$$B_r = B_1 + \frac{1}{6}\left(a_1^k - a_r^k + 2\left(\frac{a_1'}{a_1} - \frac{a_r'}{a_r}\right) + 4\left(\sum_j \frac{a_1' - a_j'}{a_1 - a_j} - \sum_j \frac{a_r' - a_j'}{a_r - a_j}\right) \right)$$

$$(r = \overline{2,6}), \tag{15}$$

при этом имеет место условие

$$\sum_{i=1}^{6} a_i^k = 8\sum_{k=1}^{6}\sum_{j=2}^{6} \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - 16\sum_{j=1}^{6} \frac{a_j'}{a_j} \quad (k < j). \tag{16}$$

Аналогично, если имеет место случай (13), то решения системы $(S)_4$ следующие:

$$B_r = B_1 + \frac{1}{6}\left(\phi(a_1) - \phi(a_r) + 2\left(\frac{a_1'}{a_1} - \frac{a_r'}{a_r}\right) + 4\left(\sum_j \frac{a_1' - a_j'}{a_1 - a_j} - \sum_j \frac{a_r' - a_j'}{a_r - a_j}\right) \right)$$

$$(r = \overline{2,6}), \tag{17}$$

при этом имеет место условие

$$\sum_{j=1}^{6} \phi(a_i) = 8\sum_{k=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - 16\sum_{j=1}^{6} \frac{a_j'}{a_j} \quad (k < j). \tag{18}$$

Из вышесказанного следуют две теоремы.

Теорема 1. Если имеет место условие (16), то решение системы Шази (2′) имеет вид (15).

Теорема 2. Если имеет место условие (18), то решение системы Шази (2′) имеет вид (17).

1. Chasy J. // Acta math. 1911. Vol. 34. P. 317.
2. Лукашевич Н.А. // Диф. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 353.

Поступила в редакцию 01.02.1999.

Чичурин Александр Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений (БрГУ им. А.С. Пушкина).

УДК 519.62

В.И. РЕПНИКОВ

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

The main properties of some functionals connected with special type linear differential systems are discussed.

При конструировании численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений традиционно важным является вопрос об уровне адекватности в поведении решений исходной дифференциальной задачи и аппроксимирующей ее разностной схемы. Поэтому для повышения качества разностных схем, ориентированных на решение определенного класса задач, представляется обязательным этап аналитического изучения характеристик, связанных с решениями задач данного класса.

В предлагаемой работе объектом исследования будет задача Коши

$$\dot{u}(t) + Au(t) = 0, \tag{1}$$

$$u(t_0) = u_0, \tag{2}$$

с симметричной положительно определенной матрицей A.

Пусть $\{\lambda_i, \xi^i\}$ – множество собственных значений и ортонормированных собственных векторов матрицы A:

$$A\xi^i = \lambda_i \xi^i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

так что

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n,\ (\xi^i, \xi^j) = \delta_i^j,$$

где δ_i^j – символ Кронекера.

В этих обозначениях общее решение системы (1) имеет вид

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \xi^i \exp(-\lambda_i t), \tag{3}$$

где постоянные $c_i\ (i = 1, 2, \ldots,\ n)$ определяются из начальных условий (2).

Введем в рассмотрение величины

$$\delta_k(u(t)) = \|u(t)\|_k^2 = (A^k u(t), u(t)),\ k \in Z,$$

которые представляют собой квадрат энергетической нормы вектора $u(t)$ в гильбертовом пространстве H_{A^k}.

