УДК 536.24, 517.968

П.А. МАНДРИК

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

The method of dual integral equations with L-parameter is offered in theory of the parabolic PDEs (heat conduction equations) with mixed/unmixed boundary conditions on a surface of a researched half-space solid. Method allows determining analytical regularities of time-space development of appropriate temperature fields.

Мандрик Павел Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета прикладной математики и информатики. Основное направление научных исследований – аналитические и численные методы исследования динамических систем, моделируемых начальными и краевыми задачами для дифференциальных уравнений.

Автор и соавтор 70 публикаций, среди которых одна монография, два учебных пособия, одно научно-популярное издание.

На примере осесимметричной двумерной задачи теплопроводности рассмотрены аналитические методы, позволяющие исследовать нестационарные процессы теплопереноса при наличии смешанных граничных условий на поверхности изучаемого изотропного полуограниченного тела. В основе предлагаемого подхода лежат методы сведения исходной дифференциальной задачи к парным интегральным уравнениям в области преобразований Лапласа, парных интегральных уравнений к эквивалентному интегральному уравнению в области изображений Лапласа и, наконец, метод решения последнего.

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение

$$\theta_{rr}(r,z,\tau)+r^{-1}\theta_r(r,z,\tau)+\theta_{zz}(r,z,\tau)=a^{-1}\theta_\tau(r,z,\tau), \qquad r,z,\tau>0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\theta(r,z,0)=0 \tag{2}$$

и краевыми условиями ($r=0$ и $r,z\to\infty$)

$$\theta_r(0,z,\tau)=0, \tag{3}$$

$$\theta_r(\infty,z,\tau)=0_z(r,\infty,\tau)=0, \tag{4}$$

где $\theta(r,z,\tau)=T(r,z,\tau)-T_0$ – избыточная температура; r,z – цилиндрические координаты; τ – временная координата; $T_0=\mathrm{const}$ – начальная температура; $a>0$ – коэффициент температуропроводности полуограниченного изотропного тела.

В общем случае на поверхности $z=0$ могут быть заданы смешанные граничные условия третьего рода с поверхностными источниками тепла внутри круга ($0<r<R$) и вне круга ($R<r<\infty$):

$$\alpha_1\theta(r,0,\tau)-\lambda\theta_z(r,0,\tau)=\alpha_1(T_{1c}(r,\tau)-T_0)+q_1(r,\tau), \quad 0<r<R; \tag{5}$$

$$\alpha_2\theta(r,0,\tau)-\lambda\theta_z(r,0,\tau)=\alpha_2(T_{2c}(r,\tau)-T_0)+q_2(r,\tau), \quad R<r<\infty, \tag{6}$$

где $\lambda>0$ – коэффициент теплопроводности полуограниченного изотропного тела; α_1, α_2 – коэффициенты теплообмена на поверхности $z=0$ со средами, имеющими нестационарные температуры $T_{1c}(r,\tau)$ и $T_{2c}(r,\tau)$ в соответствующих диапазонах изменения цилиндрической координаты r; $q_1(r,\tau)$ и $q_2(r,\tau)$ – соответствующие плотности поверхностных источников тепла.

Решение задачи (1)–(6) будем искать с помощью последовательного применения интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля [1]

$$\overline{\theta}(r,z,s)=\int\limits_0^\infty \theta(r,z,\tau)\exp(-s\tau)d\tau, \quad \mathrm{Re}\ \ s>0, \tag{7}$$

$$\theta_H(p,z,s)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \theta(r,z,\tau)\exp(-s\tau)J_0(pr)\ r\,dr\ \ d\tau,\ \mathrm{Re}\ \ s>0. \tag{8}$$

В дальнейшем по умолчанию будем предполагать $\mathrm{Re}\ \ s>0$ всякий раз, когда будет встречаться комплексный L-параметр s.

Применяя (8) к уравнению (1), учитывая условия (2)–(4) и используя формулу обращения для интегрального преобразования Ханкеля, можно показать, что

$$\theta_H(p,z,s)=\frac{1}{p}\overline{A}(p,s)\exp\left(-z\sqrt{p^2+\tfrac{s}{a}}\right), \tag{9}$$

$$\overline{\theta}(r,z,s)=\int\limits_0^\infty \overline{A}(p,s)\exp\left(-z\sqrt{p^2+\tfrac{s}{a}}\right)J_0(pr)dp, \tag{10}$$

где $J_0(pr)$ – функция Бесселя вещественного аргумента первого рода нулевого порядка [2], $\overline{A}(p,s)$ – вспомогательная аналитическая функция-изображение.

