

($FR = I_r$) и исходную систему S преобразуем в систему $\bar{S}$ с матрицами $\bar{A}_i = FA_iR$, $\bar{B}_i = FB_i$ ($i = \overline{1, m}$), $\bar{C} = CR$, $\bar{D} = D$.

Легко показать, что преобразованная таким образом система $\bar{S}$ сохраняет свойство разрешимости и что она будет минимальной.

После преобразования системы S в $\bar{S}$ перейдем к уравнениям

$$z(k + e_i) = \bar{A}_i z(k) + \bar{B}_i u(k), \quad y(k) = \bar{C}z(k) + \bar{D}u(k), \quad k \in Z_+^m, \quad i = \overline{1, m}, \quad z(0) = z_0,$$

и определим соответствующее вспомогательное семейство матриц

$$Z_{k+e_i} = \bar{A}_i Z_k, \quad k \in Z_+^m, \quad i = \overline{1, m}, \quad Z_0 = I_r,$$

и матрицу $\bar{K}$, построенную аналогично матрице K из блоков $\bar{C}Z_k$.

Определение 3. Системы S_1 и S_2 назовем эквивалентными, если каждому начальному состоянию системы S_1 соответствует по меньшей мере одно эквивалентное начальное состояние системы S_2 , и наоборот.

Можно указать классы эквивалентных состояний исходной и преобразованной систем с помощью следующей теоремы.

Теорема 2. Состояние x_0 системы S эквивалентно состоянию $z_0 = Fx_0$ системы $\bar{S}$, и наоборот, состояние z_0 системы $\bar{S}$ эквивалентно состоянию $x_0 = Rz_0$ системы S .

Доказательство теоремы следует из формулы Коши [2] для систем S и $\bar{S}$ и равенства

$$CX_k = \bar{C}Z_k F. \quad (3)$$

Определение 4. Систему S_2 назовем минимальной реализацией системы S_1 , если S_2 минимальна и эквивалентна S_1 .

Справедлива

Теорема 3. Система $\bar{S}$ является минимальной реализацией системы S .

Доказательство. Минимальность $\bar{S}$ следует из того факта, что матрицы $\bar{F}$ и $\bar{R}$, построенные из строк матрицы K , будут единичными. Далее для систем S и $\bar{S}$, учитывая равенства (3), легко проверяются условия эквивалентности начальных состояний.

1. Гайшун Л.Н., Горячкин В.В., Крахотко В.В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 4. С. 43.

2. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн., 1983.

Поступила в редакцию 26.06.2000

Гайшун Лина Николаевна – кандидат физико-математических наук (БГПА).

Горячкин Владимир Витальевич – кандидат физико-математических наук.

Крахотко Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук.

УДК 517.968.536.24

П.А. МАНДРИК

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ В ОБЛАСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

The new method of a solution of dual integral equations with trigonometrical functions into Laplas transformation domain is offered.

При решении двумерной осесимметричной нестационарной задачи теплопроводности для полупространства, нагреваемого по закону Фурье через бесконечно длинную полосу шириной $2R$, возникает необходимость решения парных интегральных уравнений в области преобразования Лапласа [1, 2, с. 245] вида

$$\int_0^{\infty} \bar{C}(p, s) \sqrt{p^2 + s/a} \cos(px) dp = \frac{\bar{q}(x, s)}{\lambda}, \quad 0 < x < R, \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} \bar{C}(p, s) \cos(px) dp = 0, \quad R < x < \infty, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad (2)$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент теплопроводности; $a > 0$ – коэффициент температуропроводности; $\bar{q}(x, s)$ – известная аналитическая функция-изображение плотности теплового потока; $\bar{C}(p, s)$ – неизвестная аналитическая функция, подлежащая определению.

Для решения (1), (2) воспользуемся подстановкой

$$\bar{C}(p, s) = \int_0^R \varphi(t, s) \frac{\sin(t\sqrt{p^2 + s/a})}{\sqrt{p^2 + s/a}} dt, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad (3)$$

которая автоматически обеспечивает выполнение второго парного уравнения (2), так как [3]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t\sqrt{p^2 + s/a})}{\sqrt{p^2 + s/a}} \cos(px) dp = \begin{cases} \frac{\pi}{2} J_0(\sqrt{(t^2 - x^2)s/a}) & 0 < x < t, \\ 0, & 0 < t < x, \end{cases}$$

где $J_0(z)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Первое парное уравнение (1) с помощью подстановки (3) принимает вид

$$\int_0^R \varphi(t, s) dt \int_0^{\infty} \sin(t\sqrt{p^2 + s/a}) \cos(px) dp = \frac{\bar{q}(x, s)}{\lambda}, \quad 0 < x < R, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad (4)$$

из которого необходимо определить неизвестную функцию $\varphi(t, s)$.

