

К УСЛОВИЯМ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЕКТОРНОЙ ОЦЕНКИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ

A multicriteria problem with a finite set of vector evaluations belonging to R^n is considered. Necessary and sufficient conditions of pareto-optimality of a vector evaluation are obtained in term of the sum of exponential functions for the case when all the vector evaluation components either positive or negative.

Известно, что проблема поиска всех эффективных (парето-оптимальных) решений многокритериальной (векторной) задачи оптимизации не разрешима с помощью приема линейной свертки частных критериев (см., например, [1]). Однако в случае дискретной задачи, т. е. задачи с конечным множеством векторных оценок, удалось показать [2], что линейная свертка показательных функций от частных критериев позволяет решить эту проблему. Тем самым получены необходимые и достаточные условия эффективности решений указанной векторной задачи. В этом контексте возникает вопрос: могут ли условия эффективности решения дискретной задачи быть сформулированы в терминах простейшей линейной свертки – суммы показательных функций от частных критериев? В данной статье дается положительный ответ на этот вопрос для некоторых классов многокритериальных дискретных задач.

Отметим, что аналогичный результат в терминах суммы положительных степеней критериев получен в [3].

Математическая постановка векторной задачи оптимизации предполагает задание на множестве решений X векторного критерия

$$y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) : X \rightarrow R^n, \quad n \geq 2,$$

компоненты которого, (частные) критерии, не исключая общности, будем считать минимизируемыми

$$y_i(x) \rightarrow \min_{x \in X}, \quad i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Через Y обозначим множество векторных оценок, т. е. образ множества X в критериальном пространстве R^n

$$Y = \{y = y(x) : x \in X\} \subseteq R^n.$$

Далее предполагаем, что Y – конечное множество, содержащее $|Y| \geq 2$ элементов. Будем рассматривать векторные задачи вне зависимости от специфики векторного критерия y . Поэтому перейдем к векторной задаче

$$y \rightarrow \min_{y \in Y},$$

которую с учетом предположения о конечности множества Y естественно называть дискретной.

Множество эффективных векторных оценок (множество Парето) зададим следующим образом:

$$P(Y) = \{y \in Y : \pi(y) = \emptyset\},$$

где

$$\begin{aligned} \pi(y) &= \{y' \in Y : I(y, y') \cup J(y, y') = N_n, \quad I(y, y') \neq \emptyset\}, \\ I(y, y') &= \{i \in N_n : y_i > y'_i\}, \\ J(y, y') &= \{i \in N_n : y_i = y'_i\}. \end{aligned}$$

Теорема. Пусть $Y \subset R^n, |Y| < \infty$. Предположим, что для вектора $\bar{y} \in Y$ выполняется одно из условий: $\bar{y}_i < 0$ для всех $i \in N_n$ или $\bar{y}_i > 0$ для всех $i \in N_n$. Векторная оценка $\bar{y}$ является эффективной тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$, $\kappa_i > 1, i \in N_n$, что для любого вектора $y \in Y$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \kappa_i^{y_i} \geq \sum_{i=1}^n \kappa_i^{\bar{y}_i}. \quad (1)$$

Для эффективной векторной оценки $\bar{y}$ в качестве вектора κ можно принять любой вектор $\bar{\kappa}$ с компонентами

$$\bar{\kappa}_i = \alpha^{\beta_i}, i \in N_n, \quad (2)$$

где

$$\alpha \geq n^\gamma, \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{\max\{|\bar{y}_i| : i \in N_n\}}{\min\{y_i - y'_i > 0 : y, y' \in Y, i \in N_n\}},$$

$$\beta_i = \frac{1}{|\bar{y}_i|}, \quad (4)$$

и тогда

$$\min\left\{\sum_{i=1}^n \bar{\kappa}_i^{y_i} : y \in Y\right\} = \begin{cases} n\alpha, & \text{если } \bar{y}_1 > 0, \\ n/\alpha, & \text{если } \bar{y}_1 < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Доказательство. Достаточность легко доказать методом от противного, принимая во внимание, что $\kappa_i > 1, i \in N_n$.

