

О СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ШАЗИ

Solution of the linear system of the six order is found. This system is necessary condition of nonlinear differential equation of third order belonging to P -type.

Известно ([1]), что необходимые и достаточные условия принадлежности к P -типу уравнения

$$w'' = \sum_{k=1}^6 \frac{(w' - a'_k)(w'' - a''_k) + A_k(w' - a'_k)^3 + B_k(w' - a'_k)^2 + C_k(w' - a'_k) + Dw'' + Ew' + \prod_{i=1}^6 (w - a_i) \sum_{k=1}^6 \frac{F_k}{w - a_k}}{w - a_k} \quad (A)$$

представляют собой систему (S), состоящую из 31 уравнения, которые связывают 32 коэффициента уравнения (A): $a_k, A_k, B_k, C_k, D, E, F_k$ ($k = \overline{1,6}$). Систему из первых девяти уравнений, связывающую функции a_k, A_k ($k = \overline{1,6}$), решил Н.А. Лукашевич. В работе [2] он показал, что функции A_k выражаются через функции a_k следующим образом

$$A_k = -\frac{1}{a_k} \quad (k = \overline{1,6}). \quad (1)$$

Следующая подсистема системы (S) связывает функции a_k, A_k, B_k ($k = \overline{1,6}$) и имеет вид ([2])

$$\begin{aligned} -\left(\frac{5}{2}A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j}\right)B_k + \sum_j \left(\frac{1}{2}A_k + \frac{1}{a_k - a_j}\right)B_j = -A'_k + A_k \sum_j \frac{a'_k - a'_j}{a_k - a_j} - \\ -3 \sum_j A_j \frac{a'_k - a'_j}{a_k - a_j} + \frac{3}{2}A_k \sum_{j=1}^6 a'_j A_j \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j). \end{aligned} \quad (2)$$

В данной работе предпринята попытка найти условия для коэффициентов a_k ($k = \overline{1,6}$), выполнение которых гарантирует существование решения системы (2). Неизвестными в системе (2) являются функции B_k ($k = \overline{1,6}$). При найденных коэффициентных условиях для a_k ($k = \overline{1,6}$) укажем вид решения системы (2). Полученный результат сформулируем в виде двух теорем.

Перепишем систему (2) в виде

$$\frac{1}{2a_k} \left[\alpha_{kk} B_k + \sum_j (\alpha_{kj} B_j) \right] = \frac{\beta_k}{2a_k} \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j), \quad (2')$$

$$\text{где } \alpha_{kk} = \sum_j \frac{a_k + a_j}{a_k - a_j}, \quad \alpha_{kj} = \frac{a_k + a_j}{a_k - a_j}, \quad \beta_k = \sum_j \frac{4a_j a'_k + (3a_k - 7a_j) a'_j}{a_j (a_k - a_j)} + \frac{2a'_k}{a_k}.$$

После преобразований β_k примут вид

$$\beta_k = 2 \frac{a'_k}{a_k} + 4 \sum_j \frac{a'_k - a'_j}{a_k - a_j} - \sum_{i=1}^6 \frac{a'_i}{a_i}.$$

Так как $a_k \neq 0$, то умножим обе части системы (2') на $2a_k$. В результате получим равносильную систему вида

$$\alpha_{kk}B_k + \sum_j (\alpha_{kj}B_j) = \beta_k \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j). \quad (2'')$$

Система (2'') является линейной системой 6-го порядка относительно неизвестных B_j ($j = \overline{1,6}$). Найдем значение главного определителя этой системы. Прежде всего заметим, что

$$\alpha_{kk} = -\sum_j \alpha_{kj} \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j).$$

Поэтому если сложить все столбцы главного определителя, то получим нулевой столбец. Таким образом, на основании свойств определителей заключаем, что значение главного определителя системы (2') равно нулю.

Преобразуем коэффициенты α_{ij} ($i, j = \overline{1,6}$):

$$\alpha_{kj} = \frac{a_k + a_i}{a_j - a_k} = 1 + 2 \frac{a_i}{a_j - a_k} \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j); \quad (3)$$

$$\alpha_{kk} = -\sum_j \alpha_{kj} = -5 + 2 \sum_j \frac{a_k}{a_k - a_j} \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j). \quad (4)$$