В развитие [1] рассмотрим функционал вида

$$J_l^k(u(t)) = \frac{\begin{vmatrix} \delta_k(u(t)) & \delta_{k+1}(u(t)) & \ldots & \delta_{k+l}(u(t)) \\ \delta_{k+1}(u(t)) & \delta_{k+2}(u(t)) & \ldots & \delta_{k+l+1}(u(t)) \\ & & \ldots & \\ \delta_{k+l-1}(u(t)) & \delta_{k+l}(u(t)) & \ldots & \delta_{k+2l-1}(u(t)) \\ \delta_{k+l+1}(u(t)) & \delta_{k+l+2}(u(t)) & \ldots & \delta_{k+2l+1}(u(t)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_k(u(t)) & \delta_{k+1}(u(t)) & \ldots & \delta_{k+l}(u(t)) \\ \delta_{k+1}(u(t)) & \delta_{k+2}(u(t)) & \ldots & \delta_{k+l+1}(u(t)) \\ & & \ldots & \\ \delta_{k+l-1}(u(t)) & \delta_{k+l}(u(t)) & \ldots & \delta_{k+2l-1}(u(t)) \\ \delta_{k+l}(u(t)) & \delta_{k+l+1}(u(t)) & \ldots & \delta_{k+2l}(u(t)) \end{vmatrix}},\ k \in Z,\ 0 \le l \le n-1, \tag{4}$$

и исследуем его поведение на решениях системы (1).

Имеет место

Лемма 1. На решениях системы (1) справедливо соотношение (для сокращения записи аргумент t будем опускать)

$$\frac{d}{dt} J_l^k(u) = \frac{\begin{vmatrix} \delta_k(u) & \ldots & \delta_{k+l-1}(u) \\ \delta_{k+1}(u) & \ldots & \delta_{k+l}(u) \\ & \ldots & \\ \delta_{k+l-1}(u) & \ldots & \delta_{k+2l-2}(u) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_k(u) & \ldots & \delta_{k+l+1}(u) \\ \delta_{k+1}(u) & \ldots & \delta_{k+l+2}(u) \\ & \ldots & \\ \delta_{k+l+1}(u) & \ldots & \delta_{k+2l+2}(u) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_k(u) & \ldots & \delta_{k+l}(u) \\ \delta_{k+1}(u) & \ldots & \delta_{k+l+1}(u) \\ & \ldots & \\ \delta_{k+l}(u) & \ldots & \delta_{k+2l}(u) \end{vmatrix}^2}. \tag{5}$$

Доказательство. Перепишем (4) в виде $J_l^k(u)=\frac{\Delta_ч}{\Delta_з}$ с естественным смыслом обозначений. Тогда

$$\frac{d}{dt}J_l^k(u)=\frac{\frac{d}{dt}\Delta_ч\cdot\Delta_з-\Delta_ч\cdot\frac{d}{dt}\Delta_з}{\Delta_з^2}. \qquad (6)$$

Поскольку для решений системы (1) выполняется соотношение

$$\dot{\delta}_k(u)=\frac{d}{dt}\left(A^k u,u\right)=\left(A^k\dot{u},u\right)+\left(A^k u,\dot{u}\right)=-2\left(A^{k+1}u,u\right)=-2\delta_{k+1}(u),$$

то, используя правило дифференцирования определителя, получим:

$$\frac{d}{dt}\Delta_з=\sum_{i=0}^{l}\begin{vmatrix}\delta_k(u) & \dots & \delta_{k+l}(u)\\ & \dots & \\ \delta_{k+i-1}(u) & \dots & \delta_{k+l+i-1}(u)\\ \dot{\delta}_{k+i}(u) & \dots & \dot{\delta}_{k+l+i}(u)\\ \delta_{k+i+1}(u) & \dots & \delta_{k+l+i+1}(u)\\ & \dots & \\ \delta_{k+l}(u) & \dots & \delta_{k+2l}(u)\end{vmatrix}=-2\sum_{i=0}^{l}\begin{vmatrix}\delta_k(u) & \dots & \delta_{k+l}(u)\\ & \dots & \\ \delta_{k+i-1}(u) & \dots & \delta_{k+l+i-1}(u)\\ \delta_{k+i+1}(u) & \dots & \delta_{k+l+i+1}(u)\\ \delta_{k+i+1}(u) & \dots & \delta_{k+l+i+1}(u)\\ & \dots & \\ \delta_{k+l}(u) & \dots & \delta_{k+2l}(u)\end{vmatrix}=-2\Delta_ч. \qquad (7)$$

