При $L_{ВКР}>L_{нак}$ (рис. 3 *в*, *г*) импульс ВКР с запозданием приходит на крутой спадающий фронт деформированного импульса накачки, что способствует более быстрому сокращению длительностей, однако при этом режим может становиться неустойчивым из-за прогрессивного запаздывания импульса ВКР на последующих проходах. Это коррелирует с постепенным укорачиванием наблюдающихся цугов импульсов ВКР. Импульс накачки при этом сильнее истощается в области больших времен.

При $L_{ВКР} < L_{нак}$ (рис. 3 *а*) импульс ВКР приходит с опережением импульса накачки и не срабатывает обсуждавшийся выше механизм сокращения с участием крутого фронта деформированного импульса накачки. Длительность импульсов ВКР при этом возрастает по мере увеличения рассогласования баз резонаторов.

Таким образом, полученные результаты показывают, что наиболее короткие импульсы ВКР получаются в схеме с внутрирезонаторным расположением кристалла (см. рис. 1 *а*), а основой механизма сокращения длительностей ВКР-импульсов при накачке относительно длительными (десятки пикосекунд) импульсами является резкая деформация импульса накачки за счет преобразования энергии в стоксову компоненту, что на последовательных обходах резонатора приводит к возбуждению когерентных колебаний среды в поле бигармонической накачки сдвинутыми по времени импульсами.

В варианте внерезонаторной СН деформации импульсов накачки не происходит, обсуждавшийся выше механизм сокращения длительностей не работает, длительности импульсов (см. рис. 2) оказываются больше, чем для случая схемы с внутрирезонаторной СН при оптимальном согласовании баз.

1. Бельский А.М., Гулис И.М., Саечников К.А. и др. // Квант. электрон. 1992. Vol. 19. № 8. P. 769; 1994. Vol. 21. № 8. P. 767; 1994. Vol. 21. № 3. P. 371; 1995. Vol. 22. № 8. P. 841.
2. Гулис И.М., Саечников К.А. // III Международная конференция по лазерной физике и спектроскопии: В 2 т. Гродно, 1997. Т. 1. С. 84.
3. Claus R., Schrotter H. W., Hacker H. H. at al. // Z. Naturforsch. 1969. Vol. 24A. P. 1733; 1970. Vol. 25A. P. 306.
4. Апанасевич А., Запорожченко Р.Г., Орлович В.А. и др. // Квант. электрон. 1989. Vol. 16. № 5. P. 1009.

Поступила в редакцию 09.11.2001.

Игорь Михайлович Гулис – доктор физико-математических наук, профессор кафедры лазерной физики и спектроскопии.

Константин Алексеевич Саечников – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики БГПУ им. М. Танка.

УДК 534

А.В. НОВИЦКИЙ, Л.М. БАРКОВСКИЙ, А.Н. ФУРС

ОСОБЕННОСТИ ТЕНЗОРНЫХ ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКИХ РЯДОВ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕДАХ

Tensor series of geometrical optics is considered in anisotropic one-dimensional media. Tensor eikonal equation, the solution of Maxwell equations in geometro-optical approximation and transfer equations are obtained. The calculations are fulfiled in a particular case of isotropic stratified medium, and a possibility for the coinsidence of approximate solution with an exact solution of Maxwell equations is investigated.

В геометрической оптике при расчетах обычно используется скалярный подход [1, 2]. Введение скалярного эйконала позволяет вычислять направления распространения лучей, дает возможность находить векторные геометрооптические решения в случае изотропных и анизотропных сред. Для анизотропной неоднородной среды решение в эйкональном приближении представляется суммой амплитуд двух собственных волн. В этом случае должно выполняться условие независимости нормальных волн [2], что является еще одним приближением. В силу этого, например, принципиально невозможен предельный переход от анизотропной к изотропной среде [2]. В рамках ковариантных методов Ф.И. Федорова [3] был разработан тензорный формализм [4–7], позволяющий находить геометрооптические решения без разложения полей на собственные волны. В этом подходе используются эволюционные представления решений волнового уравнения, что позволяет явно учесть зависимость эйконального приближения от начальной поляризации электромагнитного поля. При этом эволюционный оператор волнового решения в геометрооптическом приближении представляет собой мультипликативный интеграл [8] от тензора нормальной рефракции. Его расчет сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений известными операторными методами [9].