С учетом равенств (3) и (4) матрицу $M = [\alpha_{ij}]$ ($i, j = \overline{1,6}$) запишем в виде суммы двух матриц $M = M_1 + M_2$, где

$$M_1 = 2 \begin{pmatrix} \overline{\alpha_{11}} & \frac{a_1}{a_2 - a_1} & \frac{a_1}{a_3 - a_1} & \frac{a_1}{a_4 - a_1} & \frac{a_1}{a_5 - a_1} & \frac{a_1}{a_6 - a_1} \\ \frac{a_2}{a_1 - a_2} & \overline{\alpha_{22}} & \frac{a_2}{a_3 - a_2} & \frac{a_2}{a_4 - a_2} & \frac{a_2}{a_5 - a_2} & \frac{a_2}{a_6 - a_2} \\ \frac{a_3}{a_1 - a_3} & \frac{a_3}{a_2 - a_3} & \overline{\alpha_{33}} & \frac{a_3}{a_4 - a_3} & \frac{a_3}{a_5 - a_3} & \frac{a_3}{a_6 - a_3} \\ \frac{a_4}{a_1 - a_4} & \frac{a_4}{a_2 - a_4} & \frac{a_4}{a_3 - a_4} & \overline{\alpha_{44}} & \frac{a_4}{a_5 - a_4} & \frac{a_4}{a_6 - a_4} \\ \frac{a_5}{a_1 - a_5} & \frac{a_5}{a_2 - a_5} & \frac{a_5}{a_3 - a_5} & \frac{a_5}{a_4 - a_5} & \overline{\alpha_{55}} & \frac{a_5}{a_6 - a_5} \\ \frac{a_6}{a_1 - a_6} & \frac{a_6}{a_2 - a_6} & \frac{a_6}{a_3 - a_6} & \frac{a_6}{a_4 - a_6} & \frac{a_6}{a_5 - a_6} & \overline{\alpha_{66}} \end{pmatrix},$$

здесь $\overline{\alpha_{kk}} = a_k \sum_j \frac{1}{a_k - a_j} \quad (k, j = \overline{1,6}; k \neq j),$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (2') сведем к решению двух систем линейных уравнений, которые в матричном виде запишутся следующим образом

$$M_1 \cdot B = \Psi, \quad (5)$$

$$M_2 \cdot B = \Phi, \quad (6)$$

где

$$B \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{pmatrix}, \Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{pmatrix}, \Phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{pmatrix} \text{ и } \psi_i + \phi_i = \beta_i \quad (i = \overline{1,6}). \quad (7)$$

Начнем с решения системы (5). Для этого воспользуемся формулами Крамера.

Главный определитель системы (5) представим в виде

$$\Delta = 2^6 \sigma_6 \bar{\Delta} \quad \left(\sigma_6 = \prod_{i=1}^6 a_i \right),$$

где

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_{11}}{a_1} & \frac{1}{a_2 - a_1} & \frac{1}{a_3 - a_1} & \frac{1}{a_4 - a_1} & \frac{1}{a_5 - a_1} & \frac{1}{a_6 - a_1} \\ 1 & \frac{\alpha_{22}}{a_2} & \frac{1}{a_3 - a_2} & \frac{1}{a_4 - a_2} & \frac{1}{a_5 - a_2} & \frac{1}{a_6 - a_2} \\ \frac{1}{a_1 - a_3} & \frac{1}{a_2 - a_3} & \frac{\alpha_{33}}{a_3} & \frac{1}{a_4 - a_3} & \frac{1}{a_5 - a_3} & \frac{1}{a_6 - a_3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{a_3 - a_4} & \frac{\alpha_{44}}{a_4} & \frac{1}{a_5 - a_4} & \frac{1}{a_6 - a_4} \\ \frac{1}{a_1 - a_5} & \frac{1}{a_2 - a_5} & \frac{1}{a_3 - a_5} & \frac{1}{a_4 - a_5} & \frac{\alpha_{55}}{a_5} & \frac{1}{a_6 - a_5} \\ 1 & 1 & \frac{1}{a_3 - a_6} & \frac{1}{a_4 - a_6} & \frac{1}{a_5 - a_6} & \frac{\alpha_{66}}{a_6} \end{vmatrix} \quad (8)$$

Очевидно, что определитель (8) равен нулю. Действительно, если просуммировать все столбцы, то в результате получим нулевой столбец.

Воспользуемся теперь формулами Крамера. Для совместности системы (5) требуется, чтобы все определители $\Delta_j (j = \overline{1,6})$, полученные из главного определителя $\Delta = |a_{ij}| \quad (i, j = \overline{1,6})$ заменой j -го столбца на столбец свободных членов ψ , были равны нулю.

Используя свойства определителей, находим

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^6 A_{ij} \psi_i \frac{\sigma_6}{a_i} \quad (j = \overline{1,6}), \quad (9)$$

$$\text{где } A_{ij} = \frac{2^5 5!}{\prod_{r=1}^6 (a_r - a_i)} \quad (r, i = \overline{1,6}; r \neq i). \quad (10)$$

Так, например,

$$A_{12} = \frac{2^5 5!}{\prod_{i=1}^6 (a_i - a_2)} \quad (i \neq 2).$$

Согласно (9) и (10) заключаем, что все $\Delta_j \quad (j = \overline{1,6})$ равны между собой.