Аналогично, применяя формулу Фробениуса [2, с. 34], найдем:

$$\frac{d}{dt}\Delta_ч=-2\begin{vmatrix}\delta_k(u) & \dots & \delta_{k+l-1}(u) & \delta_{k+l+1}(u)\\ & & \dots & \\ \delta_{k+l-1}(u) & \dots & \delta_{k+2l-2}(u) & \delta_{k+2l}(u)\\ \delta_{k+l}(u) & \dots & \delta_{k+2l}(u) & \delta_{k+2l+2}(u)\end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Подставляя (7), (8) в (6) и используя детерминантное тождество Сильвестра [2, с. 32], получим требуемое.

Заметим, что определители, входящие в (4), (5), являются определителями Грамма для соответствующим образом подобранных систем векторов. Поэтому непосредственным следствием доказанной леммы является

Теорема 1. Пусть в представлении (3) отличны от нуля $p\geq l+1$ коэффициентов c_i. Тогда

1) если $p=l+1$, то функционал (4) постоянен при любых $k\in Z$ и t на решениях системы (1);

2) если $p>l+1$, то при любых $k\in Z$ функционал (4) монотонно убывает по t на решениях системы (1).

Используя детерминантное тождество Сильвестра, несложно показать также, что при любом $k\in Z$ и $p>l+1$ для функционала (4) выполняется соотношение $J_l^k(u)<J_l^{k+1}(u)$, из которого в свою очередь следует более общее неравенство

$$J_l^i(u)<J_l^j(u),\ i,j\in Z,\ i<j. \qquad (9)$$

Покажем теперь, что на решениях системы (1) функционал (4) ограничен. При этом будем предполагать, что все собственные значения матрицы A различны.

Так как $\sigma_j(u)=\sum_{i=1}^{n} c_i^2\lambda_i^j \exp(-2\lambda_i t)$, то, воспользовавшись свойством n-линейности определителя [2, с. 11], получим:

$$\Delta_ч=\sum_{i_0=1}^{n}\dots\sum_{i_l=1}^{n}\prod_{j=0}^{l}\left(c_{i_j}^2\lambda_{i_j}^k\exp\left(-2\lambda_{i_j}t\right)\right)\begin{vmatrix}1 & \lambda_{i_1} & \dots & \lambda_{i_l}\\ \lambda_{i_0} & \lambda_{i_1}^2 & \dots & \lambda_{i_l}^{l+1}\\ & & \dots & \\ \lambda_{i_0}^{l-1} & \lambda_{i_1}^{l} & \dots & \lambda_{i_l}^{2l-1}\\ \lambda_{i_0}^{l+1} & \lambda_{i_1}^{l+1} & \dots & \lambda_{i_l}^{2l+1}\end{vmatrix}.$$

Пусть $C_n^{l+1}(1,2,\dots,\ n)$ – множество всех упорядоченных сочетаний из первых n чисел натурального ряда по $l+1$. Тогда последнее равенство можно записать в виде

$$\Delta_ч=\sum_{\pi_{l+1}\in C_n^{l+1}(1,2,\dots,n)} S(\pi_{l+1}), \tag{10}$$

где

$$S(\pi_{l+1})=\sum_{(i_0,i_1,\dots,i_l)\in\pi_{l+1}}\prod_{j=0}^{l}\left(c_{i_j}^2\lambda_{i_j}^k\exp\left(-2\lambda_{i_j}t\right)\right)\begin{vmatrix}1 & \lambda_{i_1} & \dots & \lambda_{i_l}^{l}\\ \lambda_{i_0} & \lambda_{i_1}^2 & \dots & \lambda_{i_l}^{l+1}\\ & & \dots & \\ \lambda_{i_0}^{l-1} & \lambda_{i_1}^{l} & \dots & \lambda_{i_l}^{2l-1}\\ \lambda_{i_0}^{l+1} & \lambda_{i_1}^{l+1} & \dots & \lambda_{i_l}^{2l+1}\end{vmatrix},$$

а суммирование в последней формуле распространяется на все перестановки данного сочетания $\pi_{l+1}=(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$.

