3. Арнольд И.В. Теория чисел. М., 1939.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., 1981.

Поступила в редакцию 04.04.2001.

Геннадий Васильевич Матвеев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.

Владимир Михайлович Ширяев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.

УДК 517.948.32:517.544

Т.И. ГАТАЛЬСКАЯ, Э.И. ЗВЕРОВИЧ

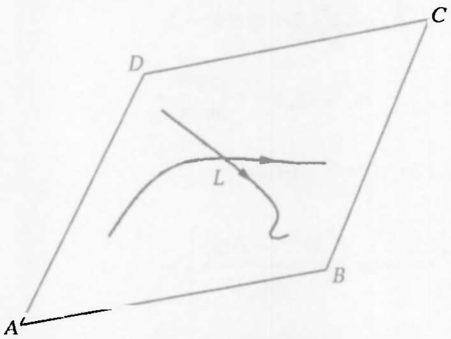
ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

It is obtained the solution to the problem of the linear association (Riemann's) for biperiodic functions.

Решение задачи линейного сопряжения (Римана) на замкнутой римановой поверхности рода h дано в работе [1]. Полученные результаты, разумеется, применимы и к случаю тора (т. е. при h=1). Если же тор реализовать в виде $\mathbb{C}/\Gamma$, где Γ – двоякопериодическая решетка, $\Gamma=\{2m\omega+2m'\omega'|m,\ m'\in\mathbb{Z}\}$, то решение из [1] можно существенно упростить, используя аналитический аппарат теории эллиптических функций [2]. Это и является целью настоящей работы. Фиксируя основные периоды 2ω и $2\omega'$, где $\operatorname{Im}\dfrac{\omega'}{\omega}>0$, все вычисления будем проводить в одном (основном) параллелограмме периодов (рисунок):

$$\Pi:=\{2\omega t+2\omega' t' \mid 0\le t\le 1,\ 0\le t'\le 1\}, \tag{1}$$

отождествляя между собой каждую пару t, τ точек его края $\partial\Pi=ABCDA$, связанных хотя бы одним из равенств: $\tau=t+2\omega$, $\tau=t+2\omega'$. Для удобства вычислений введем на Π (комплексные) координаты, полагая $A=0$, $B=2\omega$, $C=2(\omega+\omega')$, $D=2\omega'$. Будем использовать обозначения из [1]. Пусть $L\subset\Pi$ – сложный кусочно-гладкий ориентированный контур (граф), $\Lambda\subset L$ – множество его узлов, J – дивизор порядка $m=\operatorname{ord} J$, составленный из точек множества Λ, D – дивизор порядка $n=\operatorname{ord} D$, составленный из точек множества $\Pi\backslash L$. Пусть задана кусочно-H-непрерывная функция $G(t)$, $T\in L\backslash\Lambda$, которая нигде не обращается в нуль, включая ее предельные значения в точках множества Λ. Рассмотрим сначала однородную задачу Римана:



Фундаментальный параллелограмм и контур

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\ J^{-1}D^{-1}|(\Phi),\ t\in L. \tag{2}$$

Эта запись означает, что требуется найти все двоякопериодические (с основными периодами 2ω и $2\omega'$) функции Φ, мероморфные на $\Pi\backslash L$, кратные там дивизору D^{-1}, H-непрерывно продолжимые на $L\backslash\Lambda$, где их предельные значения слева (Φ^+) и справа (Φ^-)

связаны равенством (2). В окрестности узлов задается асимптотика: $\Gamma^{-1}|(\Phi)$, которая означает, что функции Φ должны быть кратными дивизору Γ^{-1}.

Общее решение задачи (2) найдено в [1]. Желая приспособить его к рассматриваемому здесь случаю, следует прежде всего положить h=1, а вместо используемого в [1] *разрывного аналога ядра Коши* использовать выражение $\zeta(\tau-t)d\tau$, где $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Вейерштрасса [2], построенная по основным периодам 2ω и 2ω′. Используя также введенные выше обозначения, можно утверждать, что общее решение задачи (2) при $z\in\Pi\backslash L$ содержится в формуле:

$$\Phi(z)=\varphi(z)\exp\left\{(2\pi i)^{-1}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\tilde z}\zeta(\tau-z)d\tau-m\int_0^{2\omega}\zeta(\tau-z)d\tau-m'\int_0^{2\omega'}\zeta(\tau-z)d\tau\right\}, \tag{3}$$

где под $\ln G(\tau)$ понимается произвольно зафиксированная непрерывная на $L\backslash\Lambda$, ветвь, а все остальное в правой части (3) вычисляется в зависимости от нее. Чтобы провести эти вычисления, используем известные [2] тождества:

$$\zeta(\tau-t-2\omega)=\zeta(\tau-t)-2\zeta(\omega)\,,\; t\in[A,D]\,,$$
$$\zeta(\tau-t-2\omega')=\zeta(\tau-t)-2\zeta(\omega')\,,\; t\in[A,B]$$

и запишем условие двоякой периодичности экспоненты в правой части (3):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)d\tau=\tilde z+2m\omega+2m'\omega'\,. \tag{4}$$

Из этого уравнения легко найти числа m, $m'\in\mathbb{Z}$ и точку $\tilde z\in[0,2\omega)\times[0,2\omega')$.

