

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973. С. 116.
2. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1980. С. 217.
3. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. М., 1976.
4. Барковский Л.М., Ханг Ф.Т.Н. // Оптика и спектроскопия. 1990. № 68. С. 670.
5. Они же // Акуст. журн. 1991. № 37. С. 222.
6. Barkovsky L.M., Furs A.N. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 1999. Vol. 2. № 3. P. 61.
7. Idem // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. Vol. 33. P. 3241.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967. С. 429.
9. Wei J., Norman E. // J. Math. Phys. 1963. Vol. 4. № 4. P. 575.

Поступила в редакцию 28.11.2001.

Андрей Викторович Новицкий – студент 5-го курса физического факультета. Научный руководитель – Л.М. Барковский.

Леонид Матвеевич Барковский – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики.

Александр Николаевич Фурс – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики.

УДК 539.12

В.И. СТРАЖЕВ, Д.А. ЦИОНЕНКО

О КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ДИРАКА – КЭЛЕРА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

It is shown that an accordance in the description of a spin $\frac{1}{2}$ particle by Dirac equation and by Dirac – Kaehler equation in a curved space-time, when the transformations of the Lorentz group are localized, is possible only in case of localization of the internal symmetry group. A classical theory of the Dirac – Kaehler field interacting with a non-Abelian gauge field in the curved space-time has been constructed.

В плоском пространстве-времени теория поля Дирака – Кэлера обладает группой $SU(2,2)$ внутренней (диальной) симметрии, которая образует полупрямое произведение с группой Лоренца (см. [1, 2]). Существование диальной симметрии позволяет переопределить трансформационные свойства волновой функции уравнения Дирака – Кэлера относительно преобразований Лоренца, в силу чего его решения эквивалентны решениям уравнения Дирака для частиц со спином $1/2$ и внутренней симметрией $SU(2,2)$ [3]. Такая возможность существует и при введении взаимодействия, не нарушающего симметрию теории [4]. -

В плоском пространстве-времени решения уравнения Дирака с внутренней симметрией сопоставимы с решениями уравнения Дирака – Кэлера, и сопоставление можно делать глобально [5]. Но в искривленном пространстве последнее возможно только в точке, что означает обязательность локализации и преобразований группы внутренней симметрии. Решения уравнения Дирака – Кэлера в точке можно сопоставить с решениями уравнения Дирака с внутренней симметрией только при одновременной локализации как преобразований группы Лоренца, так и группы внутренней симметрии.

Таким образом, в случае, когда симметрии не являются глобальными, для соответствия теории дираковских частиц и теории Дирака – Кэлера необходимо положить:

$$\delta_{\mu}^a(x)\delta_{\nu}^b(x)\Sigma_{ab}(x) = \chi_{\mu\nu}(x) + \omega_{\mu\nu}(x), \quad (1)$$

где $\Sigma_{\mu\nu}(x)$ – параметры преобразований подгруппы $SO(3.1)$ внутренней симметрии поля Дирака, $\chi_{\mu\nu}(x)$ – параметры преобразований подгруппы диальной симметрии поля Дирака – Кэлера, изоморфной группе $SO(3.1)$ ([2, 3]), $\omega_{\mu\nu}(x)$ – параметры преобразований локальной группы Лоренца. В выражении (1) величины $\delta_\mu^a(x)$ и $\delta_\nu^b(x)$ определяются соотношениями: $\delta_\mu^a(x)=1$, если $a=\mu$, и $\delta_\mu^a(x)=0$ в противном случае. Эти величины преобразуются по нижнему индексу согласно преобразованиям Лоренца, а по верхнему – согласно преобразованиям группы внутренней симметрии, т. е. являются 4-векторами по отношению к обеим группам симметрии. Закон преобразования для $\delta_\mu^a(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\delta_{\mu'}^a(x) &= B_{\mu'}^\mu(x) \delta_\mu^a(x); \\ \delta_\mu^{a'}(x) &= A_{a'}^a(x) \delta_\mu^a(x),\end{aligned}\quad (2)$$

