УДК 530.12

А.В. ГРИНЧУК, Е.А. УШАКОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО ПУТЯМ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ

The method of approximate calculation of path integrals for a particle with a spin is offered. The used approach is based on quantum field theory methods and on expansion of a Lagrangian and operator of parallel transport. The accuracy of this approximation is checked by means of comparison with exact result (free particle propagator on pseudosphere).

Одним из важнейших объектов в квантовой теории поля является фейнмановский пропагатор, с помощью которого выражаются такие величины, как амплитуды процессов рассеяния, вакуумное значение тензора энергии-импульса, интенсивность рождения пар и т. д. [1]. В искривленном пространстве-времени пропагатор является одним из наиболее эффективных инструментов для проведения процедуры перенормировки. В данной работе мы рассмотрим возможность применения интегралов по путям для приближенного вычисления пропагатора.

В работах Швингера и Девитта было показано, что пропагатор скалярной частицы можно представить в виде интеграла по путям [2, 3]:

$$G(x'', x') = -\frac{i}{2}\int_0^\infty ds \, \exp\left(-i m^2 s/2\right)\int D\{x(s)\} \, \exp\left\{i \int L(x(s), \dot{x}(s))\, ds\right\}.$$

В случае обобщенного уравнения Клейна – Гордона [4]

$$\left(\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2\right) \psi^A = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, \qquad (1)$$

где A – обобщенный (спинорный, векторный, тензорный) индекс, пропагатор имеет вид

$$G^{A''}{}_{A'}(x'', x') = \int_0^\infty ds \exp\left(-i m^2 s/2\right)\int D\{x(s)\}\mathbf{P}^{A''}{}_{A'}(x(s))\exp\left\{i\int L(x(s), \dot{x}(s))ds\right\}, \qquad (2)$$

$\mathbf{P}^{A''}{}_{A'}(x(s))$ – оператор параллельного переноса по пути $x(s)$; $L(x(s), \dot{x}(s))$ – эффективный лагранжиан:

$$L(x(s), \dot{x}(s)) = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x(s))\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + V_{QP}(x(s)).$$

Здесь при использовании недекартовых координат появляется дополнительное слагаемое $V_{QP}(x(s))$ – квантовый потенциал, явный вид которого зависит от используемого метода упорядочения операторов [2, 7]. Оператор параллельного переноса выражается через упорядоченную экспоненту:

$$\mathbf{P}^A{}_{B'}(x(s)) = \hat{T}\exp\left(-\int \mathbf{\Gamma}^A{}_{B\mu}\dot{x}^\mu(s)ds\right),$$

где $\hat{T}$ – символ упорядочения по s; $\mathbf{\Gamma}^A{}_{B\mu}$ – связность ($\nabla_\mu\psi^A = \partial_\mu\psi^A + \mathbf{\Gamma}^A{}_{B\mu}\psi^B$).

Пропагатор, выраженный интегралом (2), тесно связан с пропагаторами реальных физических полей. Так, в случае уравнения Прока пропагатор имеет вид

$$G^\alpha{}_{\beta'} - \frac{\nabla^\alpha \nabla_{\beta'} G}{m^2},$$

где G – пропагатор скалярного поля. Для частицы, описываемой уравнением Дирака, получим:

$$\frac{1}{i\ \gamma^{\mu}\nabla_{\mu}-m}=\frac{1}{\left(i\ \gamma^{\mu}\nabla_{\mu}+m\right)\left(i\ \gamma^{\mu}\nabla_{\mu}-m\right)}\left(i\ \gamma^{\mu}\nabla_{\mu}+m\right)=$$
$$=-\frac{1}{\nabla^{2}+R/4+m^{2}}\left(i\ \gamma^{\mu}\nabla_{\mu}+m\right),$$

где R – скалярная кривизна.

Из последнего операторного тождества видна связь между пропагаторами для уравнения Дирака и обобщенного уравнения Клейна – Гордона (1).