Поскольку произведение, стоящее под знаком суммы, для данной перестановки является величиной постоянной, то

$$S(\pi_{l+1})=\prod_{j=0}^{l}\left(c_{\alpha_j}^2\lambda_{\alpha_j}^k\exp\left(-2\lambda_{\alpha_j}t\right)\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_{\alpha_0} & \lambda_{\alpha_1} & \dots & \lambda_{\alpha_l}\\ & & \dots & \\ \lambda_{\alpha_0}^{l-1} & \lambda_{\alpha_1}^{l-1} & \dots & \lambda_{\alpha_l}^{l-1}\\ \lambda_{\alpha_0}^{l} & \lambda_{\alpha_1}^{l} & \dots & \lambda_{\alpha_l}^{l}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_{\alpha_0} & \lambda_{\alpha_1} & \dots & \lambda_{\alpha_l}\\ & & \dots & \\ \lambda_{\alpha_0}^{l-1} & \lambda_{\alpha_1}^{l-1} & \dots & \lambda_{\alpha_l}^{l-1}\\ \lambda_{\alpha_0}^{l+1} & \lambda_{\alpha_1}^{l+1} & \dots & \lambda_{\alpha_l}^{l+1}\end{vmatrix}. \tag{11}$$

Выполнив аналогичные преобразования над знаменателем, найдем

$$\Delta_з=\sum_{\pi_{l+1}\in C_n^{l+1}(1,2,\dots,n)} S_1(\pi_{l+1}), \tag{12}$$

где

$$S_1(\pi_{l+1})=\prod_{j=0}^{l}\left(c_{\alpha_j}^2\lambda_{\alpha_j}^k\exp\left(-2\lambda_{\alpha_j}t\right)\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_{\alpha_0} & \lambda_{\alpha_1} & \dots & \lambda_{\alpha_l}\\ & & \dots & \\ \lambda_{\alpha_0}^{l-1} & \lambda_{\alpha_1}^{l-1} & \dots & \lambda_{\alpha_l}^{l-1}\\ \lambda_{\alpha_0}^{l} & \lambda_{\alpha_1}^{l} & \dots & \lambda_{\alpha_l}^{l}\end{vmatrix}^2. \tag{13}$$

Пусть $m \geq 1$ – произвольное натуральное число и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ – произвольный набор различных вещественных чисел, $\sigma_j \, (j = 1, \ldots, m)$ – элементарные симметрические функции. Введем обозначение

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_m \\ & & \ldots & \\ \beta_1^{j-1} & \beta_2^{j-1} & \ldots & \beta_m^{j-1} \\ \beta_1^{j+1} & \beta_2^{j+1} & \ldots & \beta_m^{j+1} \\ & & \ldots & \\ \beta_1^m & \beta_2^m & \ldots & \beta_m^m \end{vmatrix}, \; 0 < j < m.$$

Тогда справедлива

Лемма 2. $\Delta_j = \sigma_{m-j} \Delta_m$.

Доказательство. Рассмотрим определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_m & \lambda \\ & & \ldots & & \\ \beta_1^m & \beta_2^m & \ldots & \beta_m^m & \lambda^m \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $\Delta(\lambda)$ – многочлен степени m, корнями которого будут числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Разлагая $\Delta(\lambda)$ по элементам последнего столбца, можем записать:

$$\Delta(\lambda) = \Delta_n \left(\lambda^m - \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} \lambda^{m-1} + \cdots + (-1)^m \frac{\Delta_0}{\Delta_m} \right).$$

Отсюда с учетом теоремы Виета следует утверждение леммы.

На основании леммы 2 из формул (11), (13) имеем:

$$\frac{S(\pi_{l+1})}{S_1(\pi_{l+1})} = \lambda_{\alpha_0} + \lambda_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_{\alpha_l}. \qquad (14)$$

Следовательно, для любого сочетания $\pi_{l+1} \in C_n^{l+1}(1, 2, \ldots, n)$ справедлива оценка

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{l+1} \leq \frac{S(\pi_{l+1})}{S_1(\pi_{l+1})} \leq \lambda_{n-l} + \lambda_{n-l+1} + \cdots + \lambda_n,$$

а так как $S(\pi_{l+1}) > 0$ и $S_1(\pi_{l+1}) > 0$ для любого π_{l+1}, то точно такая же оценка будет иметь место и для функционала $J_l^k(u)$, что и означает его ограниченность.

Кроме того, из (10)–(13) следует, что

$$\lim_{t \to \infty} J_l^k(u(t)) = \frac{S(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)}{S_1(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)} = \lambda_{\alpha_0} + \lambda_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_{\alpha_l}, \qquad (15)$$

где $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_l$ – наименьшие значения индексов коэффициентов разложения (3), отличных от нуля.

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть все собственные значения матрицы A различны и в разложении (3) отличны от нуля $p \geq l+1$ коэффициентов c_i. Тогда

1) для функционала (4) выполняется неравенство

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{l+1} \leq J_l^k(u) < \lambda_{n-l} + \lambda_{n-l+1} + \cdots + \lambda_n ; \qquad (16)$$

2) при $p = l+1$ функционал (4) постоянен для любого t и

$$J_l^k(u) = \lambda_{\alpha_0} + \lambda_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_{\alpha_l} , \qquad (17)$$

где $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_l$ – индексы коэффициентов (3), отличных от нуля;

3) при $p > l+1$ функционал (4) монотонно убывает по t и для него справедливо соотношение (15).

В заключение заметим, что если среди собственных чисел матрицы A имеются одинаковые, то все полученные результаты остаются верными с некоторыми изменениями в формулировках, касающимися нумерации спектра.

1. Бобков В.В., Мандрик П.А., Репников В.И. Деп. в БелНИИНТИ 12.03.84. № 864Бе – Д84.
2. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Алгебраические основы численного анализа. Новосибирск, 1986.

Поступила в редакцию 03.10.2000.

Репников Василий Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики БГУ.

УДК 612.821:007

В.И. ЕМЕЛЬЯНЕНКОВ, Л.Н. БАТУРИНА

ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

The methodological approaches to the decision of a task of a rating of results of scientific researches and development of innovative processes, and also revealing of priority directions of scientific activity are investigated. For structuation of the decision of a task the dynamic model of growth in conditions of the transitive period of economy is used.

Крайне актуальной является задача форсирования темпов развития экономики на основе широкомасштабного использования достижений научно-технического прогресса в производстве. В частности, многие авторы предлагают опереться на модель Солоу в ее современных модификациях, которые обосновывают возможность интенсификации процесса инновационного накопления капитала в результате сокращения уровня текущего потребления.

Существование оптимально быстрой траектории еще не означает автоматически ее практическую осуществимость, поскольку выводы оптимизационных моделей должны проверяться оценками ресурсных возможностей, которые далеко не всегда могут вводиться в них непосредственно в виде ограничений. Поэтому в предлагаемой работе исследуется регламент оценки режимов допустимого накопления капитала, дополняющий задачу анализа и прогнозирования параметров переходной экономики моделями расширяющейся экономики.

В неоклассическом варианте, например в работе [1], изучены условия равновесного роста при следующих предположениях: