\Pi(t^*)=t^*$, т. е.

$$R_n^T(f_{t^*}) = a_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Покажем, что функция $g = f_{t^*} \in C_{2\pi}$ является искомой. Для этого осталось доказать, что в условиях теоремы g является абсолютно непрерывной. Сделаем это методом, отличным от предложенного в [1], опираясь лишь на свойства дробей Чебышева – Маркова.

Лемма 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k\ \ \Delta a_k < +\infty .$$

Доказательство. С помощью преобразования Абеля получим

$$\sum_{k=1}^{n} k\ \ \Delta a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n .$$

Отсюда следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. Справедливо равенство

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left| [\nu_n(\cos\ \theta)]' \right| d\theta = 4n .$$

Доказательство. Учитывая, что (см. [7]) $\varphi_{2n}'(x)\le 0$, $x\in[-1, 1]$, получаем:

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\,\varphi_{2n}(\cos\theta)\varphi_{2n}'(\cos\theta)\sin\theta\right| d\theta \ = \ 2\int_0^{\pi}\left|\cos\varphi_{2n}(\cos\theta)\right| d\varphi_{2n}(\cos\theta) =$$

$$= -2\int_{-1}^{1}\left|\cos\varphi_{2n}(x)\right| d\varphi_{2n}(x).$$

Так как функция $\varphi_{2n}(x)$ монотонно убывает на отрезке $[-1, 1]$ и

$$\varphi_{2n}(-1)=2n\pi, \ \varphi_{2n}(1)\ n\pi,$$

то отрезок $[-1, 1]$ можно разбить на n отрезков $[a_k, b_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, пересекающихся только своими концами, каждый из которых отображается $\varphi_{2n}(x)$ биективно на отрезок, длина которого равна π. Поэтому

$$I_n = -2n\int_{a_k}^{b_k}\left|\cos\varphi_{2n}(x)\right|\ d\varphi_{2n}(x) = 2n\int_0^{\pi}\left|\cos t\right|\ dt = 4n.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, составленный из функций $f_k \in C_{2\pi}$ абсолютно непрерывных на $[-1, 1]$, сходится в некоторой точке $\xi \in [-\pi, \pi]$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_k'(x)\right|dx < +\infty, \tag{3}$$

то этот ряд равномерно сходится к абсолютно непрерывной функции $f \in C_{2\pi}$.

Доказательство. В силу теоремы Лебега [8] из (3) следует сходимость почти всюду ряда $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left|f_k'(x)\right|$, следовательно, и ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$. Функция $S(x)$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$, так как

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|S(x)\right|dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_k'(x)\right|dx < +\infty,$$

и почти всюду на $[-\pi, \pi]$ $\left|\sum_{k=1}^{m} f_k'(x)\right| \le S(x)$ при любом m. Поэтому (теорема Лебега) законен предельный переход под знаком интеграла:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\{f_k(\xi) + \int_{\xi}^{x} f_k'(t)dt\} = f(\xi) + \int_{\xi}^{x}\{\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)\}dt.$$

Отсюда следует абсолютная непрерывность функции f. Лемма доказана.

Положим теперь

$$f_k(\theta) = (\Delta a_k + \Delta t_k)\sin\theta\frac{P_{k-1}(\cos\theta)}{\prod_{j=1}^{k}(1 - c_j\cos\theta)}.$$

Так как при $t \in K$ $|\Delta t_k| < \Delta a_k$, то в силу условий теоремы и леммы 1

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_k'(\theta)\right|d\theta \le 2\sum_{k=1}^{\infty}\Delta a_k\int_{-\pi}^{\pi}\left|[\nu_n(\cos\ \theta)]'\right|d\theta = 8\sum_{k=1}^{\infty}k\Delta a_k < +\infty.$$

Для завершения доказательства теоремы остается применить лемму 3.

С одной стороны, полученные в теореме достаточные условия на последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ не совпадают с минимальными необходимыми условиями. С другой стороны, как было отмечено, наилучшие рациональные приближения абсолютно непрерывной функции могут стремиться к нулю сколь угодно медленно. В этой связи вполне вероятно, что условие 2) в теореме можно ослабить до необходимого условия $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Результаты данной статьи анонсированы в материалах [9–10].

1. Долженко Е.П. // Мат. сб. 1962. Т. 56 (98). С. 403.
2. Гончар А.А. // Труды Международного конгресса математиков. М., 1966. С. 329.
3. Пекарский А.А. // Мат. сб. 1982. Т. 117 (159). С. 114.
4. Долженко Е.П. // Мат. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 313.
5. Старовойтов А.П. // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 6. С. 145.
6. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
7. Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Мн., 1979.
8. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Мн., 1984.
9. Старовойтов А.П. // Воронежская зимняя математическая школа. Воронеж, 2001. С. 41.
10. Он же. Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. междунар. конф. Мн., 2001. С. 156.

Поступила в редакцию 17.05.2001.

Александр Павлович Старовойтов – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры высшей математики и математической физики.