$$\Phi^{n}_{h_1\ldots h_p}(y_2,\ldots,y_p)=\frac{(2\pi)^{1-p}}{(n-\max\limits_{i=\overline{1,p}} h_i)}\frac{\sin\frac{(n-h_1)(-y_2-\ldots-y_p)}{2}}{\sin\frac{(-y_2-\ldots-y_p)}{2}}\prod_{j=2}^{p}\frac{\sin\frac{(n-h_j)y_j}{2}}{\sin\frac{y_j}{2}}.$$

В силу свойств ядерной функции очевидно, что $I \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Таким образом, теорема доказана.

Между вариограммой $\nu(h)$, $h\in Z$, и ковариационной функцией $\sigma(h)$, $h\in Z$, существует связывающее их соотношение [1]. Асимптотическое поведение семиинвариантов высших порядков оценки ковариационной функции рассматривалось, например, в работе [3].

1. Cressie N., Grondona M.O. A comparision of variogram estimation with covariogram estimation // The Art of Statistical Science. 1992. C. 191.
2. Труш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.
3. Труш Н.Н., Шабуневич Т.В. // Статистический и прикладной анализ временных рядов: Сб. тр. междунар. науч. конф. Брест, 1997. С. 49.

Поступила в редакцию 27.09.2000.

Труш Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики БГУ.

Цеховая Татьяна Вячеславовна – инженер-программист ФПК по ПМ и ЭВМ БГУ.

УДК 519.24

Н.В. МАРКОВСКАЯ

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНОК СМЕШАННЫХ МОМЕНТОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

In this article limit distribution of estimates of mixed moments of higher orders of stationary stochastic processes is found under limitation on mixed cumulants.

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $x(t)$, $t\in Z=\{0, \pm1, \ldots\}$. Предположим, что $Mx(t)=0$, $t\in Z$. Обозначим $m_n(t_1, \ldots, t_{n-1})$ – смешанный момент n-го порядка, $c_n(t_1, \ldots, t_{n-1})$ – смешанный семиинвариант n-го порядка, $f_n(t_1, \ldots, t_{n-1})$ – семиинвариантную спектральную плотность n-го порядка, $t_j\in Z$, $x_j\in \Pi$, $j=\overline{1,n-1}$, $n\geq 2$, $f_2(x)=f(x)$, $x\in\Pi$.

Пусть смешанный момент n-го порядка неизвестен и требуется по T последовательным через равные промежутки наблюдениям

$$x(0),\ x(1),\ \ldots,\ x(T-1)$$

за процессом $x(t)$, $t\in Z$, построить его оценку и исследовать ее статистические свойства.

Для смешанного момента n-го порядка построим оценку вида

$$\hat{m}_n(t_1,\ldots,t_{n-1})=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} x(t_1+t)x(t_2+t)\ \ldots\ x(t_{n-1}+t)x(t), \qquad (1)$$

$t,t_j\in Z$, $j=\overline{1,n-1}$, $n\geq 2$.

В работе [3] показано, что построенная оценка смешанного момента n-го порядка (1) является несмещенной оценкой для смешанного момента n-го порядка и состоятельной в среднеквадратическом смысле.

Статистические свойства оценки $\hat{m}_2(t)$ достаточно полно исследованы в работах [2–9], так как

$$\hat{m}_2(t) = \hat{R}(t),$$

где $t \in Z$, $\hat{R}(t)$ – оценка ковариационной функции стационарного случайного процесса $x(t)$, $t \in Z$.

Статистические свойства оценок $\hat{m}_3(i, j)$ и $\hat{m}_4(i, j, k)$, $i, j, k \in Z$, исследованы в работе [3].

Используя семиинвариантный подход, найдем предельное распределение исследуемой оценки смешанного момента n-го порядка (1).

Определение неразложимых разбиений можно найти в работе [1].