Вычисление интегралов по путям вида (2) – достаточно сложная задача, точные аналитические выражения можно получить только в исключительных случаях [5, 6]. Поэтому особое значение приобретают приближенные методы, например методы, разработанные в квантовой теории поля и основанные на выделении в лагранжиане квадратичных членов по полевым переменным и применении производящего функционала $Z(J(s))$ [1, 9]

$$Z(J(s))=\int D\{\xi(s)\}\ \exp\left(i\int_{0}^{T}\left(-\frac{1}{2}\dot{\xi}^{2}\ ds\right)+i\int_{0}^{T}J(s)\ \xi(s)\ ds\right),$$
$$\xi(0)=\xi(T)=0. \qquad (3)$$

Эта величина обладает двумя важными свойствами. Во-первых, интеграл по путям вида (3) вычисляется точно

$$Z(J(s))=\frac{1}{\sqrt{2\ \pi\ i\ T}}\exp\left\{\frac{i}{2}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}J(s')\ G(s',\ s'')J(s'')\ ds'\ ds''\right\},$$

где $G(s,\ s_0)$ – решение уравнения $\dfrac{d^{2}\xi}{d\ s^{2}}=\delta(s-s_{0})$ с граничными условиями $\xi(0)=\xi(T)=0$,

$$G(s,\ s_{0})=s\left(\frac{s_{0}}{T}-1\right)+\ (s-s_{0})\ \Theta(s-s_{0})=\begin{cases}s\left(\dfrac{s_{0}}{T}-1\right), & s<s_{0},\\ s_{0}\left(\dfrac{s}{T}-1\right), & s_{0}<s.\end{cases}$$

Во-вторых, производящий функционал позволяет вычислять и более сложные функционалы [4, 9]:

$$\int D\{\xi(s)\}\xi(s)\exp\left\{i\int\left(-\frac{\dot{\xi}^{2}}{2}\right)ds\right\}=$$
$$=\lim_{J\to0}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial J(s)}\int D\{\xi(s)\}\exp\left(i\int_{0}^{T}\left(-\frac{1}{2}\dot{\xi}^{2}\ ds\right)+i\int_{0}^{T}J(s)\xi(s)ds\right),$$

$$\int D\{\xi(s)\}F\left(\xi(s)\right)\exp\left\{i\int\left(-\frac{\dot{\xi}^{2}}{2}\right)ds\right\}=$$
$$=\lim_{J\to0}F\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial J(s)}\right)\int D\{\xi(s)\}\exp\left(i\int_{0}^{T}\left(-\frac{1}{2}\dot{\xi}^{2}ds\right)+i\int_{0}^{T}J(s)\xi(s)ds\right).$$

В качестве примера вычислим «среднее» от функционала $\int_{0}^{T}\xi^{2}(s)\ ds$:

$$\int D\{\xi(s)\}\left(\int_{0}^{T}\xi^{2}(s)\ ds\right)\exp\left\{i\int\left(-\frac{\dot{\xi}^{2}}{2}\right)ds\right\}=$$

$$= \lim_{J\to 0} \int_0^T ds \left(\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial J(s)} \right)^2 \int D\{\xi(s)\} \exp\left(i \int_0^T \left(-\frac{1}{2} \dot{\xi}^2 ds \right) + i \int_0^T J(s)\xi(s) ds \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i T}} \int_0^T (-iG(s,s)) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi i T}} \int_0^T \left(-is \left(\frac{s}{T} - 1 \right) \right) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi i T}} \frac{iT^2}{6}.$$

Такого рода функционалы удобны при приближенном вычислении интегралов по путям. Условие $\xi(0) = \xi(T) = 0$ возникает, если рассматривается действие на классической траектории, лагранжиан разлагается в ряд по отклонению $\xi(s)$ от классической траектории. Начальная и конечная точки при этом остаются фиксированными. В искривленном пространстве этот подход необходимо несколько модифицировать, для чего:

1) проводим геодезическую, соединяющую начальную и конечную точки $x_0^\mu(s)$:

$$\frac{D}{ds} \frac{dx_0^\mu(s)}{ds} = \frac{D}{ds} u^\mu(s) = 0;$$

2) параллельно переносим вдоль геодезической ортонормированный базис:

$$\frac{D}{ds} \mathbf{e}^\alpha(s) = 0, \; \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = \eta^{\alpha\beta},$$

где $\eta^{\alpha\beta}$ – тензор Минковского;