где $B_{\mu'}^\mu(x)$ – оператор, задающий преобразования Лоренца в точке с координатами x , а $A_{a'}^a(x)$ – оператор, задающий преобразования локализованной группы внутренней симметрии. Для того чтобы выражение (1) было инвариантным относительно преобразований (2), необходимо вместе с преобразованиями Лоренца волновые функции уравнений подвергнуть преобразованиям подгруппы $SO(3.1)$ внутренней симметрии. Таким образом, алгебраическое переопределение генераторов группы Лоренца, т. е. переход от генераторов

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \{ \Gamma_{[\mu} \Gamma_{\nu]} + \Gamma'_{[\mu} \Gamma'_{\nu]} \} \quad (3)$$

к генераторам $\tilde{J}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} - G_{\mu\nu} = 1/4 \Gamma_{[\mu} \Gamma_{\nu]}$, соответствует инвариантному заданию условия (1) (см. также [6]). Матрицы Γ_μ и Γ'_μ осуществляют представление алгебры Клиффорда и коммутируют между собой. Величины $G_{\mu\nu} = 1/4 \Gamma'_{[\mu} \Gamma'_{\nu]}$ являются генераторами подгруппы преобразований диальной симметрии поля Дирака – Кэлера изоморфной группе $SO(3.1)$.

Иначе для описания частиц со спином $s=1/2$ посредством уравнения Дирака – Кэлера в рамках пространств, где группа Лоренца не является глобальной группой симметрии, необходимо ввести в рассмотрение взаимодействие с неабелевым калибровочным полем, соответствующим локализации группы $SU(2.2)$ диальной симметрии.

Соответствие между теориями Дирака и Дирака – Кэлера в случае неевклидова пространства-времени предполагает введение взаимодействия полей указанных типов с неабелевым калибровочным полем $\hat{A}_\mu = A_\mu^A G_A$, где G_A – генераторы группы $SU(2.2)$, $A=(1+15)$.

В плоском пространстве калибровочно-инвариантный лагранжиан для поля Дирака – Кэлера имеет вид:

$$L = -\bar{\Phi}(x) [\Gamma^\mu (\partial_\mu - iq A_\mu^A G_A) + m] \Phi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu}, \quad (4)$$

где $\bar{\Phi}(x) = \Phi^\dagger(x) \theta$, $\Phi(x)$ – 16-компонентная волновая функция, реализующая представление группы Лоренца с генераторами (3), $\theta = \Gamma_4 \Gamma'_4$ – матрица билинейной инвариантной формы,

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - q C_{CB}^A A_{[\mu}^C A_{\nu]}^B \quad (5)$$

и C_{CB}^A – структурные константы группы $SU(2.2)$. Из лагранжиана (4) варьированием по A_μ^A , $\bar{\Phi}(x)$ получим:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}^C + q C_{AB}^C A^{\nu A} F_{\mu\nu}^B = J_\mu^C, \quad (6)$$

$$\Gamma^\mu (\partial_\mu - iq A_\mu^C G_C) \Phi(x) + m \Phi(x) = 0,$$

где $J_\mu^C = q \bar{\Phi}(x) \Gamma_\mu G^C \Phi(x)$ – ток, являющийся источником поля $A_\mu^C(x)$, q – постоянная взаимодействия. Поскольку решающую роль в переопределении лоренцевых трансформационных свойств волновой функции играет подгруппа $SO(3,1)$ внутренней симметрии, ограничимся случаем, когда локализованы только ее параметры. Запишем:

$$\Gamma^\mu (\partial_\mu - iq A_\mu^{\alpha\beta} \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \Gamma_{\gamma\delta}) \Phi(x) + m \Phi(x) = 0.$$

Лоренц-инвариантность последнего уравнения обеспечивается условиями:

$$[\Gamma_\mu, J_{\alpha\beta}]_- = \delta_{\alpha\mu} \Gamma_\beta - \delta_{\beta\mu} \Gamma_\alpha$$

и коммутационными соотношениями

$$[G_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}]_- = \delta_{\alpha\mu} G_{\nu\beta} + \delta_{\alpha\nu} G_{\mu\beta} - \delta_{\beta\mu} G_{\alpha\nu} - \delta_{\beta\nu} G_{\alpha\mu},$$