Теорема 1. [1] *Рассмотрим набор случайных величин* x_{ij}, $j = 1, \ldots, J_i$, $i = 1, \ldots, I$. *Введем* I *случайных величин*

$$Y_i = \prod_{j=1}^{J_i} x_{ij}, i = 1, \ldots, I.$$

Тогда совместный кумулянт $\operatorname{cum}(Y_1, \ldots, Y_I)$ *задается формулой*

$$\sum_{\nu} \operatorname{cum}\left(x_{ij}; (i, j) \in \nu_1\right) \ldots \operatorname{cum}\left(x_{ij}; (i, j) \in \nu_p\right),$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям $\nu = \nu_1 \cup \ldots \cup \nu_p$.

Теорема 2. *Если выполняется соотношение*

$$\sum_{u_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{u_{m-1}=-\infty}^{\infty} \left|\operatorname{cum}\left\{x(u_i + \tau_{ij}); (i, j) \in \nu_s\right\}\right| < \infty, \tag{2}$$

$s = 1, \ldots, p$, $\nu = \nu_1 \cup \ldots \cup \nu_p$ *– неразложимое разбиение, то*

$$\operatorname{cum}\left\{\hat{m}_{n_1}\left(k_1^1, \ldots, k_{n_1-1}^1\right), \ldots, \hat{m}_{n_m}\left(k_1^m, \ldots, k_{n_m-1}^m\right)\right\} \xrightarrow[T \to \infty]{} 0 \tag{3}$$

для $m > 2$, *где* $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n_l}$, $l = \overline{1, m}$.

Доказательство. Используя свойства семиинвариантов, приведенные в работе [1], можно записать, что

$$\operatorname{cum}\left\{\hat{m}_{n_1}\left(k_1^1, \ldots, k_{n_1-1}^1\right), \ldots, \hat{m}_{n_m}\left(k_1^m, \ldots, k_{n_m-1}^m\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{T^m} \sum_{t_1=0}^{T-1} \ldots \sum_{t_m=0}^{T-1} \operatorname{cum}\left\{x(t_1 + k_1^1) \ldots x(t_1 + k_{n_1-1}^1) x(t_1), \ldots, x(t_m + k_1^m) \ldots x(t_m + k_{n_m-1}^m) x(t_m)\right\}.$$

Обозначим $\operatorname{cum}\{x(t_i+\tau_{ij}), (i,j) \in \nu_s\}$ – совместный кумулянт наблюдений случайного процесса $x(t_i + \tau_{ij})$ с индексами $(i, j) \in \nu_s$, $s = 1, \ldots, p$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n_l}$, $l = \overline{1, m}$, а $Y_i = \prod_{j=1}^{n_i} x(t_i + \tau_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, m}$, $\tau_{ij} = k_j^i$, $j = \overline{1, n_i - 1}$, $i = \overline{1, m}$, $\tau_{in_i} = 0$, $i = \overline{1, m}$, тогда согласно теореме 1

$$\operatorname{cum}\left\{x(t_1 + k_1^1) \ldots x(t_1 + k_{n_1-1}^1) x(t_1), \ldots, x(t_m + k_1^m) \ldots x(t_m + k_{n_m-1}^m) x(t_m)\right\} =$$

$$= \sum_{\nu = \bigcup_{i=1}^{p} \nu_i} \operatorname{cum}\left\{x(t_i + \tau_{ij}); (i, j) \in \nu_1\right\} \times \ldots \times \operatorname{cum}\left\{x(t_i + \tau_{ij}); (i, j) \in \nu_p\right\}, \tag{4}$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям $\nu = \nu_1 \cup \ldots \cup \nu_p$. Значит,

$$\operatorname{cum}\left\{\hat{m}_{n_1}\left(k_1^1, \ldots, k_{n_1-1}^1\right), \ldots, \hat{m}_{n_m}\left(k_1^m, \ldots, k_{n_m-1}^m\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{T^m} \sum_{t_1=0}^{T-1} \ldots \sum_{t_m=0}^{T-1} \sum_{\nu = \bigcup_{i=1}^{p} \nu_i} \operatorname{cum}\left\{x(t_i + \tau_{ij}); (i,j) \in \nu_1\right\} \times \ldots \times \operatorname{cum}\left\{x(t_i + \tau_{ij}); (i,j) \in \nu_p\right\}.$$