Учитывая вид решения (10) при $z=0$, из смешанных граничных условий (5), (6) после применения к ним преобразования Лапласа приходим к парным интегральным уравнениям с L-параметром

$$\int\limits_0^\infty\left(\alpha_1+\lambda\sqrt{p^2+\tfrac{s}{a}}\right)\overline{A}(p,s)J_0(pr)\,dp=\alpha_1\left(\overline{T}_{1c}(r,s)-\tfrac{T_0}{s}\right)+\overline{q}_1(r,s),$$
$$0<r<R, \tag{11}$$

$$\int\limits_0^\infty\left(\alpha_2+\lambda\sqrt{p^2+\tfrac{s}{a}}\right)\overline{A}(p,s)J_0(pr)\,dp=\alpha_2\left(\overline{T}_{2c}(r,s)-\tfrac{T_0}{s}\right)+\overline{q}_2(r,s),$$
$$R<r<\infty, \tag{12}$$

из которых необходимо определить аналитическую функцию-изображение $\overline{A}(p,s)$.

Отметим, что при $s\to 0$ (что соответствует $\tau\to\infty$) из уравнений (11), (12) мы приходим к парным стационарным интегральным уравнениям, полученным и исследованным, например, в [3, 4] при решении уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями. Кроме того, заметим, что при $\alpha_1\to\infty$, $\alpha_2\to\infty$ мы имеем нестационарную задачу Дирихле, а при $\alpha_1=\alpha_2=0$ – нестационарную задачу Неймана для изотропного полупространства при несмешанных разрывных граничных условиях соответственно первого и второго родов, которые решаются непосредственно по формулам обращения интегралов Лапласа и Ханкеля.

Здесь мы будем рассматривать только случаи смешанных граничных условий (5), (6), которые приводят к соответствующим парным интегральным уравнениям с L-параметром [5].

Если на поверхности $z=0$ в круге $0<r<R$ задана функция избыточной температуры $T_{1c}(r,\tau)-T_0$, а вне круга действует поверхностный тепловой источник плотности $q_2(r,\tau)$, который обменивается теплом по закону Ньютона со средой, имеющей температуру $T_{2c}(r,\tau)$ и коэффициент теплообмена α_2, то парные интегральные уравнения (11), (12) при $\alpha_1\to\infty$, $\alpha_2\geq 0$ преобразуются к виду

$$\int_0^\infty \left[1-\bar{g}_1(p,s)\right]\bar{C}_1(p,s)J_0(pr)\,dp=\bar{T}_{1c}(r,s)-\frac{T_0}{s},\qquad 0<r<R,\tag{13}$$

$$\int_0^\infty \bar{C}_1(p,s)\sqrt{p^2+\frac{s}{a}}\,J_0(pr)\,dp=\lambda^{-1}\overline{f_2}(r,s),\qquad R<r<\infty,\tag{14}$$

где $\bar{C}_1(p,s)=\left[1+\dfrac{\alpha_2}{\lambda\sqrt{p^2+\frac{s}{a}}}\right]\bar{A}(p,s)$,

$$\bar{g}_1(p,s)=\frac{\alpha_2}{\lambda\sqrt{p^2+\frac{s}{a}}+\alpha_2},\qquad \bar{f}_2(r,s)=\alpha_2\left(\bar{T}_{2c}(r,s)-\frac{T_0}{s}\right)+\bar{q}_2(r,s).$$

Если на поверхности $z=0$ в круге $0<r<R$ действует поверхностный тепловой источник плотности $q_1(r,\tau)$, который обменивается теплом по закону Ньютона со средой, имеющей температуру $T_{1c}(r,\tau)$ и коэффициент теплообмена α_1, а вне круга задана функция избыточной температуры $T_{2c}(r,\tau)-T_0$, то из (11), (12) при $\alpha_1\geq 0$, $\alpha_2\to\infty$ получаем другую стандартную форму парных интегральных уравнений с L-параметром

$$\int_0^\infty \left[1-\bar{g}_2(p,s)\right]\sqrt{p^2+\frac{s}{a}}\;\bar{C}_2(p,s)J_0(pr)\,dp=\lambda^{-1}\overline{f_1}(r,s),\qquad 0<r<R,\tag{15}$$

$$\int_0^\infty \bar{C}_2(p,s)J_0(pr)\,dp=\bar{T}_{2c}(r,s)-\frac{T_0}{s},\qquad R<r<\infty,\tag{16}$$

где $\bar{C}_2(p,s)=\bar{A}(p,s)$, $\bar{g}_2(p,s)=-\dfrac{\alpha_1}{\lambda\sqrt{p^2+\frac{s}{a}}}$,

$$\bar{f}_1(r,s)=\alpha_1\left(\bar{T}_{1c}(r,s)-\frac{T_0}{s}\right)+\bar{q}_1(r,s).$$

