Краткие сообщения

УДК 517.929

Г.П. РАЗМЫСЛОВИЧ

К ПРОБЛЕМЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

The criterion for existence of the solutions of linear singular differential systems is proved. Analytic representation of these solutions is obtained.

Рассмотрим не разрешенную относительно производной систему уравнений вида

$$Ax(t) = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

где $x \in R^n$; A – постоянная $n \times n$-матрица; $f(t)$ – кусочно-непрерывная n-вектор-функция; x_0 – заданный n-вектор.

Считаем, что $A \neq 0$ и $\det A = 0$. Требуется в аналитической форме записать решение системы (1), (2). В отличие от многих других работ, посвященных решению этой проблемы, никаких дополнительных ограничений на параметры системы (1), (2) не накладывается (для более полного обозрения см., например, [1]).

Функцию $f(t)$, $t \geq 0$, назовем допустимой для системы (1), если система (1) для заданной $f(t)$ имеет хотя бы одно решение $x(t)$, $t>0$, такое, что $x(0)=x_0$.

Систему (1), (2) назовем совместной, если для каждой допустимой функции $f(t)$, $t \geq 0$, она имеет в точности одно решение.

Для решения указанной выше проблемы введем некоторые определения и укажем некоторые, связанные с ней результаты.

Пусть P – некоторое числовое поле и $A \in P_{n,n}$. Матрицу $X \in P_{n,n}$ назовем полуобратной для матрицы $A \in P_{n,n}$ и обозначим ее через A^-, если она удовлетворяет матричному уравнению $AXA=A$. Известно, что для любой матрицы A матричное уравнение $AXA=A$ разрешимо относительно X и это решение определяется неоднозначным образом. Если матрица A является невырожденной, то $A^- = A^{-1}$.

Следуя [2], докажем следующие утверждения.

Теорема 1. Кусочно-непрерывная функция $f(t)$, $t>0$, является допустимой для системы (1) тогда и только тогда, когда для любого t, $t>0$, выполняется равенство

$$(E_n - AA^-) f(t) = 0, \tag{3}$$

где E_n – единичная $n \times n$-матрица.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(t)$ является допустимой, которой соответствует решение $\varphi(t)$. Тогда для любого t, $t\geq 0$, выполняется равенство

$$A\dot{\varphi}(t) = f(t).$$

Умножим это равенство слева на матрицу $(E_n - AA^-)$. Учитывая, что $AA^-A = A$, получаем равенство (3).

Достаточность. Пусть для любого t, $t\geq 0$, выполняется равенство (3). Тогда $\bar{x}(t) = x_0 + \int_0^t A^- f(\tau)d\tau$ является решением задачи (1), (2). Действительно, используя (3), имеем

$$A\dot{\bar{x}}(t) = AA^- f(t) = f(t), \quad t \geq 0.$$

Итак, теорема доказана.

Теорема 2. Если функция $f(t)$, $t\geq 0$, является допустимой, то общее решение задачи (1), (2) описывается формулой

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A^- f(\tau)d\tau + \int_0^t (E_n - A^-A)u(\tau)d\tau, \qquad (4)$$

где $u(t)$, $t\geq 0$ – произвольная кусочно-непрерывная на промежутке $[0, +\infty)$ n-вектор-функция.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $x(0)=x_0$, и с учетом (3) видим, что $x(t)$, $t\geq 0$, определяемая формулой (4), является решением задачи (1), (2).

Пусть $\psi(t)$, $t\geq 0$, есть произвольное решение задачи (1), (2), т. е. $A\dot{\psi}(t) = f(t)$, $\psi(0) = x_0$. Тогда его можно получить из формулы (4), полагая $u(t) = \dot{\psi}(t)$, $t \geq 0$. Действительно,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A^- f(\tau)d\tau + \int_0^t (E_n - A^-A)\dot{\psi}(\tau)d\tau = x_0 + \int_0^t A^- f(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \dot{\psi}(\tau)d\tau - \int_0^t A^- f(\tau)d\tau = x_0 + \int_0^t \dot{\psi}(\tau)d\tau = x_0 + \psi(\tau)\Big|_0^t =$$

$$= x_0 + \psi(t) - \psi(0) = \psi(t).$$

Теорема доказана.

Замечания.

1. Если матрица A является невырожденной, то любая кусочно-непрерывная n-вектор-функция $f(t)$, $t\geq 0$, является допустимой и решение системы (1), (2) описывается известной формулой $x(t) = x_0 + \int_0^t A^{-1} f(\tau)d\tau$.

2. В общем случае результаты теорем 1, 2 не зависят от выбора полуобратной матрицы A^-, и задача Коши (1), (2) имеет неединственное решение.

1. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М., Асмыкович И.К. Дескрипторные системы управления. Мн., 1988.
2. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1980.
3. Размыслович Г.П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1993. № 2. С. 76.

Поступила в редакцию 15.09.2000.

Размыслович Григорий Прокофьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики БГУ.