3) в параллельно переносимом базисе задаем вектор с координатами ξ^α и переносим его параллельно самому себе с каноническим ξ-параметром, изменяющимся от 0 до 1:

$$\frac{D\xi^\alpha}{d\xi} = 0.$$

В результате имеем координатную систему $\{\xi^\alpha\}$, у которой начало координат перемещается по мере изменения параметра s. В этой координатной системе получаем разложение лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2} u^\alpha u_\alpha - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\alpha \xi^\beta u^\gamma \xi^\delta + \cdots$$

$$+ V_{QP}(x_0(s)) + \xi^\alpha \nabla_\alpha V_{QP}(x_0(s)) + \frac{1}{2} \xi^\alpha \xi^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta V_{QP}(x_0(s)) + \cdots$$

и оператора параллельного переноса

$$\mathbf{P}^A{}_{B'}(x(s)) = \mathbf{P}^A{}_{B'}(x_0(s)) + \int_0^T \mathbf{P}^A{}_{C''}(x_0(s)) R^{C''}{}_{D''\alpha\beta} \mathbf{P}^{D''}{}_{B'} \xi^\alpha u^\beta \; ds + \cdots$$

Учитывая, что в параллельно переносимом базисе $\mathbf{P}^A{}_{B'} = \delta^A{}_{B'}$, находим:

$$\mathbf{P}^A{}_B = \delta^A{}_B + \int_0^T R^A{}_{B\alpha\beta} \xi^\alpha u^\beta ds + \int_0^T ds \int_0^s ds' R^A{}_{C\alpha\beta}(x(s)) R^C{}_{D\gamma\delta}(x(s')) \xi^\alpha u^\beta \xi^\gamma u^\delta +$$

$$+ \int_0^T \nabla_\alpha R^A{}_{B\mu\nu} \xi^\alpha \xi^\mu u^\nu ds + \cdots$$

Если ограничиться случаем искривленного пространства ($R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \neq 0$) в окрестности источников гравитационного поля ($T^\alpha_\beta = 0 \Rightarrow R^\alpha_\beta = 0$), то с точностью до второго порядка для пропагатора получим:

$$G^{A''}{}_{B'}(x'',x')\frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-i\,m^2T/2}\,dT}{(2\pi i T)^2}\,e^{-i\,\sigma(x'',x')/T}\mathbf{P}^{A''}{}_{C'}(x_0(s))\times$$

$$\times\left(\delta^{C'}_{B'}+\int_0^T \nabla^{\mu}R^{C'}{}_{B'\mu\nu}(s)u^{\nu}s\left(1-\frac{s}{T}\right)ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^T ds\int_0^T ds' R^{C'}{}_{D}{}^{\mu}{}_{\nu}(s)u^{\nu}R^{D'}{}_{B'\mu\lambda}(s')u^{\lambda}\left(-s\left(1-\frac{s'}{T}\right)+\Theta(s-s')(s-s')\right)\right)+\cdots \quad (4)$$

Слагаемое с $R_{\alpha\beta\gamma\delta}\xi^{\alpha}u^{\beta}\xi^{\gamma}u^{\delta}$ приводит к интегралу от $R_{\beta\delta}u^{\beta}u^{\delta}$ $G(s,s)$, этот интеграл обращается в нуль в силу $R^{\alpha}_{\beta}=0$. Здесь учитывалось, что квантовый потенциал, пропорциональный $R=R^{\alpha}_{\alpha}$, в данном случае также равен нулю, $\sigma(x,\ x')$ – мировая функция Синга [8], которая выражается через геодезическое расстояние $d(x,x')$ между точками: $\sigma(x,\ x')=\frac{d^2(x,\ x')}{2}$,

$d(x,x')=\int\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}}ds$.

Для проверки точности предлагаемого приближенного метода можно сравнить получаемые с его помощью результаты с хорошо исследованным точным решением. Так, на псевдосфере с метрикой

$$dl^2=d\chi^2+\alpha^2\sinh^2\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)\left(d\vartheta^2+\sin^2(\vartheta)\ d\varphi^2\right)$$

лагранжиан имеет вид

$$L=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}+\frac{R}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}-\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Отметим также соотношения:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=-\frac{1}{\alpha^2}\left(g_{\alpha\gamma}\ g_{\beta\delta}\ -\ g_{\alpha\delta}\ g_{\beta\gamma}\right),\ R_{\alpha\beta}=-\frac{2}{\alpha^2}g_{\alpha\beta},\ R=-\frac{6}{\alpha^2},\ \nabla_{\mu}R=0.$$