В общем случае $\alpha_1\geq 0$, $\alpha_2\geq 0$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, приходим к парным интегральным уравнениям с L-параметром вида

$$\int_0^\infty \left[1-\bar{g}(p,s)\right]\,\bar{C}(p,s)J_0(pr)\,dp=\bar{f}_1(r,s),\quad 0<r<R,\tag{17}$$

$$\int_0^\infty \bar{C}(p,s)J_0(pr)\,dp=\bar{f}_2(r,s),\quad R<r<\infty,\tag{18}$$

где $\bar{C}(p,s)=\left(\alpha_2+\lambda\sqrt{p^2+\frac{s}{a}}\right)\,\bar{A}(p,s)$, $\bar{g}(p,s)=\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2+\lambda\sqrt{p^2+\frac{s}{a}}}$.

Таким образом, решение смешанных двумерных осесимметричных задач нестационарной теплопроводности для полупространства при подводе к нему тепла через круг известного радиуса сводится к исследованию стандартных парных интегральных уравнений с *L*-параметром вида (13), (14), или (15), (16), или (17), (18), из которых требуется определить неизвестные аналитические функции-изображения соответственно $\bar{C}_1(p,s)$, или $\bar{C}_2(p,s)$, или $\bar{C}(p,s)$.

Рассмотрим сейчас метод решения парных интегральных уравнений (13), (14), например, в случае $\bar{f}_2(r,s)=0$ и $\bar{g}_1(p,s)=0$, что не нарушает общности, так как, доопределив функцию $\bar{f}_2(r,s)$ нулевым значением на интервале $0<r<R$, уравнение (14) всегда можно сделать однородным [5], включив известную функцию $\bar{f}_2(r,s)$ в правую часть уравнения (13).

В этом случае интегральные уравнения (13), (14) принимают вид

$$\int_0^\infty \bar{A}(p,s)J_0(pr)\,dp=\bar{T}_{1c}(r,s)-\frac{T_0}{s},\quad 0<r<R, \tag{19}$$

$$\int_0^\infty \bar{A}(p,s)\sqrt{p^2+\frac{s}{a}}\,J_0(pr)\,dp=0,\quad R<r<\infty. \tag{20}$$

Введем в рассмотрение новую неизвестную аналитическую функцию $\bar{\varphi}(r,s)$, связанную с функцией $\bar{A}(p,s)$ соотношением

$$\bar{A}(p,s)=\frac{p}{\sqrt{p^2+\frac{s}{a}}}\int_0^R \bar{\varphi}(t,s)\cos\left(t\sqrt{p^2+\frac{s}{a}}\right)dt, \tag{21}$$

подстановка которого обеспечивает автоматическое выполнение второго парного уравнения (20) за счет соответствующего разрывного интеграла при $R<r<\infty$ [6].

Подставив (21) в первое парное уравнение (19) и выполнив необходимые преобразования для определения неизвестной аналитической функции-изображения $\bar{\varphi}(r,s)$, приходим к одному интегральному уравнению вида [6]

$$\bar{\varphi}(r,s)-\frac{1}{\pi}\int_0^R \bar{\varphi}(t,s)\bar{K}_1(r,t,s)\,dt=\bar{F}_1(r,s),\quad 0<r<R, \tag{22}$$

где

$$\bar{K}_1(r,t,s)=\frac{\sin\left((t-r)\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{t-r}+\frac{\sin\left((t+r)\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{t+r},$$

$$\bar{F}_1(r,s)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{\left[\bar{T}_{1c}(r,s)-\frac{T_0}{s}\right]\mu\cos\left(\sqrt{\frac{s}{a}(r^2-\mu^2)}\right)}{\sqrt{r^2-\mu^2}}\,d\mu.$$

Рассмотрим метод определения неизвестной аналитической функции $\bar{\varphi}(r,s)$ из интегрального уравнения с *L*-параметром (22) в случае $\bar{T}_{1c}(r,s)=\frac{T}{s}\neq\frac{T_0}{s}$. Суть метода (подобно [7, 8]) состоит в том, что аналитическая функция $\bar{\varphi}(t,s)$ представляется функциональным рядом

$$\overline{\varphi}(t,s)=\frac{1}{s}\exp\left(-R\sqrt{\frac{s}{a}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t)\left(\sqrt{s}\right)^n, \tag{23}$$

а аналитическое ядро $\overline{K}_1(r,t,s)$ рядом

$$\overline{K}_1(r,t,s)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m(t,r)\left(\sqrt{s}\right)^m,$$