из которых следует, что при переходе из одной системы отсчета в другую, осуществляемом преобразованиями Лоренца (здесь группа Лоренца – группа пространственно-временной симметрии), матрицы Γ_μ и поля $A_\mu^{\alpha\beta}$ преобразуются так:

$$\begin{aligned} S \Gamma_\mu S^{-1} &= L_\mu^{\nu'} \Gamma_{\nu'}, \\ L_\mu^{\nu'} S A_{\nu'}^{\alpha\beta} S^{-1} &= L_\mu^{\nu'} L_\alpha^{\alpha'} L_\beta^{\beta'} A_{\nu'}^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

поскольку $S^{-1} G_{\alpha\beta} S = L_\alpha^{\alpha'} L_\beta^{\beta'} G_{\alpha'\beta'}$. Таким образом, калибровочные поля $A_\mu^{\alpha\beta}$ являются 3-валентными тензорами по отношению к преобразованиям Лоренца [6].

Обобщим предложенную теорию на случай неевклидова пространства-времени, где геометрическую симметрию описывает группа общекоординатных преобразований H_4 . Если рассматриваемое поле $\Phi(x)$ осуществляет скалярное представление группы H_4 , тогда инвариантную производную $\partial_\mu - iq \hat{A}_\mu$ необходимо обобщить до ковариантной, определяемой связностью в пространстве представления локальной группы Лоренца [7, 8].

Это приводит к следующему виду "удлиненной" производной: $\partial_\mu - iq \hat{A}_\mu - iq' \hat{B}_\mu$, где q' – постоянная взаимодействия с полем $\hat{B}_\mu$ и

$$\hat{B}_\mu = \frac{1}{4} B_\mu^{(i)(j)} (\Gamma_{(i)} \Gamma_{(j)}) + \Gamma_{(i)}^\vee \Gamma_{(j)}^\vee, \quad \hat{A}_\mu = \frac{1}{4} A_\mu^{(i)(j)} \Gamma_{(i)}^\vee \Gamma_{(j)}^\vee.$$

Здесь и далее индексы $\mu, \nu, \sigma, \dots$ – пространственно-временные, преобразование которых задается группой H_4 , индексы $(i), (j), (k), \dots$ являются локальными лоренцевыми, индексы $a, b, c, \dots$ относятся к преобразованиям группы внутренней (изоспиновой) симметрии дираковского поля. В дальнейшем преобразования групп Лоренца и диальной симметрии будут вводиться одновременно, т. е. будет учтено требование согласования индексов $[(i)(j)]$ генераторов и параметров этих групп. Общековариантность уравнения, построенного на такой производной, обеспечена тем, что компенсирующие поля $\hat{B}_\mu^{(i)(j)}$ и $A_\mu^{(i)(j)}$ являются векторными по отношению к группе H_4 , а локальная лоренц-инвариантность требует, чтобы по индексам $[(i)(j)]$ поля являлись антисимметричными тензорами по отношению к преобразованиям Лоренца.

Обобщим определение (5) тензора напряженностей $F_{\mu\nu}$ на случай неевклидова пространства-времени, полагая тензор кручения равным нулю ($K_{\alpha\beta}{}^\mu = 0$):

$$F_{\mu\nu}^A = A_{\nu\mu}^A - A_{\mu\nu}^A - q C_{CB}^A A_{[\mu}^C A_{\nu]}^B. \quad (7)$$

Здесь точка "." обозначает ковариантное дифференцирование в соответствии со связностью:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (g_{\lambda\mu, \nu} + g_{\lambda\nu, \mu} - g_{\mu\nu, \sigma}), \quad (8)$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор пространства-времени и запятая "," обозначает частную производную.

При сравнении (5) и (7) видно, что связь $F_{\mu\nu}^A$ и $A_{\mu}^{(i)}$ остается той же, что и в случае плоского пространства-времени. При наличии кручения уравнение (7) обобщается введением слагаемого $K_{[\mu} A_{\nu]}^A$. Обобщение уравнения (6) на искривленное пространство-время получается при замене обычной производной на ковариантную. Действие дифференциального оператора ∇^μ на тензор $F_{\mu\nu}^A$ может быть представлено действием оператора δ , определенного на пространстве дифференциальных форм [5]:

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = \nabla_\mu F_\nu^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}).$$

Окончательно запишем:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} F_\mu^\nu) + q C A^\nu F_{\mu\nu} = J_\mu \sqrt{-g},$$

где C – матрица в присоединенном представлении группы $SU(2,2)$.