Учитывая, что числа ω и ω′ линейно независимы над $\mathbb{R}$, представим левую часть (4) в виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)d\tau=2\alpha\omega+2\alpha'\omega',\quad \text{где}\ \ \alpha,\ \alpha'\in\mathbb{R}.$$

Сравнивая это с (4), находим: $m=[\alpha]$, $m'=[\alpha']$, $\tilde z=2\{\alpha\}\omega+2\{\alpha'\}\omega'$, где $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ означают целую и дробную части соответственно.

С учетом того, что $d\zeta(z)=d\ln\sigma(z)$, где $\sigma(\cdot)$ – сигма-функция Вейерштрасса, можно упростить правую часть (3):

$$\Phi(z)=\varphi(z)\exp\left\{(2\pi i)^{-1}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau-\right.$$
$$\left.-\ln\sigma(\tau-z)\Big|_0^{\tilde z}-m\ln\sigma(\tau-z)\Big|_0^{2\omega}-m'\ln\sigma(\tau-z)\Big|_0^{2\omega'}\right\}=$$
$$=\varphi(z)\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau-\right.$$
$$\left.-\ln\frac{\sigma(z-\tilde z)}{\sigma(z)}-m\ln\frac{\sigma(z-2\omega)}{\sigma(z)}-m'\ln\frac{\sigma(z-2\omega')}{\sigma(z)}\right\}=$$
$$=\varphi_1(z)\frac{\sigma(z)}{\sigma(z-\tilde z)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau-2m\zeta(\omega)z-2m'\zeta(\omega')z\right\}=$$
$$=\varphi_1(z)\frac{\sigma(z)}{\sigma(z-\tilde z)}e^{-2[m\zeta(\omega)+m'\zeta(\omega')]z}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau\right\}.$$

Дальнейшее упрощение здесь возможно, например, в случае, когда функция G – кусочно-постоянная. Если этого не предполагать, то общее решение задачи (4) приводится к виду:

$$\Phi(z)=\varphi_1(z)\frac{\sigma(z)}{\sigma(z-\tilde{z})}\times$$
$$\times e^{-2[m\zeta(\omega)+m'\zeta(\omega')]z}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau\right\}, \tag{5}$$

где φ_1 – произвольная эллиптическая функция, кратная дивизору $J^{-1}D^{-1}E^{-1}F^{-1}$, где дивизоры J и D заданы в (2), $F=(0)(\tilde{z})^{-1}$, ord $F=0$, а дивизор E порядка æ находится из асимптотики последнего множителя в правой части (5) в окрестности точек множества $\Lambda\subset L$.

Наряду с задачей (2) рассматривается так называемая *союзная* к ней задача

$$\Psi^-(t)=G(t)\Psi^+(t),\quad JD\,\|\,(\Psi),\quad t\in L. \tag{6}$$

Ее общее решение имеет такой вид:

$$\Psi(z)=\psi_1(z)\frac{\sigma(z-\tilde{z})}{\sigma(z)}\times$$
$$\times e^{2[m\zeta(\omega)+m'\zeta(\omega')]z}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau\right\}, \tag{7}$$

где $\psi_1(z)$ – произвольная эллиптическая функция, кратная дивизору $JDEF$, а все остальные символы в (7) – те же, что и в (5).

Пусть l и l' – размерности над полем $\mathbb{C}$ пространств решений задач (2) и (6) соответственно. Они связаны следующим равенством: $l-l'=æ+m+n$, вытекающим из теоремы Римана – Роха [3]. В случае $æ+m+n\neq0$ одно из чисел l, l' равно нулю. Если же $æ+m+n=0$, то возможны два случая: $l=l'=0$ либо $l=l'=1$. Последний случай реализуется, если и только если корнем уравнения (4) является точка $\tilde{z}=0$. В этом случае формулы (5) и (7) упрощаются за счет того, что в их правых частях второй множитель вырождается в константу.