Таким образом, система условий $\Delta_j = 0 \quad (j = \overline{1,6})$ свелась к условию

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\psi_i}{a_i \prod_{r=1}^6 (a_r - a_i)} \quad (r, i = \overline{1,6}; r \neq i),$$

или в обозначениях Н.А. Лукашевича ([2]) имеем

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\psi_i}{a_i \phi(a_i)} = 0 \quad (i = \overline{1,6}). \quad (11)$$

Кроме тривиальных, можно указать значения $\psi_i \quad (i = \overline{1,6})$, при которых будет иметь место условие (11).

Это:

$$\psi_i = a_i^k \quad (i = \overline{1,6}, k=1, 2, 3, 4, 5). \quad (12)$$

Приведем еще один набор функций ψ_i , удовлетворяющих (11):

$$\psi_i = \lambda_i a_i \phi(a_i) \quad (i = \overline{1,6}), \text{ причем } \sum_{i=1}^6 \lambda_i = 0. \quad (13)$$

Решение системы (6) легко найти, воспользовавшись, например, методом Гаусса:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 = 0, \\ B_2 = B_1 + \frac{1}{6}(\phi_1 - \phi_2), \\ B_3 = B_1 + \frac{1}{6}(\phi_1 - \phi_3), \\ B_4 = B_1 + \frac{1}{6}(\phi_1 - \phi_4), \\ B_5 = B_1 + \frac{1}{6}(\phi_1 - \phi_5), \\ B_6 = B_1 + \frac{1}{6}(\phi_1 - \phi_6). \end{array} \right. \quad (14)$$

Заметим, что в силу симметрии систем (5) и (6) их решения также имеют симметричный вид, т. е. i -я компонента решения будет либо функцией только от "своей" компоненты a_i (случай (12)), либо от всех $a_i \quad (i = \overline{1,6})$ (случай (13)).

Учитывая соотношения (7), в случае (12) решения рассматриваемой системы $(S)_4$ имеют вид

$$B_r = B_1 + \frac{1}{6} \left(a_1^k - a_r^k + 2 \left(\frac{a_1'}{a_1} - \frac{a_r'}{a_r} \right) + 4 \left(\sum_j \frac{a_1' - a_j'}{a_1 - a_j} - \sum_j \frac{a_r' - a_j'}{a_r - a_j} \right) \right) \quad (r = \overline{2,6}), \quad (15)$$

при этом имеет место условие

$$\sum_{i=1}^6 a_i^k = 8 \sum_{k=1}^6 \sum_{j=2}^6 \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - 16 \sum_{j=1}^6 \frac{a_j'}{a_j} \quad (k < j). \quad (16)$$

Аналогично, если имеет место случай (13), то решения системы $(S)_4$ следующие:

$$B_r = B_1 + \frac{1}{6} \left(\phi(a_1) - \phi(a_r) + 2 \left(\frac{a_1'}{a_1} - \frac{a_r'}{a_r} \right) + 4 \left(\sum_j \frac{a_1' - a_j'}{a_1 - a_j} - \sum_j \frac{a_r' - a_j'}{a_r - a_j} \right) \right) \quad (r = \overline{2,6}), \quad (17)$$

при этом имеет место условие

$$\sum_{j=1}^6 \phi(a_j) = 8 \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - 16 \sum_{j=1}^6 \frac{a_j'}{a_j} \quad (k < j). \quad (18)$$

Из вышесказанного следуют две теоремы.

Теорема 1. Если имеет место условие (16), то решение системы Шази (2') имеет вид (15).

Теорема 2. Если имеет место условие (18), то решение системы Шази (2') имеет вид (17).

1. Chasy J. // Acta math. 1911. Vol. 34. P. 317.

2. Лукашевич Н. А. // Диф. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 353.

Поступила в редакцию 01.02.1999.

Чичурин Александр Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений (БрГУ им. А.С. Пушкина).

УДК 519.62

В.И. РЕПНИКОВ

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

The main properties of some functionals connected with special type linear differential systems are discussed.

При конструировании численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений традиционно важным является вопрос об уровне адекватности в поведении решений исходной дифференциальной задачи и аппроксимирующей ее разностной схемы. Поэтому для повышения качества разностных схем, ориентированных на решение определенного класса задач, представляется обязательным этап аналитического изучения характеристик, связанных с решениями задач данного класса.

В предлагаемой работе объектом исследования будет задача Коши

$$\dot{u}(t) + Au(t) = 0, \quad (1)$$

$$u(t_0) = u_0, \quad (2)$$

с симметричной положительно определенной матрицей A .