Основные положения тензорной геометрической оптики стратифицированных сред

Монохроматическая волна частоты ω, распространяющаяся в неоднородной анизотропной магнитной среде, подчиняется уравнению Гельмгольца для вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$:

$$\nabla^{\times}\left(\varepsilon^{-1}\nabla^{\times}\mathbf{H}\right)-k^{2}\mu\mathbf{H}=0, \qquad (1)$$

где ε – тензор диэлектрической проницаемости, μ – тензор магнитной проницаемости, $k=\dfrac{\omega}{c}$ – волновое число, $\nabla^{\times}$ – тензор, дуальный вектору ∇.

В общем случае распространения волны в среде, стратифицированной вдоль оси z, уравнение волны допускает следующее разделение переменных:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\mathbf{H}(z)\exp(ik\mathbf{br}). \qquad (2)$$

Здесь единичный вектор $\mathbf{q}$ направлен вдоль оси z, так что $z=\mathbf{qr}$, вектор $\mathbf{b}$ – вдоль оси x, лежащей в плоскости стратификации, $\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{q}$. Модуль вектора $\mathbf{b}$ определяется углом падения волны. В частности, нормальному падению (распространению волны вдоль оси z) соответствует $\mathbf{b}=0$.

Подставляя (2) в (1), получаем уравнение

$$-k^{2}(B+\mu)\mathbf{H}(z)+ik\left[\frac{dC}{dz}\mathbf{H}(z)+(C+S)\frac{d\mathbf{H}(z)}{dz}\right]+$$

$$+\frac{dQ}{dz}\frac{d\mathbf{H}(z)}{dz}+Q\frac{d^{2}}{dz^{2}}\mathbf{H}(z)=0, \qquad (3)$$

причем тензоры C, S, Q, B имеют следующий вид:

$$B=\mathbf{b}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{b}^{\times},\ Q=\mathbf{q}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{q}^{\times},\ C=\mathbf{q}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{b}^{\times},\ S=\mathbf{b}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{q}^{\times}. \qquad (4)$$

Решение уравнения (3) представляем в виде

$$\mathbf{H}(z)=\exp(ik\Psi)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{i}{k}\right)^{j}\mathbf{A}_{j}(z), \qquad (5)$$

где $\Psi(z)$ – тензорный эйконал, $\mathbf{A}_j(z)$ – медленно меняющиеся векторные амплитуды. Поле $\mathbf{H}(z)$ дается разложением в ряд по степеням i/k аналогично известной формуле скалярной геометрической оптики [1], что соответствует частному случаю разложения Дебая по длине волны, или обратному волновому числу. Известно, что решение уравнения (3) для однородной среды имеет вид

$$\mathbf{H}(z)=\exp(ikNz)\mathbf{H}(z_0), \tag{6}$$

где N – не зависящий от z тензор 2-го ранга, называемый тензором нормальной рефракции, z_0 – начальная координата. Важно, что волновое решение типа (6), записанное в эволюционной форме, учитывает как прямую, так и обратную волну. Стратифицированную среду можно разбить на ряд бесконечно тонких однородных слоев, в каждом из которых применима формула (6). Тогда решение уравнения (3) будем искать в виде [6, 7]:

$$\mathbf{H}(z)=\exp\left(ik\int_{z_0}^{z} N_z(z)dz\right)\mathbf{A}(z), \tag{7}$$

где $\mathbf{A}(z)$ – медленно меняющаяся амплитуда, причем индекс z при N указывает на порядок операторов, так как в общем случае они не перестановочны $N(z_1)N(z_2)\neq N(z_2)N(z_1)$, $z_1\neq z_2$. Сравнивая (5) и (7), получаем выражение для тензорного эйконала

$$\Psi(z)=\int_{z_0}^{z} N_z(z)dz.$$

Выражение (7) может быть также представлено в виде

$$\mathbf{H}(z)=\int_{z_0}^{z}\left[1+ikN(z_1)dz_1\right]\mathbf{A}(z)=\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)\right]\mathbf{A}(z),$$

где символ $\Omega_{z_0}^{z}$ обозначает мультипликативный интеграл [8]. Этот интеграл является решением операторного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz}\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]=ikN(z)\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]. \tag{8}$$

Подставляя (7), уравнение (3) можно представить в виде

$$\left[QN^2+(S+C)N+B+\mu\right]\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]\mathbf{A}_{j+1}(z)-\frac{d(QN+C)}{dz}\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]\mathbf{A}_j(z)-$$
$$-(2QN+S+C)\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]\frac{d\mathbf{A}_j(z)}{dz}+Q\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]\frac{d^2\mathbf{A}_{j-1}(z)}{dz^2}+$$
$$+\frac{dQ}{dz}\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN\right]\frac{d\mathbf{A}_{j-1}(z)}{dz}=0, \tag{9}$$

причем $\mathbf{A}_j=0$ при $j<0$.

В (9) собраны члены при одинаковых степенях i/k. Тогда, приравнивая нулю коэффиценты при различных степенях i/k, для $j=-1$ (нулевое приближение) получим

$$(QN^2+(S+C)N+B+\mu)\mathbf{H}_0(z)=0. \tag{10}$$

Так как уравнение (10) должно выполняться для любых z, то

$$QN^2+(S+C)N+B+\mu=0. \tag{11}$$

Таким образом, в нулевом геометрооптическом приближении для $N(z)$ получается квадратное уравнение, называемое тензорным уравнением эйконала [6, 7]. Для нормального падения ($\mathbf{b}=0$) оно принимает вид

$$QN^2+\mu I=0,$$

где I=**1**–(**q**⊗**q**μ)/(**q**μ**q**) – проективный оператор. Решение этого уравнения дается формулой $N=(-\mu^{-1}Q)^{-1/2}$ (корень из тензора, псевдообратного к $-\mu^{-1}Q$).

Обратимся к уравнениям (9). Член, содержащий $\mathbf{A}_{j+1}(z)$, обращается в нуль в силу уравнения эйконала (11). Таким образом, можно получить рекуррентные формулы для $\mathbf{A}_j(z)$ [7, 8]:

$$\mathbf{A}_j(z)=\Omega_{z_0}^{z}\left[G(z)\right]\mathbf{A}_j(z_0)+\int_{z_0}^{z}K(z,z_1)H(z_1)\mathbf{A}_{j-1}(z_1)dz_1, \qquad (12)$$

где $G(z)=-\left\{\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\right\}^{-1}(2QN+S+C)^{-1}\dfrac{d}{dz}(QN+C)\Omega_{z_0}^{z}[ikN]$,

$$H(z)=\left\{\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\right\}^{-1}(2QN+S+C)^{-1}\left\{\frac{dQ}{dz}\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\frac{d}{dz}+Q\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\frac{d^2}{dz^2}\right\},$$

$$K(z,z_1)=\Omega_{z_0}^{z}\left[G(z)\right]\Omega_{z_1}^{z_0}\left[G(z_1)\right],\ j=0,1,2,\dots .$$

В тензорном геометрооптическом приближении решение имеет вид

$$\mathrm{H}_0(z)=\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\Omega_{z_0}^{z}\left[G(z)\right]\mathrm{H}_0(z_0), \qquad (13)$$

где $\mathbf{H}_0(z_0)$ – вектор магнитного поля в начальной точке падения z_0. Тогда для нахождения $\mathbf{H}_0(z)$ сначала необходимо вычислить $\Omega_{z_0}^{z}[ikN]$, затем подставить это значение в $G(z)$, рассчитать $\Omega_{z_0}^{z}\left[G(z)\right]$ и воспользоваться (13), что приведет к громоздким вычислениям даже в случае простейших неоднородных сред. Существует более простое представление решения уравнения (9), которое мы используем в дальнейшем. Введем

$$\mathbf{H}_j(z)=\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\mathbf{A}_j(z),$$

тогда $\mathbf{H}(z)=\mathbf{H}_0(z)+\left(\dfrac{i}{k}\right)\mathbf{H}_1(z)+\dots$, причем $\mathbf{H}_0(z)$ – искомое геометрооптическое приближение. Используя преобразование Лежандра

$$\Omega_{z_0}^{z}[ikN]\frac{d\mathbf{A}_j}{dz}=\left(\frac{d}{dz}-ikN\right)\mathbf{H}_j(z),$$

получим дифференциальные уравнения относительно $\mathbf{H}_j(z)$, решение которых найдем аналогично (12) методом вариации постоянной:

$$\mathbf{H}_j(z)=\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]\mathbf{H}_j(z_0)+\int_{z_0}^{z}K_1(z,z_1)L(z_1)\mathbf{H}_{j-1}(z_1)dz_1, \qquad (14)$$

где $G_1(z)=-(2QN+S+C)^{-1}\dfrac{d}{dz}(QN+C)$,

$$L(z)=(2QN+S+C)^{-1}\left[\frac{dQ}{dz}\left(\frac{d}{dz}-ikN\right)+Q\left(\frac{d^2}{dz^2}-\frac{d}{dz}ikN-ikN\frac{d}{dz}+(ik)^2N^2\right)\right],$$

$$K_1(z,z_1)=\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]\Omega_{z_1}^{z_0}\left[ikN(z_1)+G_1(z_1)\right].$$

Нулевое приближение в этом случае выражается формулой

$$\mathbf{H}_0(z)=\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]\mathbf{H}_0(z_0).$$

Теперь достаточно найти лишь мультипликативный интеграл $\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]$, что значительно проще, чем вычисление по формуле (13).

Расчет поля в нулевом приближении для изотропной среды

Рассмотрим частный случай среды со скалярными диэлектрической $\varepsilon=\varepsilon(z)$ и магнитной проницаемостью $\mu=\mu(z)$. Вначале найдем тензор нормальной рефракции $N(z)$. Тензоры C, S, B, Q (4) принимают вид

$$B=\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}-\mathbf{b}^2),\quad Q=\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}-1)=-\frac{1}{\varepsilon}I,\quad S=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{q}\otimes\mathbf{b},\quad C=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{b}\otimes\mathbf{q},$$

где $I=\mathbf{1}-\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}$ – проектор на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{q}$.

Тогда тензорное уравнение эйконала записывается в следующем виде:

$$IN^2-(\mathbf{b}\otimes\mathbf{q}+\mathbf{q}\otimes\mathbf{b})N-\xi-\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}=0,$$

где $\xi(z)=\varepsilon(z)\mu(z)-\mathbf{b}^2$. Его решение [6, 7]

$$N(z)=\pm\frac{\sqrt{\xi}}{\mathbf{b}^2}\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}-\frac{\xi(z)}{\mathbf{b}^2}\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{q}-\mathbf{q}\otimes\mathbf{b}.$$

Переходим к вычислению мультипликативного интеграла $\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]$, используя известную процедуру Вея – Нормана [9].

Оператор $\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]$ согласно (8) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\frac{d}{dz}\Omega_{z_0}^{z}\right]\left\{\Omega_{z_0}^{z}\right\}^{-1}=ikN(z)+G_1(z)$$

с начальным условием $\Omega_{z_0}^{z_0}=1$. Вычисление $G_1(z)$ дает

$$G_1(z)=V_1(z)\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}+V_2(z)\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{q},$$

где $V_1(z)=-\dfrac{1}{2\mathbf{b}^2}\dfrac{d}{dz}\ln\left(\dfrac{\sqrt{\xi}}{\varepsilon}\right)$, $V_2(z)=-\left(2\mu-\dfrac{\mathbf{b}^2}{\varepsilon}\right)^{-1}\dfrac{d\mu}{dz}$.

