Математика и информатика

УДК 532.135

М.Д. МАРТЫНЕНКО, С.М. БОСЯКОВ

ПОВЕРХНОСТИ СЛАБЫХ И СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ В ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКИХ СРЕДАХ

The equations of surfaces of weak and strong discontinuities in ideal and viscous liquids are obtained.

Исследование разрывных классов движений сплошных сред имеет как теоретическое, так и практическое значение [1, 2]. Ниже предлагается анализ соответствующих задач на основе общей теории характеристик. Полная система уравнений движения для жидких сред (считаем, что движения происходят с малыми скоростями) [2, 3] имеет вид:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+X_i=\rho\frac{\partial v_i}{\partial t},\ i=\overline{1,3},\\ \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0,\ p=f(\rho),\end{gathered}\tag{1}$$

где $v=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ – вектор скорости, ρ – плотность среды, X_i – массовые силы. Для идеальной жидкости $\sigma_{ii}=-p$ (p – давление), для вязкой жидкости $\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\lambda\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, λ, μ – объемная и сдвиговая вязкости. Система (1) в случае идеальной жидкости имеет первый порядок, в случае вязкой жидкости – второй. Будем считать, что решение системы уравнений первого порядка имеет на поверхности $\varphi(t,\ x_1,x_2,x_3)=\mathrm{const}$ слабый разрыв, если при переходе через эту поверхность функции $v_i, i=\overline{1,3}, \rho$ остаются непрерывными, а некоторые производные первого порядка претерпевают на этой поверхности разрыв первого рода. Если же имеем разрыв первого рода для первых производных в уравнениях второго порядка, то такой разрыв является сильным [4].

Пусть на поверхности $\varphi(t,\ x_1,x_2,x_3)=\mathrm{const}$ производные $\frac{\partial v_m}{\partial x_n}, \frac{\partial v_m}{\partial t}$, $\frac{\partial\rho}{\partial x_n}, \frac{\partial\rho}{\partial t}$, $m,\ n=\overline{1,3}$ непрерывны с каждой из сторон поверхности вплоть до ее точек. Этот факт совместно с непрерывностью составляющих вектора скорости v и плотности ρ позволяет показать, что при переходе через поверхность φ остаются непрерывными выражения вида [4, 5]:

$$\begin{gathered} p_k \frac{\partial v_i}{\partial t} - p_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = M_{ki}, \ k, \ i = \overline{1,3}, \\ p_k \frac{\partial \rho}{\partial t} - p_0 \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = M_k, \end{gathered} \tag{2}$$

где M_{ki}, M_k – непрерывные функции, $p_0 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$, $p_k = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k}$, i, $k = \overline{1,3}$.

Кроме того, при распространении поверхности разрыва остаются справедливыми уравнения (1) в областях, ограниченных этой поверхностью, т. е. являются непрерывными выражения вида:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = M_{4i}, \ i = \overline{1,3}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = M_{44}, \end{gathered} \tag{3}$$

где M_{4i}, M_{44} также непрерывные функции.

Соотношения (2), (3) можно рассматривать как шестнадцать линейных алгебраических уравнений относительно производных $\dfrac{\partial v_m}{\partial x_n}$, $\dfrac{\partial v_m}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial x_n}$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$, m, $n = \overline{1,3}$. Если система уравнений (2), (3) разрешима, то первые частные производные выразятся через непрерывные функции и сами останутся непрерывными, поэтому поверхность разрыва $\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ определится из условия неразрешимости системы уравнений (2), (3) относительно упомянутых выше частных производных [4, 5]. Прежде чем записать условие неразрешимости этой системы, целесообразно сократить число уравнений. Проделаем это отдельно для идеальной и вязкой несжимаемой жидкости.

В первом случае из (3) имеем:

$$\begin{gathered} -\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = M_{4i}, \ i = \overline{1,3}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = M_{44}. \end{gathered} \tag{4}$$

Умножим оба уравнения (4) на p_0 и заменим получающиеся произведения $p_0 \dfrac{\partial v_m}{\partial x_n}$, $p_0 \dfrac{\partial \rho}{\partial x_n}$, m, $n = \overline{1,3}$ левыми частями следующих равенств:

$$p_k \frac{\partial v_i}{\partial t} - M_{ki} = p_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad p_k \frac{\partial \rho}{\partial t} - M_k = p_0 \frac{\partial \rho}{\partial x_k}.$$

Будем иметь четыре уравнения относительно частных производных $\dfrac{\partial v_m}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$, $m = \overline{1,3}$:

$$-p_k \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \rho p_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} + \ldots = 0, \quad i = \overline{1,3},$$

$$p_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \sum_{k=1}^{3} p_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \ldots = 0. \qquad (5)$$

Тогда условие неразрешимости системы (5) принимает вид:

$$g^2 \left(p_0^2 - \frac{\partial p}{\partial \rho} g^2 \right) = 0,$$

где $g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. Отсюда вытекают следующие уравнения распространения поверхностей разрыва:

$$g^2 = 0, \qquad (6)$$

$$p_0^2 - g^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} = 0. \qquad (7)$$

Из (7) можем определить скорость распространения поверхности слабого разрыва [4]:

$$V = -\frac{p_0}{g} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}.$$

Уравнение (6) соответствует случаю стационарного разрыва.