Аналогичному обобщению подвергаются уравнения, определяющие динамику поля $\bar{B}_{\mu\nu}^{(i)(j)}$, ассоциируемого с локальными преобразованиями подгруппы $SO(3,1)$ в пространстве представления группы Лоренца. Лагранжиан, инвариантный относительно обоих типов преобразований, имеет вид:

$$L = -\bar{\Phi}(x) [\Gamma^\mu D_\mu + m] \Phi(x) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} R_{\mu\nu}^{(i)(j)} R^{\mu\nu}_{(i)(j)}, \quad (9)$$

где D_μ – ковариантная производная, определенная полями A_μ^A и $B_\mu^{(i)(j)}$:

$$D_\mu = \partial_\mu - iq \hat{A}_\mu - iq' \hat{B}_\mu.$$

Ограничиваясь подгруппой $SO(3,1)$, запишем:

$$L = -\bar{\Phi}(x) [\Gamma^\mu (\partial_\mu - iq A_\mu^{(i)(j)} \frac{1}{4} \Gamma_{[i}^\nu \Gamma_{j]}^\nu - iq' B_\mu^{(i)(j)} (\frac{1}{4} \Gamma_{[i}^\nu \Gamma_{j]}^\nu + \frac{1}{4} \Gamma_{[i}^\nu \Gamma_{j]}^\nu)) + m] \Phi(x) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(i)(j)} F^{\mu\nu}_{(i)(j)} - \frac{1}{4} R_{\mu\nu}^{(i)(j)} R^{\mu\nu}_{(i)(j)}.$$

Тогда правило коммутации для производной D_μ , входящей в лагранжиан (9), имеет вид:

$$D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = 0,$$

где $F_{\mu\nu}^{(i)(j)}$ – тензор напряженностей поля $A_\mu^{(i)(j)}$ (5), а $R_{\mu\nu}^{(i)(j)}$ определяется следующим образом:

$$R_{\mu\nu}^{(i)(j)} = \partial_\mu B_\nu^{(i)(j)} - \partial_\nu B_\mu^{(i)(j)} - q' C_{(k)(l)}^{(i)(j)} B_{[\mu}^{(k)(l)} B_{\nu]}^{(m)(n)}. \quad (10)$$

Записывая полное действие системы в виде: $S = S_\Phi + S_A + S_B$, где

$$S_\Phi = \frac{1}{2} \int d^4x (\sqrt{-g} \bar{\Phi}(x) [\Gamma^\mu D_\mu + m] \Phi(x)),$$

$$S_A = \frac{1}{2} \int d^4x (\sqrt{-g} F_{\mu\nu}^{(i)(j)} F^{\mu\nu}_{(i)(j)}),$$

$$S_B = \frac{1}{2} \int d^4x (\sqrt{-g} R_{\mu\nu}^{(i)(j)} R^{\mu\nu}_{(i)(j)}),$$

варьированием по $\bar{\Phi}(x)$, $A_\mu^{(i)(j)}$, $B_\mu^{(i)(j)}$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\sqrt{-g} F_\mu^{(i)(j)\nu}) + q C_{(k)(l)(m)(n)}^{(i)(j)} A^{(k)(l)\nu} F_{\mu\nu}^{(m)(n)} &= [A] J_\mu^{(i)(j)}, \\ \partial_\nu (\sqrt{-g} R_\mu^{(i)(j)\nu}) + q' C_{(k)(l)(m)(n)}^{(i)(j)} B^{(k)(l)\nu} R_{\mu\nu}^{(m)(n)} &= [B] J_\mu^{(i)(j)}, \\ \Gamma^\mu D_\mu \Phi(x) + m \Phi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Токи $[A] J_\mu^{(i)(j)}$, $[B] J_\mu^{(i)(j)}$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} [A] J_\mu^{(i)(j)} &= q \bar{\Phi}(x) \Gamma_\mu G^{(i)(j)} \Phi(x) = q \bar{\Phi}(x) \Gamma_\mu \frac{1}{4} (\Gamma^{(i)} \Gamma^{(j)}) \Phi(x), \\ [B] J_\mu^{(i)(j)} &= q' \bar{\Phi}(x) \Gamma_\mu J^{(i)(j)} \Phi(x) = q' \bar{\Phi}(x) \Gamma_\mu \frac{1}{4} (\Gamma^{(i)} \Gamma^{(j)} + \Gamma^{(i)} \Gamma^{(j)}) \Phi(x). \end{aligned}$$