Задавая H-непрерывную функцию $g:L\setminus\Lambda\to\mathbb{C}$, подчиненную асимптотике $J^{-1}\,|\,(g)$, рассмотрим неоднородную задачу сопряжения

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad J^{-1}D^{-1}\,|'\,(\Phi),\quad t\in L, \tag{8}$$

где $|'$ означает псевдократность [1]. Критерием разрешимости задачи (8) является известное [1] равенство

$$\int_L g(t)\Psi^+(t)dt=0, \tag{9}$$

где Ψ – общее решение задачи (6). Значит, при $l'=0$ задача (8) разрешима безусловно, а при $l'\geq1$ – при выполнении l' линейно независимых условий (9).

Для построения частного решения задачи (8) следует факторизовать коэффициент G, что можно осуществить с помощью функции (5) при $l\geq1$ и с помощью (7) при $l'\geq1$. Если же $l=l'=0$, факторизацию можно осуществить с помощью правой части равенства (5), положив там $\varphi_1(z)\equiv1$, или, что то же самое, с помощью правой части (7), положив там $\psi_1(z)=1$. Итак, пусть

$l = æ + m + n \geq 1$, а Φ_0 – частное решение однородной задачи (2), содержащееся в формуле (5). Пользуясь произволом в расположении нулей решения (5), выберем Φ_0 так, чтобы точки целого дивизора $(\Phi_0)JD$ не попадали на контур L. Это можно сделать при $l > 1$. В случае $l = 1$ не исключено, что $a \in L$, и тогда рассуждения придется несколько видоизменить. Пусть $a \in \Pi \setminus L$ – одна из этих точек. Зафиксируем еще одну точку $b \in \Pi \setminus L$ так, чтобы было $a \neq b$. Построим мероморфный аналог ядра Коши [4], принимая $(a)(b)^{-1}$ за его характеристический дивизор:

$$\omega(z,\tau)d\tau = \frac{\sigma(\tau - z + a - b)}{\sigma(a-b)} \frac{\sigma(z-b)\sigma(\tau-a)}{\sigma(\tau-b)\sigma(z-a)} \frac{d\tau}{\sigma(\tau-z)}. \tag{10}$$

Факторизуя с помощью решения Φ_0 коэффициент G, сведем задачу (8) к задаче о “скачке”:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\Phi_0^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\Phi_0^-(t)} = \frac{g(t)}{\Phi_0^+(t)}, \quad t \in L, \tag{11}$$

где новая неизвестная функция допускает полюс в точке a. Задача (11) разрешима безусловно, а ее решение можно найти в виде интеграла типа Коши с ядром (10). Таким образом, частное решение задачи (9) можно вычислить по формуле:

$$\Phi_1(z) = \frac{\Phi_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\Phi_0^+(\tau)} \omega(z,\tau)d\tau, \tag{12}$$

где ω – ядро (10).

Пусть теперь $l' \geq 1$, а Ψ_0 – частное решение союзной задачи (6), содержащееся в формуле (7). Факторизуя с его помощью коэффициент G, сведем задачу (8) к такой задаче о “скачке”:

$$\Phi^+(t)\Psi_0^+(t) - \Phi^-(t)\Psi_0^-(t) = g(t)\Psi_0^+(t), \quad t \in L. \tag{13}$$

При выполнении условия (9) решение задачи (13) находится в виде интеграла типа Коши с ядром $\zeta(\tau - z)d\tau$. Отсюда можно найти частное решение неоднородной задачи (8)

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\Psi_0(z)} \left[C + \frac{1}{2\pi i} \int_L g(\tau)\Psi_0^+(\tau)\zeta(\tau - z)d\tau \right], \tag{14}$$

где постоянную C можно найти из того условия, чтобы выражение в квадратных скобках из (14) было кратным дивизору $(\Psi_0)J^{-1}D^{-1}$. И наконец, в случае $l = l' = 0$ факторизовать G следует с помощью правой части (5) при $\varphi_1(z) \equiv 1$. Неоднородная задача (8) в этом случае однозначно и безусловно разрешима, а ее решение находится по формуле, аналогичной (12), где ω – мероморфный аналог ядра Коши с характеристическим дивизором $JDEF$.

1. Зверович Э.И. // УМН. 1971. Т. XXVI. Вып. 1 (157). С. 113.
2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М., 1970.
3. Форстер О. Римановы поверхности. М., 1980.
4. Дегтяренко Н.А. // Изв. вузов. Математика. 1999. № 8 (447). С. 11.

Поступила в редакцию 27.11.2001.

Татьяна Ивановна Гатальская – лаборант кафедры теории функций.

Эдмунд Иванович Зверович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций.