

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С L^p -ДИХОТОМИЧНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ

For the systems in the title sufficient conditions of the existence and uniqueness of bounded solutions are established.

Рассматриваем линейные системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (1)$$

где $A(\cdot): R \rightarrow \text{Hom}(R^n, R^n)$ – непрерывная матрица.

Определение 1. Будем говорить [1], что система (1) обладает L^p -дихотомией на R , $0 < p < +\infty$, и обозначать это включением $A \in L^p D$, если существуют пара взаимно дополнительных проекторов P_1 и P_2 и положительная постоянная C_p такие, что в случае $0 < p < +\infty$ для фундаментальной матрицы $X(t)$ системы (1), $X(0) = E$, выполнено условие

$$\int_{-\infty}^t \|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\|^p d\tau + \int_t^{+\infty} \|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\|^p d\tau \leq C_p, \quad t \in R,$$

а при $p = +\infty$ справедливы оценки

$$\|X(t)P_1X^{-1}(\tau)\| \leq C_\infty, \quad \tau \leq t,$$

$$\|X(t)P_2X^{-1}(\tau)\| \leq C_\infty, \quad \tau > t, \quad \tau, t \in R.$$

Асимптотическое поведение решений L^p -дихотомичной системы (1) описывают следующие леммы.

Лемма 1. Пусть система (1) обладает L^p -дихотомией на R с числом $p > 0$. Тогда

1) любое нетривиальное решение системы (1) такое, что $x(0) \in B_1 = P_1R^n$, удовлетворяет предельным соотношениям

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\| = +\infty; \quad (2)$$

2) любое нетривиальное решение $x(t)$ системы (1) с $x(0) \in B_2 = P_2R^n$ удовлетворяет предельным соотношениям

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\| = 0. \quad (3)$$

Доказательство леммы аналогично доказательству известных лемм В. Копеля [2], проведенных им на R_+ с числом $p = 1$.

Следствие 1. Если $A \in L^p D$ при $p > 0$, то

1) любое решение $x(t)$ с $x(0) \in R^n \setminus B_1$ удовлетворяет первому предельному соотношению в (3);

2) любое решение $x(t)$ с $x(0) \in R^n \setminus B_2$ удовлетворяет второму предельному соотношению в (2).

Следствие 2. Если линейная система (1) обладает L^p -дихотомией на R с числом $p > 0$, то она имеет единственное ограниченное на R решение $x \equiv 0$.

Рассмотрим также линейную неоднородную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (4)$$

где вектор-функция $f(t)$ принадлежит пространству $L_q(R)$, $1 \leq q \leq \infty$ (для единообразия будем обозначать $L_\infty(R) = C(R)$).

Лемма 2. Если линейная система (1) обладает L^p -дихотомией, $1 < p < \infty$, то при любой вектор-функции $f(t)$, принадлежащей пространству $L_q(R)$, $q > \frac{p}{p-1}$, линейная неоднородная система (4) имеет, и притом единственное, ограниченное на R решение. Это решение определяется по формуле

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $G(t, \tau)$ – функция Грина системы (1), определяемая по формуле

$$G(t, \tau) = \begin{cases} X(t)P_1X^{-1}(\tau), & t > \tau \\ -X(t)P_2X^{-1}(\tau), & t < \tau \end{cases}, \quad \tau, t \in R.$$

Доказательство леммы следует из свойства включения $L^{p+\varepsilon}D \subset L^pD$, установленного в [3, 4] для любых $p, \varepsilon > 0$, следствия 1 и теорем В. Коппеля [2, $p = 1$] и Р. Конти [1, $p > 1$].

Рассмотрим теперь нелинейную систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t) + \mu\varphi(t, y), \quad (6)$$

где $\varphi(t, y)$ – непрерывная вектор-функция, определенная в цилиндре $D_r = \{(t, y) : t \in R, \|y\| < r\}$, $r > 0$, μ – скалярный параметр.

В случае, если $A(t) = A$, достаточные признаки существования и единственности ограниченного на R решения системы (6) получены Б.П. Демидовичем [5]. Этот результат усилен В. Коппелем [2] для системы (6) с L^1 -дихотомичным линейным приближением (1), следовательно, и для системы (6) с экспоненциально дихотомичным приближением (1).

Цель настоящей работы – построить достаточные признаки существования и единственности ограниченного на R решения системы (6) с L^p -дихотомичным линейным приближением (1) при $p > 1$.

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \mu\varphi(t, y). \quad (7)$$

Справедлива

Теорема 1. Если

1) система (1) обладает L^p -дихотомией на R с числом $1 < p < +\infty$;

2) $\varphi(t, 0) \in L_q(R)$, $q \geq \frac{p}{p-1}$;

3) вектор-функция $\varphi(t, y)$ удовлетворяет в цилиндре D_r условию Липшица по второй переменной

$$\|\varphi(t, y_1) - \varphi(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|, \quad L = L(r) > 0, \quad (8)$$

то существует такое положительное $\bar{\mu}$, что система (7) при $|\mu| < \bar{\mu}$ имеет, и притом единственное, ограниченное на R решение, расположенное в цилиндре D_r .

Доказательство. При $p=1$ этот результат установлен в [2].