Введем операторы

$$L_1=\mathbf{b}\otimes\mathbf{q},\quad L_2=\mathbf{q}\otimes\mathbf{b},\quad L_3=\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}-\mathbf{b}^2\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{q},\quad L_4=\mathbf{a}\otimes\mathbf{a},\quad L_5=\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}. \tag{15}$$

Они образуют алгебру Ли и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[L_1,L_2]=L_3,\quad [L_1,L_3]=-2\,\mathbf{b}^2L_1,\quad [L_2,L_3]=2\,\mathbf{b}^2L_2,\quad [L_1,L_5]=L_1,\quad [L_2,L_5]=-L_2,$$
$$[L_1,L_4]=[L_2,L_4]=[L_3,L_4]=[L_3,L_5]=[L_4,L_5]=0.$$

Кроме того,

$$ikN(z)+G_1(z)=-ik\frac{\xi(z)}{\mathbf{b}^2}L_1-ikL_2+\left(\pm\frac{ik}{\mathbf{b}^2}\sqrt{\xi(z)}+V_1\right)L_4+V_2L_5.$$

Искомый мультипликативный интеграл представляется в виде произведения операторных экспонент

$$\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z)+G_1(z)\right]=\exp[ig_1L_1]\exp[ig_2L_2]\exp[g_3L_3]\exp[ig_4L_4]\exp[g_5L_5], \tag{16}$$

где g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 – неизвестные функции переменной z.

Воспользовавшись формулой Бейкера – Хаусдорфа

$$e^XYe^{-X}=Y+[X,Y]+\frac{1}{2!}[X,[X,Y]]+\frac{1}{3!}[X,[X,[X,Y]]]+\ldots,$$

получим систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка [7, 9]:

$$\frac{dg_1}{dz}=-\frac{k}{\mathbf{b}^2}\xi-k\mathbf{b}^2g_1^2-V_2g_1, \tag{17а}$$

$$\frac{dg_2}{dz}=-k\left(1-2\mathbf{b}^2g_1g_2\right)+V_2g_2, \tag{17б}$$

$$\frac{dg_3}{dz} = -kg_1, \qquad (17в)$$

$$\frac{dg_4}{dz} = \pm\frac{k}{\mathbf{b}^2}\sqrt{\xi(z)} - iV_1, \qquad (17г)$$

$$\frac{dg_5}{dz} = V_2, \qquad (17д)$$

причем функции g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 удовлетворяют начальным условиям

$$g_1(z_0) = g_2(z_0) = g_3(z_0) = g_4(z_0) = g_5(z_0) = 0.$$

Учитывая явный вид операторов (15), можно записать искомое решение (16) в виде

$$\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN(z) + G_1(z)\right] = \frac{1}{\mathbf{b}^2}\exp[g_3\,\mathbf{b}^2]\,(1 - \mathbf{b}^2 g_1 g_2)\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{b} +$$
$$+ ig_1\exp[g_5 - g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{q} + ig_2\exp[g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{b} +$$
$$+ \exp[g_5 - g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{q} + \frac{1}{b^2}\exp[ig_4\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}.$$

Сравнение геометрооптических полей с точным решением уравнений Максвелла

Рассмотрим немагнитную среду $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $\mu = 1$. Тогда $V_2 = 0$ и

$$G_1(z) = V_1(z)\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}.$$

Из (17д) легко получить, что $g_5 = 0$, а уравнения 17а–17г упрощаются, так что

$$\Omega_{z_0}^{z}\left[ikN + G_1\right] = \frac{1}{\mathbf{b}^2}\exp[g_3\,\mathbf{b}^2](1 - \mathbf{b}^2 g_1 g_2)\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{b} + ig_1\exp[-g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{b}\otimes\mathbf{q} +$$
$$+ ig_2\exp[g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{b} + \exp[-g_3\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{q}\otimes\mathbf{q} + \frac{1}{\mathbf{b}^2}\exp[ig_4\,\mathbf{b}^2]\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}. \qquad (18)$$

Воспользовавшись формулой (14), можно вычислить члены высших порядков. Очевидно, что $\mathbf{H}_j(z_0) = 0$, $j > 0$, так как первоначальный вектор магнитного поля известен точно, т. е. $\mathbf{H}(z_0) = \mathbf{H}_0(z_0)$. Результат расчета представим в виде

$$\mathbf{H}_j(z) = F_j(z)\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\,\mathbf{H}(z_0), \quad j \geq 1,$$