Расписывая производную D_μ в третьем уравнении (11), получаем:

$$\Gamma^\mu (\partial_\mu - i q' B_\mu^{(i)(j)} \frac{1}{4} \Gamma_{(i)} \Gamma_{(j)} - i q (A_\mu^{(i)(j)} + \frac{q}{q'} B_\mu^{(i)(j)}) \frac{1}{4} \Gamma_{(i)} \Gamma_{(j)}) \Phi(x) + m \Phi(x) = 0. \quad (12)$$

Вводя в рассмотрение поле $\tilde{C}_\mu^{(i)(j)} = A_\mu^{(i)(j)} + \frac{q}{q'} B_\mu^{(i)(j)}$, получим следующую формулировку уравнения (12):

$$\Gamma^\mu (\partial_\mu - i q' \tilde{C}_\mu^{(i)(j)} \frac{1}{4} \Gamma_{(i)} \Gamma_{(j)} - i q C_\mu^{(i)(j)} \frac{1}{4} \Gamma_{(i)} \Gamma_{(j)}) \Phi(x) + m \Phi(x) = 0,$$

которая удобна для исследования соответствия между теориями Дирака – Кэлера и Дирака.

Изменение волновой функции и калибровочных полей под действием преобразований подгруппы $SO(3,1)$, соответствующей локальным преобразованиям Лоренца, и преобразований той же подгруппы в пространстве представления группы внутренней симметрии (пространстве "ароматов") задается в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = \exp\{i\omega_{(i)(j)}(x) J^{(i)(j)}\} \Phi(x), \\ \tilde{B}_\mu(x) &\rightarrow \tilde{B}'_\mu(x) = \tilde{B}_\mu(x) + \delta \tilde{B}_\mu(x), \\ \delta \tilde{B}_\mu^{(i)(j)}(x) &= \partial_\mu \omega^{(i)(j)}(x) - q' C_{(k)(l)(m)(n)}^{(i)(j)} \tilde{B}_\mu^{(i)(j)}(x) \omega^{(m)(n)}(x); \\ \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = \exp\{i\chi_{(i)(j)}(x) G^{(i)(j)}\} \Phi(x), \\ \hat{A}_\mu(x) &\rightarrow \hat{A}'_\mu(x) = \hat{A}_\mu(x) + \delta \hat{A}_\mu(x), \\ \delta \hat{A}_\mu^{(i)(j)}(x) &= \partial_\mu \chi^{(i)(j)}(x) - q C_{(k)(l)(m)(n)}^{(i)(j)} \hat{A}_\mu^{(i)(j)}(x) \chi^{(m)(n)}(x), \end{aligned}$$

где $\omega_{(i)(j)}$ и $\chi_{(i)(j)}$ – параметры преобразований этих групп.

Отметим, что при задании локальных преобразований Лоренца пространственно-временные координаты не изменяются. При одновременном задании обоих типов преобразований волновой функции введенное выше калибровочное поле $\tilde{C}_\mu^{(i)(j)}$ преобразуется соответствующим образом.

Рассмотрим теперь мультиплет дираковских полей $\Psi(x)$, осуществляющих представление группы $SU(2,2)$ внутренней симметрии. В случае неевклидовой

лидова пространства-времени ковариантное уравнение Дирака (см. [9, 10]) в присутствии неабелева калибровочного поля $\bar{E}_\mu^{ab}$, соответствующего подгруппе $SO(3.1)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial_\nu(\sqrt{-g} \bar{F}_\mu^{ab\nu}) + q C_{cd}^{ab} E^{cd\nu} \bar{F}_{\mu\nu}^{fg} = [E] J_\mu^{ab}, \\ \partial_\nu(\sqrt{-g} R_\mu^{(i)(j)\nu}) + q' C_{(k)(l)(m)(n)}^{(i)(j)} B^{(k)(l)\nu} R_{\mu\nu}^{(m)(n)} = [B] J_\mu^{(i)(j)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Gamma^\mu (\partial_\mu - iq' B_\mu^{(i)(j)} \frac{1}{4} \Gamma_{(i)(j)} - iq \bar{E}_\mu^{ab} \frac{1}{4} \Gamma_{ab}) \Psi(x) + m \Psi(x) = 0.$$

Данная система уравнений может быть получена варьированием по $\bar{\Psi}(x)$, E_μ^{ab} и $B_\mu^{(i)(j)}$ из лагранжиана:

$$\begin{aligned} L = -\bar{\Psi}(x) \Gamma^\mu (\partial_\mu - iq' B_\mu^{(i)(j)} \frac{1}{4} \Gamma_{(i)(j)} - iq \bar{E}_\mu^{ab} \frac{1}{4} \Gamma_{ab}) \Psi(x) + \\ + \frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu}^{ab} \bar{F}^{\mu\nu}_{ab} - \frac{1}{4} R_{\mu\nu}^{(i)(j)} R^{\mu\nu}_{(i)(j)}. \end{aligned}$$

Сравнивая (11) и (13) с учетом (12), приходим к выводу, что соответствие теории Дирака – Кэлера и теории, описывающей мультиплет дираковских частиц, предполагает выполнение условий:

$$\begin{aligned} \delta_a^{(i)}(x) \delta_b^{(j)}(x) \bar{F}_{\mu\nu}^{ab} = F_{\mu\nu}^{(i)(j)} + q' R_{\mu\nu}^{(i)(j)}, \\ \partial_\nu \delta_a^{(i)}(x) + B_{\nu\mu}^{(i)(j)} \delta_a^{(j)}(x) - \bar{E}_{\nu\mu}^{ab} \delta_{a(i)}^{(b)}(x) = 0, \end{aligned}$$

где $\delta_a^{(i)}(x)$ – введенные ранее символы Кронекера, определенные в каждой точке пространства-времени. Под действием подгруппы $SO(3.1)$ локальных преобразований во внутреннем (изотопическом) пространстве калибровочное поле $\bar{E}_\mu^{ab}$ и поле $\Psi(x)$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = \exp\{i \Sigma_{ab}(x) G^{ab}\} \Psi(x), \\ \hat{E}_\mu(x) \rightarrow \hat{E}'_\mu(x) = \hat{E}_\mu(x) + \delta \hat{E}_\mu(x), \\ \delta E_\mu^{ab}(x) = \partial_\mu \Sigma^{ab}(x) - q C_{cd}^{ab} A_\mu^{cd}(x) \Sigma^{fg}(x). \end{aligned}$$

Учитывая условие (1), приходим к выводу, что, переопределяя в спинорном пространстве локальные трансформационные свойства волновой функции уравнения Дирака – Кэлера $\Phi(x)$, можно установить соответствие между названными теориями и в случае неевклидова пространства-времени. В обоих случаях присутствует взаимодействие указанных массивных полей с неабелевым калибровочным полем, соответствующим подгруппе $SO(3.1)$ внутренней симметрии. Однако в спинорной формулировке уравнения Дирака – Кэлера поля $C_\mu^{(i)(j)}$ являются антисимметричными лоренц-тензорами по индексам $[(i)(j)]$, тогда как в теории дираковских полей соответствующие индексы у E_μ^{ab} являются изоспиновыми. Данное обстоятельство имеет значение в случае связи между преобразованиями подгруппы $SO(3.1)$ в спинорном пространстве и локальными преобразованиями Лоренца тетрады $h_\mu^{(i)}$, когда локальному преобразованию тетрады $h_\mu^{(i)'} = L_{(i)}^{(j)} h_\mu^{(j)}$ соответствует преобразование в спинорном пространстве.

Как и в случае плоского пространства-времени, переопределение лоренцевых трансформационных свойств волновой функции $\Phi(x)$ приводит к переопределению спиновых свойств у частиц – переносчиков взаимодействия. Следует подчеркнуть, что спиновые степени свободы частиц определяются как чисто внутренние, не зависящие от геометрии пространства-времени. Это обстоятельство связано с независимостью локальных преоб-

разований Лоренца и преобразований координат многообразия, осуществляемых группой H_4 .