Пусть $A \in L^p D$ с числом $p > 1$. Из свойства включения [4] $L^{p+\varepsilon} D \subset L^p D$, $p, \varepsilon > 0$, следует, что $A \in L^{p_1} D$, если $1 \leq p_1 \leq p$, и тогда для любого q , $\frac{p}{p-1} \leq q < \infty$, существует такое $\bar{p}$, $1 \leq \bar{p} \leq p$, что $\frac{1}{q} + \frac{1}{\bar{p}} = 1$, а система (1) обладает L^p -дихотомией на R .

Рассмотрим полное метрическое пространство $C_r(R)$ непрерывных и ограниченных на R вектор-функций $y(t)$, $\|y(t)\| \leq r$, $t \in R$, с метрикой $\rho(y_1(t), y_2(t)) = \sup_{t \in R} \|y_1(t) - y_2(t)\|$.

В $C_r(R)$ рассмотрим оператор T : $y(t) \rightarrow Ty(t)$, где

$$Ty(t) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) \varphi(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (9)$$

Покажем, что при $|\mu| < \bar{\mu} = r \left(LC_1 r + C_{\bar{p}}^{\frac{1}{\bar{p}}} \|\varphi(t, 0)\|_{L_q} \right)^{-1}$ оператор T переводит $\bar{C}_r(R)$ в $C_r(R)$. Действительно, в силу условия Липшица (8), определения L^p -дихотомии и неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} \|Ty(t)\| &\leq |\mu| \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|\varphi(\tau, y(\tau))\| d\tau \leq |\mu| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|\varphi(\tau, y(\tau)) - \varphi(\tau, 0)\| d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|\varphi(\tau, 0)\| d\tau \right) \leq |\mu| L \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|y(\tau)\| d\tau + |\mu| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \times \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\varphi(\tau, 0)\|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \leq |\mu| \left(LC_1 r + C_{\bar{p}}^{\frac{1}{\bar{p}}} \|\varphi(t, 0)\|_{L_q} \right) \leq r, \quad t \in R. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует корректность интеграла (9), ограниченность вектор-функции $Ty(t)$, а ее непрерывность – из свойств интеграла.

Покажем, что оператор T является сжимаемым при $|\mu| < \min(\bar{\mu}, \frac{1}{LC_1}) = \bar{\mu}$.

Действительно, для любых y_1 и y_2 из $C_r(R)$ в силу неравенства (8) и включения $A \in L^1 D$ имеем

$$\begin{aligned} \|Ty_1(t) - Ty_2(t)\| &\leq |\mu| \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|\varphi(\tau, y_1(\tau)) - \varphi(\tau, y_2(\tau))\| d\tau \leq \\ &\leq |\mu| L \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, \tau)\| \|y_1(\tau) - y_2(\tau)\| d\tau \leq |\mu| LC_1 \rho(y_1, y_2) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\rho(Ty_1, Ty_2) \leq \lambda \rho(y_1, y_2), \quad \lambda = |\mu| LC_1 < 1.$$

Как и в [2], рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) = Ty(t). \quad (10)$$

В силу сжимаемости оператора T уравнение (10) имеет единственное в $C_r(R)$ решение, которое, очевидно, является и решением дифференциальной системы (7).

Наоборот, если $y(t)$ – решение системы (7) такое, что $\|y(t)\| \leq r$, $t \in R$, то $x(t) = y(t) - Ty(t)$ есть ограниченное решение системы (1), и, следовательно, в силу следствия 1 имеем $x \equiv 0$. Данный факт завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. Пусть

- 1) система (1) обладает L^p -дихотомией на R с числом $p > 1$;
- 2) вектор-функция $f(t)$ принадлежит пространству $L_{q_1}(R)$ при $q_1 \geq \frac{p}{(p-1)}$;
- 3) вектор-функция $\varphi(t, y)$ определена и непрерывна в области $G = \{(t, y) : t \in R, y \in R^n\}$ и удовлетворяет в G условию Липшица по y (8) с постоянной $L > 0$;
- 4) $\varphi(t, 0)$ принадлежит пространству $L_{q_2}(R)$ при $q_2 \geq \frac{p}{(p-1)}$.

Тогда существует такое положительное число $\bar{\mu}$, что система (6) при $|\mu| < \bar{\mu}$ имеет, и притом единственное, ограниченное на R решение.

Доказательство. При $p=1$ этот результат следует из теоремы В. Копеля [2].

Пусть $p > 1$. Проводя соответствующие, как и в теореме 1, построения в пространстве $C(R)$ непрерывных и ограниченных вектор-функций $y(t)$ с нормой $\|y(t)\|_C = \sup_{t \in R} \|y(t)\|$ для интегрального уравнения

$$y(t) = x(t) + Ty(t),$$

где $x(t)$ – единственное ограниченное решение (5) системы (4), а оператор T определяется по формуле (9), устанавливаем, как и ранее, взаимно однозначное соответствие между ограниченными на R решениями систем (4) и (6), если $|\mu| < \bar{\mu} \equiv 1/LC_1$, что и завершает доказательство теоремы.

1. Conti R. // Funkcialaj Ekvacioj. 1966. Vol. 9. № 1. P. 23.
2. Coppel W.A. Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations. Heath. Math. Monographs. Boston, 1965.
3. Прохорова Р.А. // Диф. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2090.
4. Прохорова Р.А. // Там же. 1994. Т. 30. № 6. С. 1095.
5. Демидович Б.П. // Мат. сборник. 1956. 40(82). № 1. С. 73.

Поступила в редакцию 28.06.2000.

Прохорова Римма Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений БГУ.

Шевцов Игорь Леонидович – магистрант.