Необходимость. Пусть $y \in P(Y)$ и κ – некоторый вектор с компонентами, определяемыми формулой (2). Нетрудно видеть, что при выполнении любого из двух условий теоремы справедливы неравенства $\kappa_i > 1, i \in N_n$, поскольку числа γ и $\beta_i, i \in N_n$, и в том и другом случаях строго положительны.

Теперь докажем, что при $\kappa = \bar{\kappa}$ неравенство (1) верно для любого вектора $y \in Y$. Для этого разобьем множество Y на два непересекающихся подмножества

$$Y_1 = \{y \in Y : I(y, \bar{y}) \cup J(y, \bar{y}) = N_n\},$$

$$Y_2 = \{y \in Y : I(y, \bar{y}) \cup J(y, \bar{y}) \neq N_n\}.$$

Ясно, что для всякого вектора $y \in Y_1$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n \bar{\kappa}_i^{y_i} \geq \sum_{i=1}^n \bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i}. \quad (6)$$

Далее покажем, что это неравенство верно для любого $y \in Y_2$.

Пусть $y \in Y_2$. Тогда из включения $y \in P(Y)$ следует, что множества $I(y, \bar{y})$ и $I(\bar{y}, y)$ непусты. Поэтому для любых индексов $i \in I(y, \bar{y})$ и $j \in I(\bar{y}, y)$ из равенств

$$\bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i} = \alpha^{\text{sign } \bar{y}_i} = \bar{\kappa}_j^{\bar{y}_j}, i, j \in N_n, \quad (7)$$

справедливых в силу (2) и (4), выводим

$$\kappa_i^{y_i} > \bar{\kappa}_i^{y_i} = \bar{\kappa}_j^{\bar{y}_j} > \bar{\kappa}_j^{y_j}. \quad (8)$$

Учитывая (3) и левое неравенство в (8), находим, что

$$\alpha \geq n^\delta,$$

где $\delta = \max\{|\bar{y}_i| : i \in N_n\}/(y_i - \bar{y}_i)$, т. е. $\bar{\kappa}_i^{y_i} \geq n\bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i}$. Отсюда, принимая во внимание правое неравенство в (8), получим

$$\bar{\kappa}_i^{y_i} - \bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i} \geq (n-1)(\bar{\kappa}_j^{\bar{y}_j} - \bar{\kappa}_j^{y_j}),$$

откуда следует, что

$$\min\{\bar{\kappa}_i^{y_i} - \bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i} : i \in I(y, \bar{y})\} > (n-1) \max\{\bar{\kappa}_j^{y_j} - \bar{\kappa}_j^{\bar{y}_j} : j \in I(\bar{y}, y)\}.$$

Поэтому для любого вектора $y \in Y_2$ верно неравенство (6), поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{\kappa}_i^{y_i} - \sum_{i=1}^n \bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i} &= \sum_{i \in I(y, \bar{y})} (\bar{\kappa}_i^{y_i} - \bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i}) - \sum_{j \in I(\bar{y}, y)} (\bar{\kappa}_j^{y_j} - \bar{\kappa}_j^{\bar{y}_j}) \geq \\ &\geq \min\{\bar{\kappa}_i^{y_i} - \bar{\kappa}_i^{\bar{y}_i} : i \in I(y, \bar{y})\} - (n-1) \max\{\bar{\kappa}_j^{y_j} - \bar{\kappa}_j^{\bar{y}_j} : j \in I(\bar{y}, y)\} \geq 0. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (6) справедливо для любого вектора $y \in Y$, а следовательно, согласно (7) верно равенство (5).

Теорема 1 доказана.

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.

2. Емеличев В.А., Янушкевич О.А. // Дискретная математика. 1997. Вып. 9. № 3. С. 154.

3. Емеличев В.А., Пашкевич А.В., Янушкевич О.А. // Там же. 1999. Т. 11. Вып. 1. С. 140.

Поступила в редакцию 09.11.2000.

Пашкевич Андрей Васильевич – аспирант кафедры математической физики. Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор В.А. Емеличев.