Для вязкой несжимаемой жидкости (ρ=const) динамические условия совместности (3) принимают вид:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2} - \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = M_{4i}, \quad i = \overline{1,3},$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = M_{44}. \qquad (8)$$

Для того чтобы привести систему уравнений (2), (8) к более простому виду (с учетом того, что ρ=const), уравнения (2) перепишем в виде:

$$p_k \frac{\partial v_i}{\partial t} - M_{ki} = p_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \qquad (9)$$

$$p_k \frac{\partial p}{\partial t} - M_k = p_0 \frac{\partial p}{\partial x_k}. \qquad (10)$$

Продифференцируем выражение (9) по x_l:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}\frac{\partial p_k}{\partial x_l} + \quad = p_0 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_l \partial x_k}. \qquad (11)$$

Теперь умножим обе части соотношений (8) на p_0 и заменим произведения $p_0 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_n \partial x_m}, p_0 \frac{\partial p}{\partial x_n}$, $i, m, n = \overline{1,3}$ левыми частями равенств (10) и (11).

В результате получим систему уравнений относительно $\frac{\partial v_m}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}$, $m = \overline{1,3}$:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\left(\mu \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial p_k}{\partial x_k} - \rho p_0\right) - p_i \frac{\partial p}{\partial t} + \ldots = 0, \quad i = \overline{1,3},$$

$$\sum_{k=1}^{3} p_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \ldots = 0. \qquad (12)$$

Как и ранее, уравнение распространения сильных разрывов получим из условия неразрешимости системы (12) относительно $\frac{\partial v_m}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}, m=\overline{1,3}$:

$$\det\left\|\omega_{ij}\right\|=0,$$

где $\omega_{ii}=\mu\Delta\varphi-\rho p_0$, $\omega_{i4}=\omega_{4i}=p_i, \omega_{ij}=0, i\neq j=\overline{1,3}$, Δ – оператор Лапласа. Раскрывая определитель, получим:

$$g^2\left(\mu\Delta\varphi-\rho p_0\right)=0. \qquad (13)$$

Выражение (13) дает уравнение сильных разрывов

$$\mu\Delta\varphi-\rho p_0=0. \qquad (14)$$

Кроме того, из (13) следует существование поверхности стационарного разрыва.

Отметим, что уравнение сильных разрывов может использоваться при получении уравнения поверхности ударной волны, расчета скоростей распространения различных типов волн путем соответствующих подстановок в уравнение (14). Так, используя представление плоских гармонических волн в виде $u=u_0\exp\left(-i\left(\omega t-\boldsymbol{kr}\right)\right)$, из (14) получаем известное дисперсионное уравнение для поперечных волн в вязкой жидкости:

$$k=\pm\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}\left(1+i\right).$$

Здесь k – волновое число, ω – частота, i – мнимая единица. Комплекснозначность $k(\omega)$ означает то, что действительная часть $\operatorname{Re}k(\omega)=\pm\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}$ характеризует фазовую скорость распространения сильных разрывов $v=\frac{\omega}{\operatorname{Re}k(\omega)}$ [6], а мнимая часть $\operatorname{Im}k(\omega)=\pm\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}$ представляет собой зависимость коэффициента затухания от частоты [6].

Также заметим, что уравнение (7) слабых разрывов и уравнение (14) сильных разрывов в точности совпадает с уравнениями характеристик системы (1) для идеальной и вязкой несжимаемой жидкости [4, 7].

1. Эриксен Д. Исследования по механике сплошных сред. М., 1977.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., 1989.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1970.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.,1981. Т. 4. Ч. 2.
5. Петрашень Г.И. Распространение волн в упругих анизотропных средах. Л., 1980.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М., 1990.
7. Мартыненко М.Д., Босяков С.М. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2000. № 2. С. 141.

Поступила в редакцию 25.09.2000.

Мартыненко Михаил Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики БГУ.

Босяков Сергей Михайлович – ассистент кафедры теоретической механики БрГУ.