где

$$C_m(t,r)=\frac{\sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{m!}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^m\left[(t+r)^{m-1}+(t-r)^{m-1}\right]. \tag{24}$$

Тогда из уравнения (22) после определенных преобразований для определения функциональных коэффициентов $\varphi_n(t)$ получаем рекуррентную формулу

$$\varphi_n(t)=\frac{2}{\pi}(T_c-T_0)\ D_n(R,t)+\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\int_0^R C_m(\xi,t)\ \varphi_{n-m}(\xi)\ d\xi,\ 0<t<R, \tag{25}$$

где

$$D_n(R,t)=\frac{1}{n!}\left(\frac{R}{\sqrt{a}}\right)^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{t}{R}\right)^j\cos\left(j\frac{\pi}{2}\right),\quad \binom{n}{j}=\frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Можно доказать, что функциональные коэффициенты $\varphi_n(t)$, определяемые формулой (25), могут быть записаны в явном виде

$$\varphi_n(t)=2(T_c-T_0)\left(\sqrt{a}\right)^{-n}\sum_{i=0}^{n}b_{n,i}R^{n-i}t^i,\ 0<t<R, \tag{26}$$

где числовые коэффициенты $b_{n,i}$ определяются рекуррентно по формуле

$$b_{n,i}=\frac{1}{n!\pi}\binom{n}{i}\cos\left(i\frac{\pi}{2}\right)+\left[1+(-1)^i\right]\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j!\pi}\binom{j-1}{i}\sin\left(j\frac{\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{n-j}\frac{1}{j+k-i}b_{n-j,k},$$

причем очевидно, что $b_{n,i}=0$ для нечетных значений индекса i.

Подставив выражение $\varphi_n(t)$ из (26) в (23) и воспользовавшись формулами (21), (10), находим искомое решение в области изображений.

Отметим, что решение аналогичных смешанных задач математической физики возможно и в случае рассмотрения иных тел и способов задания смешанных граничных условий. Так, например, в работах [9, 10] определены закономерности развития двумерных нестационарных температурных полей в неограниченной изотропной пластине при смешанных на окружности граничных условиях на одной из ее поверхностей и любых несмешанных граничных условиях на другой ее поверхности; метод решения нестационарной задачи нагрева полупространства через бесконечно длинную полосу на его поверхности предложен в работе [11], а через кольцевую область – в работе [12]; модель изотропного непрозрачного полупространства при тепловом потоке, характерном для лазерного источника тепла, изучена в [13].

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967.
2. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. М., 1949. Ч. 1.
3. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л., 1977.
4. Sneddon I. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, 1969.

5. Козлов В.П., Мандрик П.А. Системы интегральных и дифференциальных уравнений с L-параметром в задачах математической физики и методы идентификации тепловых характеристик. Мн., 2000.

6. Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А. // ИФЖ. 1998. Т. 71. № 4. С. 734.

7. Они же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 2. С. 37.

8. Мандрик П.А. // Диф. уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 238.

9. Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А. // ИФЖ. 1999. Т. 72. № 3. С. 555.

10. Мандрик П.А. // ИФЖ. 2000. Т. 73. № 5. С. 902.

11. Он же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 1. С. 75.

12. Он же // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. междунар. конф., Минск, Беларусь, 15–19 февр. 2001 г. Мн., 2001. С. 107.

13. Козлов В.П., Мандрик П.А. // ИФЖ. 2000. Т. 73. № 3. С. 637.

Поступила в редакцию 12.03.2001.

УДК 517.983 + 517.984

А.Б. АНТОНЕВИЧ, В.И. БАХТИН, А.В. ЛЕБЕДЕВ

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ПО ЛЕЖАНДРУ МЕЖДУ СПЕКТРАЛЬНЫМ РАДИУСОМ И T-ЭНТРОПИЕЙ

The formula for the spectral radius of arbitrary weighted shift operators acting in L^p spaces is established. The formula contains as a component a new dynamic invariant – T-entropy (the mathematical analogue to the thermodynamical entropy). It is proved that the logarithm of the spectral radius and T-entropy are linked by the Legendre transform.



Антоневич Анатолий Борисович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа. Основное направление научных исследований – теория функциональных операторов и порожденных ими операторных алгебр.

Автор 200 публикаций, в том числе пяти монографий, двух учебников.

Бахтин Виктор Иванович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и математической физики. Основное направление научных исследований – асимптотический анализ стохастических и динамических систем.

Автор 45 публикаций.

Лебедев Андрей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических методов теории управления. Основное направление научных исследований – теория функциональных операторов и порожденных ими операторных алгебр.

Автор 80 публикаций, в том числе трех монографий.

Спектральный радиус и термодинамика. При решении разнообразных математических и физических проблем возникает необходимость ис-