Для обеспечения сходимости несобственного интеграла в (4) воспользуемся интегральным представлением функции Бесселя [3]

$$J_0(px) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\cos(\mu x)}{\sqrt{x^2 - \mu^2}} d\mu, \quad 0 < x < R, \quad (5)$$

и уравнение (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} \int_0^R \varphi(t, s) dt \int_0^{\infty} \sin(t\sqrt{p^2 + s/a}) J_0(px) dp = \\ = \frac{2}{\pi\lambda} \int_0^x \frac{\bar{q}(\mu, s)}{\sqrt{x^2 - \mu^2}} d\mu, \quad 0 < x < R, \quad \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Известно (см., напр., [4]) значение разрывного интеграла

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(t\sqrt{p^2 + s/a}) J_0(px) dp = \\ = \begin{cases} \frac{d}{dt} \left[J_0\left(0,5\sqrt{s/a}\left(t - i\sqrt{x^2 - t^2}\right)\right) Y_0\left(0,5\sqrt{s/a}\left(t + i\sqrt{x^2 - t^2}\right)\right) \right], & 0 < t < x, \\ \frac{d}{dt} \left[J_0\left(0,5\sqrt{s/a}\left(t - \sqrt{t^2 - x^2}\right)\right) Y_0\left(0,5\sqrt{s/a}\left(t + \sqrt{t^2 - x^2}\right)\right) \right], & 0 < x < t, \end{cases} \end{aligned}$$

где $Y_0(z)$ – функция Бесселя второго рода нулевого порядка, использование которого позволяет преобразовать уравнение (6) к виду

$$\int_0^R \bar{\varphi}(t, s) \frac{d}{dt} \left[J_0 \left(0,5\sqrt{s/a} \left(t - \sqrt{t^2 - x^2} \right) \right) Y_0 \left(0,5\sqrt{s/a} \left(t + \sqrt{t^2 - x^2} \right) \right) \right] dt = \\ = \frac{4}{\pi^2 \lambda_0} \int_0^x \frac{\bar{q}(\mu, s)}{\sqrt{x^2 - \mu^2}} d\mu, \quad 0 < x < R, \operatorname{Re} s > 0. \quad (7)$$

Наконец, выполнив дифференцирование в левой части (7), приходим к соответствующему интегральному уравнению первого рода с L -параметром, решение которого, подобно [5], можно определить, представив неизвестную аналитическую функцию $\bar{\varphi}(t, s)$ в виде функционального ряда

$$\bar{\varphi}(t, s) = \exp(-R\sqrt{s/a}) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) (\sqrt{s})^{n-2}, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

а известные функции Бесселя и $\bar{q}(x, s)$ – в виде разложений в соответствующие степенные ряды по $\sqrt{s}$.

1. Мандрик П. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 1. С. 75.
2. Козлов В. П., Мандрик П. А. Системы интегральных и дифференциальных уравнений с L -параметром в задачах математической физики и методы идентификации тепловых характеристик. Мн., 2000.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
4. Они же. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.
5. Козлов В. П., Мандрик П. А., Юрчук Н. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 2. С. 37.

Поступила в редакцию 17.10.2000.

Мандрик Павел Алексеевич – кандидат физико-математических наук.

УДК 681.518.25:519.283

П.П. РОГАЧ

ОБ ОДНОМ СТАТИСТИЧЕСКОМ ТЕСТЕ ОБНАРУЖЕНИЯ СТРУКТУРНОГО ИЗМЕНЕНИЯ В СИСТЕМЕ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

In the article the systems of simultaneous equations with time-varying parameters are considered. One test for detection of a structural change in a system of simultaneous equations is given.

При моделировании сложных систем возможны случаи «изменчивости во времени» параметров рассматриваемой системы [1, 2]. Пренебрежение этим фактом при моделировании и прогнозировании приводит к ошибкам. В частности, в работе [3] было показано, что при «скачкообразном» изменении параметров (структурном изменении) в некоторый момент времени идентификация классическими методами приводит к смещенным оценкам параметров. Задача выявления структурного изменения, которая достаточно хорошо решена для простых одномерных систем, является актуальной для многомерных моделей, в том числе для систем одновременных уравнений.

Будем рассматривать следующую систему одновременных уравнений с переменными параметрами [3]:

$$A_0(t)y_t + A_1(t)y_{t-1} + B(t)x_t = u_t, \quad (1)$$

где $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ – дискретный момент времени (T – период наблюдения); $y_t = (y_{ti}) \in R^N$ – вектор наблюдаемых зависимых переменных в момент времени t ($i = \overline{1, N}$); $x_t = (x_{ti}) \in R^K$ – вектор наблюдаемых неслучайных объясняющих