Введем новые индексы суммирования: $t = t_m$, $u_j = t_j - t_m$, $j = 1, \ldots, m-1$, $u_m = 0$, тогда

$$\operatorname{cum}\left\{\hat{m}_{n_1}\left(k_1^1, \ldots, k_{n_1-1}^1\right), \ldots, \hat{m}_{n_m}\left(k_1^m, \ldots, k_{n_m-1}^m\right)\right\} = \frac{1}{T^m} \sum_{u_1=-(T-1)}^{T-1} \ldots \sum_{u_{m-1}=-(T-1)}^{T-1} \sum_{t=0}^{T-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu = \bigcup_{i=1}^{p} \nu_i} \operatorname{cum}\left\{x(u_i + t + \tau_{ij}); (i,j) \in \nu_1\right\} \times \ldots \times \operatorname{cum}\left\{x(u_i + t + \tau_{ij}); (i,j) \in \nu_p\right\}.$$

Используя стационарность процесса $x(t)$, запишем:

$$\operatorname{cum}\left\{\hat{m}_{n_1}\left(k_1^1, \ldots, k_{n_1-1}^1\right), \ldots, \hat{m}_{n_m}\left(k_1^m, \ldots, k_{n_m-1}^m\right)\right\} = \frac{1}{T^{m-1}} \sum_{u_1=-(T-1)}^{T-1} \ldots \sum_{u_{m-1}=-(T-1)}^{T-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu = \bigcup_{i=1}^{p} \nu_i} \operatorname{cum}\left\{x(u_i + \tau_{ij}); (i,j) \in \nu_1\right\} \times \ldots \times \operatorname{cum}\left\{x(u_i + \tau_{ij}); (i,j) \in \nu_p\right\},$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям.

Используя условие теоремы, правая часть стремится к нулю при $T \to \infty$. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3. *Если выполняется соотношение* (2), *то оценка смешанного момента n-го порядка* $\hat{m}_n(k_1, \ldots, k_{n-1})$ *имеет асимптотическое нормальное распределение с математическим ожиданием* $m_n(k_1, \ldots, k_{n-1})$ *и асимптотической ковариационной структурой, удовлетворяющей соотношению* (10) *из работы* [3].

Доказательство следует из теоремы 4 работы [3], теоремы 2 данной работы и леммы Д4.5 из работы [1].

1. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М., 1980.
2. Марковская Н.В. // Тр. науч. конф. «Актуальные проблемы информатики», Минск, 14–18 мая 1996 г. Мн., 1996. С. 154.
3. Марковская Н.В. Статистические свойства оценок смешанных моментов высших порядков // 56-я научная конференция студентов и аспирантов: Материалы конф. Мн., 1999.
4. Она же. Статистические свойства оценки взаимной ковариационной функции. Мн., 1999. 35 с. Деп. в БелИСА 18.11.1999 г. № Д1999116.
5. Труш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.
6. Труш Н.Н., Марковская Н.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 2. С. 45.
7. Труш Н.Н., Марковская Н.В. // Статистический и прикладной анализ временных рядов: Сб. науч. тр. Брест, 1997. С. 16.
8. Труш Н.Н., Марковская Н.В. // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1999. № 4. С. 33.
9. Fonollosa J.A. R. // IEEE Transactions on signal processing. Vol. 43. № 4. P. 967.

Поступила в редакцию 12.10.2000.

Марковская Наталья Вацлавовна – преподаватель кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики (ГрГУ им. Я. Купалы).