Рассмотрим в применении к исследуемому случаю следствие требования равенства нулю ковариантной производной от тетрады $h_\mu^{(i)}(x)$:

$$\nabla_\mu h_\nu^{(i)} = \partial_\mu h_\nu^{(i)} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma h_\sigma^{(i)} + B_\mu^{(i)(j)} h_{\nu(j)} = 0. \quad (14)$$

Умножая (14) на $h^{\nu(k)}$ и учитывая соотношения (8), получаем:

$$B_\mu^{(i)(j)} = \frac{1}{2} h^{\nu(i)} (h_{\mu,\nu}^{(j)} - h_{\nu,\mu}^{(j)}) - \frac{1}{2} h^{\nu(j)} (h_{\mu,\nu}^{(i)} - h_{\nu,\mu}^{(i)}) + \\ + \frac{1}{2} h^{\nu(i)} h^{\sigma(j)} (h_{\nu(k),\sigma} - h_{\sigma(k),\nu}) h_\mu^{(k)}, \quad (15)$$

где использовано выражение (см. также [11]):

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} h_{(i)}^\lambda h^{\sigma(i)} ((h_{\mu(j)} h_{\nu}^{(j)})_{,\sigma} + (h_\mu^{(j)} h_{\sigma(j)})_{,\nu} - (h_{\sigma(j)} h_\nu^{(j)})_{,\mu}).$$

Подставляя (15) в определение тензора напряженностей $R_{\mu\nu}^{(i)(j)}$ поля $B_\mu^{(i)(j)}$ (10), получаем:

$$R_{\mu\nu}^{(i)(j)} = \frac{1}{2} h_{(i)}^\lambda h^{\nu(j)} (g_{\mu\sigma, \nu\lambda} + g_{\nu\lambda, \mu\sigma} - g_{\mu\lambda, \nu\sigma} - g_{\nu\sigma, \mu\lambda}) + \\ + h^{\rho(i)} h^{\sigma(j)} (\Gamma_{\mu\sigma\rho} \Gamma_{\nu\theta\lambda} - \Gamma_{\mu\theta\rho} \Gamma_{\sigma\nu\lambda}) h_{(k)}^\lambda h_{(k)}^\theta,$$

т. е. $R_{\mu\nu}^{(i)(j)}$ – тензор кривизны пространства, два индекса которого превращены в реперные.

Таким образом, при рассмотрении теорий Дирака и Дирака – Кэлера в неевклидовом пространстве-времени, включающих взаимодействие с неабелевым калибровочным полем, возможно переопределение лоренцевых трансформационных свойств и установление локального соответствия между ними.

Полагая в уравнениях (13) $R_{\mu\nu}^{(i)(j)} = 0$, приходим к ситуации, соответствующей плоскому пространству-времени, которая была описана ранее (6). Калибровочная теория поля Дирака – Кэлера в пределе плоского пространства также рассмотрена в [12].

1. Стражев В.И., Плетюхов В.А. // Acta. Phys. Polon. 1981. Vol. B12. № 7. P. 651.
2. Стражев В.И. // Acta. Phys. Polon. 1978. Vol. B9. № 5. P. 449.
3. Плетюхов В.А., Стражев В.И. // ДАН БССР. 1982. Т. 26. № 8.
4. Стражев В.И. Спиновые степени свободы и калибровочные симметрии: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Мн., 1985.
5. Becher P., Joos H. // Zeit. f. Phys. 1982. Bd. C15. S. 343.
6. Круглов С.И., Стражев В.И. // Изв. вузов СССР. Физика. 1981. № 12. С. 82.
7. Биррел Н., Дэвис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М., 1984.
8. Девитт Брайс С. Динамическая теория групп и полей. М., 1987.
9. Schmutzer E. Relativistische Physik. Leipzig, 1968.
10. Горбачевич А.К. Квантовая механика в общей теории относительности. Мн., 1985.
11. Holdom B. // Nucl. Phys. 1984. Vol. B23. № 3. P. 413.
12. Круглов С.И., Стражев В.И. // Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля. Протвино, 1981. Т. 1. С. 105.

Поступила в редакцию 09.11.2001.

Василий Иванович Стражев – доктор физико-математических наук, профессор, ректор РИВШ БГУ.

Дмитрий Александрович Ционенко – младший научный сотрудник лаборатории квантовой теории поля Национального научно-учебного центра физики частиц и высоких энергий БГУ.