где $F_j(z)$ – некоторые функции от z, причем $\mathbf{H}_j(z)$ направлены вдоль **а** и входят в $\mathbf{H}(z)$ с коэффициентами $(i/k)^j$. Из (18) видно, что члены высших порядков не вносят каких-либо изменений в решение для поля $\mathbf{H}(z)$, поляризованного в плоскости падения (**b**, **q**), но уточняют решение для поля $\mathbf{H}(z)$, поляризованного перпендикулярно плоскости падения.

* * *

Таким образом, совпадение или несовпадение решений уравнений Максвелла и геометрооптических решений для изотропной немагнитной среды определяется начальной поляризацией электромагнитной волны. Если вектор $\mathbf{H}(z_0)$ лежит в плоскости падения, то точное и геометрооптическое решения совпадают, если же он перпендикулярен плоскости падения, то необходимо учитывать члены более высокого порядка разложения по длине волны. Отметим, что тензор нормальной рефракции не коммутирует в различных точках стратифицированной среды, являясь генератором неабелевой алгебры Ли. Данное свойство тензора N является одной из причин несовпадения скалярных и тензорных геометрооптических решений.

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973. С. 116.
2. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1980. С. 217.
3. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. М., 1976.
4. Барковский Л.М., Ханг Ф.Т.Н. // Оптика и спектроскопия. 1990. № 68. С. 670.
5. Они же // Акуст. журн. 1991. № 37. С. 222.
6. Barkovsky L.M., Furs A.N. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 1999. Vol. 2. № 3. P. 61.
7. Iidem // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. Vol. 33. P. 3241.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967. С. 429.
9. Wei J., Norman E. // J. Math. Phys. 1963. Vol. 4. № 4. P. 575.

Поступила в редакцию 28.11.2001.

Андрей Викторович Новицкий – студент 5-го курса физического факультета. Научный руководитель – Л.М. Барковский.
Леонид Матвеевич Барковский – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики.
Александр Николаевич Фурс – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики.

УДК 539.12

В.И. СТРАЖЕВ, Д.А. ЦИОНЕНКО

О КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ДИРАКА – КЭЛЕРА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

It is shown that an accordance in the description of a spin ½ particle by Dirac equation and by Dirac – Kaehler equation in a curved space-time, when the transformations of the Lorentz group are localized, is possible only in case of localization of the internal symmetry group. A classical theory of the Dirac – Kaehler field interacting with a non-Abelian gauge field in the curved space-time has been constructed.

В плоском пространстве-времени теория поля Дирака – Кэлера обладает группой $SU(2,2)$ внутренней (диальной) симметрии, которая образует полупрямое произведение с группой Лоренца (см. [1, 2]). Существование диальной симметрии позволяет переопределить трансформационные свойства волновой функции уравнения Дирака – Кэлера относительно преобразований Лоренца, в силу чего его решения эквивалентны решениям уравнения Дирака для частиц со спином 1/2 и внутренней симметрией $SU(2,2)$ [3]. Такая возможность существует и при введении взаимодействия, не нарушающего симметрию теории [4].

В плоском пространстве-времени решения уравнения Дирака с внутренней симметрией сопоставимы с решениями уравнения Дирака – Кэлера, и сопоставление можно делать глобально [5]. Но в искривленном пространстве последнее возможно только в точке, что означает обязательность локализации и преобразований группы внутренней симметрии. Решения уравнения Дирака – Кэлера в точке можно сопоставить с решениями уравнения Дирака с внутренней симметрией только при одновременной локализации как преобразований группы Лоренца, так и группы внутренней симметрии.

Таким образом, в случае, когда симметрии не являются глобальными, для соответствия теории дираковских частиц и теории Дирака – Кэлера необходимо положить:

$$\delta^a_\mu(x)\delta^b_\nu(x)\Sigma_{ab}(x)=\chi_{\mu\nu}(x)+\omega_{\mu\nu}(x), \qquad (1)$$