Пропагатор для скалярной частицы имеет сравнительно простой вид. В работах [7, 10] рассмотрен случай с α=1:

$$G(x'',\ x';\ T)=\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\frac{d(x'',\ x')}{\sinh\left(d(x'',\ x')\right)}\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2}\right),$$

который линейными преобразованиями $\chi\to\alpha\ \chi,\ ds\to\alpha^2 ds$ приводится к виду

$$G(x'',x';T)=\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\frac{d(x'',\ x')}{\alpha\sinh\left(\dfrac{d(x'',\ x')}{\alpha}\right)}\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right).\quad (17)$$

В результате при приближенном вычислении с точностью до членов второго порядка получаем

$$G(x'',\ x';\ T)=\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right)\times\int D\{\xi(s)\}\exp\left\{i\int\frac{\eta_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\mu}\dot{\xi}^{\nu}}{2}ds\right\}\times$$

$$\times\left(1-\frac{i}{2}\int R_{\alpha\beta\gamma\delta}u^{\alpha}\xi^{\beta}u^{\gamma}\xi^{\delta}ds+\cdots\right)=\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\left(1+\frac{1}{2}R_{\alpha\beta\gamma\delta}u^{\alpha}u^{\gamma}\eta^{\beta\delta}\frac{T^2}{6}\right)=\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\left(1+\frac{1}{2}R_{\alpha\gamma}u^{\alpha}u^{\gamma}\frac{T^2}{6}\right)=\exp\left(i\frac{d^2(x'',\ x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\left(1-\frac{u^2T^2}{6\alpha^2}\right)=\frac{1}{(2\pi iT)^{3/2}}\exp\left(i\frac{d^2(x'',x')}{2T}-i\frac{T}{2\alpha^2}\right)\left(1-\frac{d^2(x'',x')}{6\alpha^2}\right),\quad(18)$$

где $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,1,1)$, $d^2=T^2u^2$.

Сравнивая (17) и (18), находим, что при больших значениях α (соответствует малой кривизне $\sim 1/\alpha^2$) оба результата совпадают с точностью до $O(d/\alpha)^3$:

$$\frac{d}{\alpha\sinh(d/\alpha)}\approx\frac{d}{d+\frac{1}{6}\frac{d^3}{\alpha^2}+\frac{1}{120}\frac{d^5}{\alpha^4}}\approx 1-\frac{1}{6}\frac{d^2}{\alpha^2}+\cdots$$

Таким образом, предлагаемый приближенный метод вычислений может использоваться в том случае, когда

$$\int R_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}G(s,s)ds\sim\frac{u^2}{r^2}<<1,$$

где r – характерный радиус кривизны пространства.

Остальные интегралы, фигурирующие в разложении (4), имеют такой же или более высокий порядок малости.

В этой ситуации использованный метод обладает рядом преимуществ по сравнению с другими подходами. Во-первых, он основан на явно ковариантном разложении лагранжиана и параллельного переноса, поэтому здесь можно отделить физические эффекты от координатных (ср. [11]). Во-вторых, в слабом поле он пригоден не только для бесконечно малых ([3]), но и для конечных геодезических расстояний.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект № Ф99-178).

1. Биррелл Н., Девис П. Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени. М., 1984.
2. Dewitt B.S. // Rev. Mod. Phys. 1957. Vol. 29. P. 377.
3. Девитт Брайс С. Динамическая теория групп и полей. М., 1987.
4. Менский М.Б. Группа путей. М., 1983.
5. Гринчук А.В. // Гравитация и электромагнетизм. М., 1998. Вып. 6. С. 63.
6. Grinchuk A.V., Ushakov E.A. // Gravitation and Cosmology. 1999. Vol. 5. P. 173.
7. Grosche C., Steiner F. Handbook of Feynman Path Integrals. Berlin, 1998.
8. Синг Дж. Общая теория относительности. М., 1963. С. 64.
9. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля: В 2 т. М., 1984. Т. 2.
10. Grosche C. Path Integration and Separation of Variables In Spaces of Constant Curvature In Two and Three Dimensions. Preprint DESY 93–141. 1993.
11. Bekenstein J. D., Parker L. // Physical Review. 1981. Vol. 23D. P. 2850.

Поступила в редакцию 24.11.2001.

Александр Викторович Гринчук – преподаватель кафедры технологий образования РИВШ БГУ.

Евгений Алексеевич Ушаков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики.